③ 或ル Rondom Sequence ノ 二就イテ

丸山　儀四郎
小野山　卓爾

二ツノ実確率変数ノ組　$\{x_n\}$, $\{y_n\}$　$n = 1, 2, \cdots\cdots$
デ

(1)　$\sigma(x_n) \leqq \sigma$　$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$

(2)　x_n ハ $(y_1, x_1, y_2, x_2, \cdots\cdots, y_{n-1}, y_n)$ ト独立

(3)　$y_1, y_2, \cdots\cdots$ ハ何レモ 0 又ハ 1 ノミヲトル

(4)　$P_r\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty\right) = 1$

ナラバ

(5)　$\sum_{k=1}^{\theta} y_k = n$　ナル最小ノ $\theta = \theta_n$ ガ存在シテ

(6)　$P_r\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\theta_n} y_k (x_k - \mathfrak{m}(x_k))}{n} = 0\right) = 1$

ガ云ヘル其條件ハ $\mathfrak{m}(x_k)=0$ ノトキ，上述ノ θ_n ニ対シテ

(7)　$P_r\left(\max \left| y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots\cdots + y_kx_k \right| \geqq t\sigma\sqrt{n}\right) \leqq \frac{1}{t^2}$

ナルコトヲ証明スル（伊藤清著　確率論ノ基礎　58頁～61頁）

コヽデハ，先ヅ(7)ノ簡単ナ別証明ヲ與ヘル。

即チ，少シク拡張シテ※

(1)′　同上 (1)

(2)′　同上 (2)

(3)′　$0 \leqq y_n \leqq 1$　　$n = 1, 2, \cdots\cdots$

(4)′　同上 (4)

(5)′　$\sum_{k=1}^{\theta} y_k \leqq n$　ナル最大ノ θ ヲ θ_n トスル

即　$y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_{\theta_n} \leqq n$

$y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_{\theta_n+1} > n$

ナラバ　$m(x_k) = 0$ トシタトキ (7) ガ成リ立ツ

[証明]

$\{\varepsilon_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ次ノ様ニ定義スル

$y_1 \leqq n,\ y_1 + y_2 \leqq n, \cdots y_1 + \cdots + y_\nu \leqq n$

ナル ν ニ対シテハ ε_ν ハ凡テ 1 ナル値ヲトリ，サウデナイ場合ハ 0 トスルト，$(\varepsilon_1, \cdots\cdots \varepsilon_\nu)$ ハ (2)′ ヨリ初メノ ν 個ノ y_i ニ関係シ，x_ν トハ独立，随ッテ (7) ハ次の (7)′ ト同値命題

(7)′　$P_r\left(\max|\varepsilon_1 y_1 x_1 + \cdots\cdots + \varepsilon_k y_k x_k| \geqq t\sigma\sqrt{n}\right) \leqq \frac{1}{t^2}$

我々ハ (7)′ ヲ証明スレバヨイ.

$$m\left(\sum_{\nu}^{\infty} \varepsilon_\nu y_\nu x_\nu\right)^2 = m\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 y_\nu^2 x_\nu^2\right) + 2m\left(\sum_{i<j}^{\infty} \varepsilon_i \varepsilon_j y_i y_j x_i x_j\right)$$

$$\leqq \sigma^2 m\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 y_\nu^2\right) + 2\sum_{i<j}^{\infty} m(\varepsilon_i \varepsilon_j y_i y_j x_i) m(x_j)$$

((1)′, (2)′ ニヨル)

$$\mathfrak{M}(x_j)=0,\quad \sum_{\nu=1}^{\theta_n} y_\nu^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{\theta_n} y_\nu \leqq n \quad ((3)',(5)' = ヨル)$$

$$\leqq n\sigma^2 \quad \text{--------} (8)$$

一方，

$$E_\nu = \mathcal{E}_{\omega}^{us}\left(|\varepsilon_1 y_1 x_1| < t\sigma\sqrt{n}, \text{-----}, |\varepsilon_1 y_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_{\nu-1} y_{\nu-1} x_{\nu-1}| < t\sigma\sqrt{n},\ |\varepsilon_1 y_1 x_1 + \text{----} + \varepsilon_\nu y_\nu x_\nu| \geqq t\sigma\sqrt{n}\right).$$

トスレバ

$$\mathfrak{M}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu y_\nu x_\nu\right)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{E_\nu}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\varepsilon_k y_k x_k + \sum_{\ell=\nu+1}^{\infty}\varepsilon_\ell y_\ell x_\ell\right)^2 P_r(d\omega)$$

$$\geqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int\left(\sum_{k=1}^{\nu}\varepsilon_k y_k x_k\right)^2 P_r(d\omega) + 2\int_{E_\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\varepsilon_k y_k x_k \sum_{\ell=\nu+1}^{\infty}\varepsilon_\ell y_\ell x_\ell P_r(d\omega)\right)$$

$$\geqq t^2\sigma^2 n \sum_{\nu=1}^{\infty} P_r(E_\nu)$$

$$= t^2\sigma^2 n\, P_r\left(\max_{1\leqq k<\infty}|\varepsilon_1 y_1 x_1 + \text{----} + \varepsilon_k y_k x_k| > t\sigma\sqrt{n}\right)$$

(8)′ ヲ使ッテ (7)′ ガ結論サレル。

サテ，

(1)′〜 (5)′ ノモトデ (7)′ ガ云ヘレバ，(7) ガ云ヘタコトデアリ随ッテ，(7) カラ大数ノ強法則ノ同様ニシテ，(1)′〜 (5)′ ノモトデ (6) ガ云ヘル。 今 (3) ヲ $\{x_n\}$ カラノ項位選出 (*Stellen auswahl*) ト考ヘル ($y_i=1$ ナラ選ビ，$y_l=0$ ナラ選バナイ) ナラバ，我々の場合， $\sum_{k=1}^{\theta_n} y_k = O(n)$ ナルコトヤ (3) カラ，項位選出の時，唯選出スルカ，シナイカデナクテ，或ル重サ (*Weight*) ヲツケテ選出シテ行ッテモ，同様ノ事ガ云ヘルト言フコトヲ意味スル。

最後ニ，魚返，国沢，両先生ノ御指導ヲ感謝申シ上ゲマス。