① 正規母集團に於ける一次形式，二次形式及び双一次形式統計量の間の独立性に關して。*

統計数理研究所員
小川潤次郎

はしがき

数理統計学に於ては應用上重要な標本分布を導く場合にしばしば正規母集團から取られた任意標本の一次形式，二次形式或は又双一次形式の間の統計学的独立性を問題にしなければならない。例へば有名な Student の t 分布を導くときに大切なことは或正規母集團から抽出された大さ n の任意標本 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の標本平均値 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ と分散の不偏推定値 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ とが統計的に独立であると云ふことであつて，即ち一次形式と二次形式との独立性が問題となるのである。変量分析に於ては例へば $N = ab$ 個の正規母集團からの任意標本を次の如く並べたとする。

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1b} & \bar{x}_{1.} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2b} & \bar{x}_{2.} \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \\
x_{a1} & x_{a2} & \cdots\cdots & x_{ab} & \bar{x}_{a.} \\
\hline
\bar{x}_{.1} & \bar{x}_{.2} & \cdots\cdots & \bar{x}_{.b} &
\end{array}
$$

但し、$\bar{x}_{i.} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}$，　$\bar{x}_{.j} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} x_{ij}$

$i = 1, 2, \cdots\cdots, a, \quad j = 1, 2 \cdots\cdots, b$

又　$\bar{x} = \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}$ とする。

このとき

* 本研究は文部省科学研究費に依る研究の一部である

$$\sum_1^a \sum_1^b (x_{ij}-\bar{x})^2 = b\sum_1^a (\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2 + a\sum_1^b (\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2 + \sum_1^a\sum_1^b (x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$$
$$\equiv \quad \theta_1 \quad + \quad \theta_2 \quad + \quad \theta_3$$

とおくと$\theta_1, \theta_2, \theta_3$は明かに$x_{ij}$の二次形式であつてこれらの間の独立性が問題になるのである。

又更に多変量正規母集團の場合に於ては其の中の二つの変量の共変量に対應する双一次形式の統計量$a_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n}(x_{i\alpha}-\bar{x}_i)(x_{j\alpha}-\bar{x}_j)$と$\bar{x}_i$, $\bar{x}_j$とが独立である。勿論之等統計量の独立性の問題はすべて特性函数若くは積率母函数を計算することに依つて解決せられるのであるが，それら形式の係数のみから独立性を判定出來るやうな基準があるならば望ましいことなのである。

二次形式統計量の間の独立性の判定には有名な Cochran の定理がある。[1]（Cochranの定理）母平均0，母分散1の正母集團から抽出された大さnの任意標本$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$の二次形式として表はされる$s$個の統計量$q_1, q_2, \cdots\cdots, q_s$の間に

$$q_1 + q_2 + \cdots\cdots + q_s = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2$$

なる関係式が成立つとき$q_1, q_2, \cdots, q_s$の階数を夫々$r_1, r_2, \cdots, r_s$とするとき

$$r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_s = n$$

が成立つことであつて，此の場合には$q_1, q_2, \cdots, q_s$は夫々自由度が$r_1, r_2, \cdots, r_s$であるχ^2ー分布をする。

其後，A.C. Aitken[2]及び A.T. Craig[3]は特性函数を計算することによつて，次の如き結果を得た。θ_1, θ_2を任意標本$x_1, x_2, \cdots, x_n$の二次形式統計量とし，その行列を夫々A, BとすればA, Bは夫々n次の実対稱行列であつて，$y=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$なるベクトル記号を用ひて，内積として

$$\theta_1 = (yA, y), \quad \theta_2 = (yB, y)$$

として書くことが出來るが，θ_1, θ_2の統計的独立性と

$$|E-2\lambda A-2\mu B| = |E-2\lambda A||E-2\mu B| \qquad (*)$$

がλ, μのすべて実数値に対して成立つことゝ同値である。

更に Craig[4] 及び坂元[5] は(*)は $AB=0$ と同値であることを主張したが，その証明は誤りであった。Hotelling[6] は此の定理の証明を試みたがその証明は不充分であった。小川[7] はこれらの定理の証明を整理して，統一的な方法で結果を導出することを試みたが，これも不十分でありその内に誤りのあることが統数研の鍋谷清治氏に依って指摘された。

又，1947年の Annals of Mathematical Statistics Vol 18. No.4 に於て Craig[8] は二変量正規母集團の場合に於ける双一次形式統計量と二次形式統計量の間及び二つの双一次形式統計量の間の独立性の判定基準を與へた。

以下本稿に於ては，小川[9] の前に用ひた idea に従って以上の如き諸結果を統一的に導き出し，更に前論文で証明の不充分であった点を嚴密に証明し直すことを目標とする。

§ 1. 代数的な補助定理

先づ後に必要な Linear Algebra の補助定理を述べる。

（補助定理 1） A及びBを夫々階数 r_A 及び r_B の n 次の実対称行列とし，$C \equiv A+B$ の階数を r_C とする。若し $r_C = r_A + r_B$ ならば，A，B，Cを実数体の上の n 次元ベクトル空間 $\mathfrak{L}$ の一次変換と考へるとき，A，B，Cの固有空間* $A(\mathfrak{L})$，$B(\mathfrak{L})$，$C(\mathfrak{L})$ の間には次の関係が成立つ。

$$C(\mathfrak{L}) = A(\mathfrak{L}) + B(\mathfrak{L}) \quad (\text{直和}) \tag{1}$$

証　明　A，Bは対稱行列であるから，$A(\mathfrak{L})$，$B(\mathfrak{L})$ の次元は夫々 r_A，r_B である。

又

$$\dim(A(\mathfrak{L}) \cup B(\mathfrak{L})) = \dim(A(\mathfrak{L})) + \dim(B(\mathfrak{L})) - \dim(A(\mathfrak{L}) \cap B(\mathfrak{L})) \tag{2}$$

であって $\mathfrak{L}$ の任意のベクトル $\mathfrak{x}$ に対して

$$C y = A y + B y \in A(\mathcal{L}) \smile B(\mathcal{L}) \tag{3}$$

であるから

$$C(\mathcal{L}) \subseteq A(\mathcal{L}) \smile B(\mathcal{L}) \tag{4}$$

従って

$$\dim (C(\mathcal{L})) \leq \dim (A(\mathcal{L}) \smile B(\mathcal{L})) \tag{5}$$

(2)と(5)から

$$\dim (C(\mathcal{L})) \leq \dim (A(\mathcal{L})) + \dim (B(\mathcal{L})) - \dim (A(\mathcal{L}) \frown B(\mathcal{L})) \tag{6}$$

(*) 全空間$\mathcal{L} = A(\mathcal{L}) + \mathfrak{N}_A$, $\mathfrak{N}_A$はAの零点集合のとき

A($\mathcal{L}$) 此処では固有空間と呼んでおく。

これを書換へると

$$r_C \leq r_A + r_B - \dim (A(\mathcal{L}) \frown B(\mathcal{L})) \tag{7}$$

假定によって $r_C = r_A + r_B$ であるから

$$\dim (A(\mathcal{L}) \frown B(\mathcal{L})) \leq 0 \tag{8}$$

即ち

$$A(\mathcal{L}) \frown B(\mathcal{L}) = 0 \tag{9}$$

依って(2)から $\dim (A(\mathcal{L}) \smile B(\mathcal{L})) = \dim (A(\mathcal{L})) + \dim (B(\mathcal{L}))$ だから假定から

$$\dim (A(\mathcal{L}) \smile B(\mathcal{L})) = \dim (C(\mathcal{L})) \tag{10}$$

従って(4)と(10)と(9)から(1)が出る。

(補助定理2) 二つのn次の行列A, Bに対して AB=BA=0 が成立する為の必要且つ充分な状件はA, Bをn次元ベクトル空間$\mathcal{L}$の一次変換と考へたとき,その固有空間A($\mathcal{L}$)とB($\mathcal{L}$)とが直交することである。

証明　A, B, の零点集合を夫々$\mathfrak{N}_A$ $\mathfrak{N}_B$とすれば

$$\mathcal{L} = A(\mathcal{L}) + \mathfrak{N}_A = B(\mathcal{L}) + \mathfrak{N}_B \tag{11}$$

であって$\mathfrak{N}_A$はA($\mathcal{L}$)と直交するベクトルの全体のなす部分空間であったのだから

$$B(\mathfrak{L}) \leqq \mathfrak{N}_A \tag{12}$$

依って
$$AB(\mathfrak{L}) \leqq A(\mathfrak{N}_A) = 0 \tag{13}$$

同様にして $A(\mathfrak{L}) \leqq \mathfrak{N}_B$ 従って $BA(\mathfrak{L}) = 0$ が出る。

逆に $AB = 0$ ならば，$\mathfrak{L}$ の任意のベクトル $\mathfrak{y}$ に対して

$$AB\mathfrak{y} = 0 \tag{14}$$

であるから

$$B\mathfrak{y} \in \mathfrak{N}_A$$

即ち

$$B(\mathfrak{L}) \leqq \mathfrak{N}_A \tag{15}$$

が出る。同様にして $BA = 0$ から $A(\mathfrak{L}) \leqq \mathfrak{N}_B$ が出る。

次の補助定理は鍋谷清治氏によって與へられたものである。

（補助定理３）　補助定理１と同一假定の下で，$C \equiv A + B$ が冪等ならば $AB = BA = 0$ で且つ A も B も亦冪等である。

証　明　C が冪等ならば，C の 0 でない固有値はすべて 1 である。従って，C はその固有空間 $C(\mathfrak{L})$ のすべてのベクトルを不変にする。所で補助定理１に依って A の固有ベクトル $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_{r_A}$，$B$ の固有ベクトルを $\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_{r_B}$ とするとき C の固有空間 $C(\mathfrak{L})$ は，$\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_{r_A}, \mathfrak{b}_1, \cdots \mathfrak{b}_{r_B}$ に依って張られるベクトル空間である。

今 A の 0 でない固有値 λ に対應する固有ベクトル $\mathfrak{a}$ を取れば

$$C\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \equiv A\mathfrak{a} + B\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + B\mathfrak{a} \tag{16}$$

$$B\mathfrak{a} = (1 - \lambda)\mathfrak{a} \tag{17}$$

(17) に於て若し $\lambda \neq 1$ ならば，$A(\mathfrak{L}) \frown B(\mathfrak{L}) = 0$ であることに矛盾するから

$$\lambda = 1, \quad B\mathfrak{a} = 0 \tag{18}$$

故に $A(\mathfrak{L})$ のすべてのベクトルは A で不変であって，B では 0 に写像される。これは A が冪等で，$BA = 0$ なることを示す。

同様にして B が冪等で，$AB = 0$ なることが云へる。

次の補助定理の証明は鍋谷清治氏による。

（補助定理4）　n 次の実対称行列 A，B の 0 でない固有値を夫々 $\alpha_1, \dots\dots \alpha_r$；$\beta_1, \dots\dots, \beta_s$（$r=r_A$，$s=r_B$ とおく）とし，A＋B の 0 でない固有値 $\phi_1, \dots\dots \phi_\delta$ の積が $\prod_{i=1}^{r}\alpha_i \cdot \prod_{j=1}^{s}\beta_j$ に等しく且 $r+s=\delta$ のときは

$$AB=0 \tag{19}$$

である。

証　明　　假定に依れば，A＋B の階数は A 及び B の階数の和であるから補助定理1に依って A＋B の固有空間は A 及び B の固有空間の直和である。

今 A の 0 でない固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ に対應する固有ベクトルを $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \dots\dots \mathfrak{a}_r$ とし，B の固有値 $\beta_1, \beta_2, \dots\dots \beta_s$ に対應する固有ベクトルを $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots \mathfrak{b}_s$ とし，之等は夫々では正規直交系をなす如く取っておけば，

$$\mathfrak{a}_1, \dots\dots, \mathfrak{a}_r, \quad \mathfrak{b}_1, \dots\dots, \mathfrak{b}_s \tag{20}$$

は，A＋B の固有空間の基底をなす。依って A＋B の固有空間の一つのベクトル $\mathfrak{y}$ を取ると，

$$\mathfrak{y}=x_1\mathfrak{a}_1+x_2\mathfrak{a}_2+\cdots\cdots+x_r\mathfrak{a}_r+y_1\mathfrak{b}_1+y_2\mathfrak{b}_2+\cdots\cdots+y_s\mathfrak{b}_s \tag{21}$$

であって，

$$(A+B)\mathfrak{y}=\sum_{\nu=1}^{r}x_\nu(A+B)\mathfrak{a}_\nu+\sum_{\mu=1}^{s}y_\mu(A+B)\mathfrak{b}_\mu \tag{22}$$

ところで

$$\begin{aligned}(A+B)\mathfrak{a}_\nu &= A\mathfrak{a}_\nu+B\mathfrak{a}_\nu\\ &=\alpha_\nu\mathfrak{a}_\nu+\beta_1\cdot(\mathfrak{a}_\nu\cdot\mathfrak{b}_1)\cdot\mathfrak{b}_1+\beta_2\cdot(\mathfrak{a}_\nu\cdot\mathfrak{b}_2)\cdot\mathfrak{b}_2+\cdots+\beta_s\cdot(\mathfrak{a}_\nu\cdot\mathfrak{b}_s)\cdot\mathfrak{b}_s\end{aligned} \tag{23}$$

$$\nu=1, 2, \dots\dots\dots, r$$

$$\begin{aligned}(A+B)\mathfrak{b}_\mu &= A\mathfrak{b}_\mu+B\mathfrak{b}_\mu\\ &=\alpha_1\cdot(\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_\mu)\cdot\mathfrak{a}_1+\alpha_2\cdot(\mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_\mu)\cdot\mathfrak{a}_2+\dots\dots+\alpha_r\cdot(\mathfrak{a}_r\cdot\mathfrak{b}_\mu)\cdot\mathfrak{a}_r+\beta_\mu\mathfrak{b}_\mu\end{aligned} \tag{24}$$

$$\mu=1, 2, \dots\dots\dots, s$$

となるから，（14）なる基底を用ひて，A＋B を表現すれば次の

如くなるであらう。

今　$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j) \equiv a_{ij}, \quad i=1,2,\cdots\cdots,r,\ j=1,2,\cdots\cdots,s$　(25)

とおくとき，

$$(A+B)\mathfrak{y} = \sum_{\nu=1}^{r} x'_\nu \mathfrak{a}_\nu + \sum_{\mu=1}^{s} y'_\mu \mathfrak{b}_\mu \tag{26}$$

とおくと，

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \alpha_1 x_1 \qquad\qquad + \alpha_1 a_{11} y_1 + \cdots\cdots + \alpha_1 a_{1s} y_s \\ \qquad\ddots \\ x'_r = \qquad\qquad \alpha_r x_r + \alpha_r a_{r1} y_1 + \cdots + \alpha_r a_{rs} y_s \\ y'_1 = \beta_1 a_{11} x_1 + \quad + \beta_1 a_{r1} x_r + \beta_1 y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ddots \\ y'_s = \beta_s a_{1s} x_1 + \quad + \beta_s a_{rs} x_r + \qquad\qquad \beta_s y_s \end{array}\right\} \tag{27}$$

或は又行列で書くと　A ＋ B　の固有空間では

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 a_{11} & \alpha_1 a_{12} & \cdots & \alpha_1 a_{1s} \\ 0\ \alpha_2 & \cdots & 0 & \alpha_2 a_{21} & \alpha_2 a_{22} & \cdots & \alpha_2 a_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0\ 0 & \cdots & \alpha_r & \alpha_r a_{r1} & \alpha_r a_{r2} & \cdots & \alpha_r a_{rs} \\ \beta_1 a_{11}\ \beta_1 a_{21} & \cdots & \beta_1 a_{r1} & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 a_{12}\ \beta_2 a_{22} & \cdots & \beta_2 a_{r2} & 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_s a_{1s}\ \beta_s a_{2s} & & \beta_s a_{rs} & 0 & 0 & & \beta_s \end{pmatrix} \tag{28}$$

となる。而して假定に依つて(28)の行列式の値は $\prod_{\nu=1}^{r}\alpha_\nu \prod_{\mu=1}^{s}\beta_\mu$ に等しい筈であるから次の式が成立つ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{2s} & \cdots & a_{rs} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{29}$$

(29)の左辺の行列式で，第1行にa_{11}を，第2行にa_{21}を，……，第r行にa_{r1}をかけて，第($r+1$)行から引き，次に第1行にa_{12}，第2行にa_{22}……，第r行にa_{r2}をかけて，第($r+2$)行から引き，……，最後に第1行にa_{1s}，第2行にa_{2s}……，第r行にa_{rs}をかけて，第($r+3$)行から引くと左下の矩形の各要素は0となるから

$$\begin{vmatrix} 1-\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu 1}^2 & -\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu 1}a_{\nu 2} & \cdots\cdots & -\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu 1}a_{\nu s} \\ -\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu 2}a_{\nu 1} & 1-\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu 2}^2 & \cdots\cdots & -\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu 2}a_{\nu s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ -\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu s}a_{\nu 1} & -\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu s}a_{\nu 2} & \cdots\cdots & 1-\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu s}^2 \end{vmatrix} = 1 \quad (30)$$

となる。

ところで今α_1，……，α_rにs個の一次独立なベクトルを附加へて

$$\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r,\ \alpha_{r+1}, \cdots\cdots, \alpha_{r+s} \qquad (31)$$

がA＋Bの固有空間の正規直交系をなす如く選ぶならば

$$(\alpha_\mu \cdot \beta_\nu) \equiv a_{\mu,\nu} \qquad \mu = 1, 2, \cdots, r+s, \quad \nu = 1, \cdots s \qquad (32)$$

とおいて次の関係式が成立つ。$\beta_1, \cdots \beta_s$は互に直交する如く取つてあるとする。

$$\sum_{\mu=1}^{r+s} a_{\mu\nu}^2 = 1, \qquad \nu = 1, 2 \cdots s \qquad (33)$$

$$\sum_{\mu=1}^{r+s} a_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu'} = 0 \qquad \nu \neq \nu' \qquad (34)$$

この関係式を用いて，(30)を書換へると次の如くなる。

$$\begin{vmatrix} \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu 1}^2 & \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu 1}a_{\mu 2} & \cdots\cdots & \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu 1}a_{\mu s} \\ \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu 2}a_{\mu 1} & \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu 2}^2 & \cdots\cdots & \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu 2}a_{\mu s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu s}a_{\mu 1} & \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu s}a_{\mu 2} & \cdots\cdots & \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu s}^2 \end{vmatrix} = 1 \qquad (35)$$

$$\begin{vmatrix} a_{r+11} & a_{r+21} & \cdots\cdots & a_{r+s1} \\ a_{r+12} & a_{r+22} & \cdots\cdots & a_{r+s2} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{r+1s} & a_{r+2s} & \cdots\cdots & a_{r+ss} \end{vmatrix}^2 = 1 \tag{36}$$

こゝで

$$\alpha_\nu^* = (a_{r+1\nu}\, a_{r+2\nu} \cdots\cdots a_{r+s\nu}), \quad \nu=1,2,\cdots,s \tag{37}$$

なるs個のベクトルを考へると，（36）から之等は一次独立であるから，$\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_s^*$ の張るs次元の空間に適当な正規直交系

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_2, \cdots\cdots, \vartheta_s \tag{38}$$

を取つて

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \vdots \\ \alpha_s^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_s \end{pmatrix} \tag{39}$$

と出来る（*Schmidt* の方法）。而して

$$\alpha_\nu^* = b_{\nu1}\vartheta_1 + b_{\nu2}\vartheta_2 + \cdots\cdots + b_{\nu\nu}\vartheta_\nu, \quad \nu=1,2,\cdots,s \tag{40}$$

であるから

$$(\alpha_\nu^*, \alpha_\nu^*) \equiv \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu\nu}^2 = \sum_{\mu=1}^{\nu} b_{\nu\mu}^2, \quad \nu=1,2,\cdots,s \tag{41}$$

（36）と（39）から

$$b_{11}^2\, b_{22}^2 \cdots\cdots b_{ss}^2 = 1 \tag{42}$$

又，$\sum_{\mu=1}^{\nu} b_{\nu\mu}^2 = \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu r}^2 \leqq 1$ であるから

$$b_{\nu\nu}^2 \leqq 1, \quad \nu=1,2,\cdots,s \tag{43}$$

依つて（42）から

$$b_{11}^2 = b_{22}^2 = \cdots\cdots = b_{ss}^2 = 1 \tag{44}$$

依つて（41）から

$$1 \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu} b_{\nu\mu}^2 = \sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu\nu}^2 \leqq 1, \quad \nu=1,2,\cdots s$$

であるから

$$\sum_{\mu=r+1}^{r+s} a_{\mu\nu}^2 = 1, \quad \nu=1,2,\cdots,s \tag{45}$$

然るに

$$\sum_{\mu=1}^{r+\cdots} a_{\mu\nu}^2 = 1\ ,\quad \nu=1,2,\cdots\cdots,s \tag{46}$$

而して $a_{\mu\nu}$ はすべて実数であるから

$$a_{\mu\nu}=0\ ,\ \mu=1,2,\cdots,r\ ,\ \nu=1,2,\cdots s \tag{47}$$

依って補助定理2から

$$AB=0$$

が証明されたことになる。

§2. 一変量正規母集團の場合の二次形式及双一次形式統計量の間の独立性

最初は簡單の為に考へる母集團は母平均0，母分散1の正規母集團 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ としておく。この母集團から抽出された大さnの任意標本を

$$\mathfrak{y}=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n) \tag{48}$$

とする。A及びBをn次の実対稱行列として次の様な二次形式統計量 θ_1，θ_2 を考へよう。

$$\theta_1=(\mathfrak{y}A,\mathfrak{y}),\quad \theta_2=(\mathfrak{y}B,\mathfrak{y}) \tag{49}$$

θ_1，θ_2 の同時及び單独の積率母函数を計算すると[10]

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda)&=|E-2\lambda A|^{-\frac{1}{2}}\\ \varphi_1(\mu)&=|E-2\mu B|^{-\frac{1}{2}}\\ \varphi(\lambda,\mu)&=|E-2\lambda A-2\mu B|^{-\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{50}$$

となる。従って θ_1 と θ_2 とが統計的に独立である為に必要且充分な條件は λ，μ の任意の実数値に対して

$$|E-2\lambda A||E-2\mu B|=|E-2\lambda A-2\mu B| \tag{51}$$

が成立つことである。

これが $AB=0$ と同値であることを云ふのが Craig，坂元，Hotelling の主張であるが，その証明は何れも誤りである。

§1 の補助定理4を用ひれば次の如く簡單である。

$AB=0$ ならば（51）の成立つことは明かであるから（51）か

ら $AB=0$ を云へばよい。（51）に於て $2\lambda=2\mu=\frac{1}{x}$ とおくと

$$|xE-A||xE-B|=x^n|xE-A-B| \tag{52}$$

となるから $A+B$ の 0 でない固有値は全体として A,B の 0 でない固有値と一致する。即ち，§1，補助定理4の條件を満たすから $AB=0$ である。

参考の為に Hotelling に依る証明を紹介して之を批判しよう。結局 λ,μ の任意の実数値に対して n 次の実対称行列 A,B につき

$$|E-\lambda A||E-\mu B|=|E-\lambda A-\mu B| \tag{53}$$

のとき $AB=0$ を云へばよい。

先づ A は対稱行列であるから適当な直交行列 P を取って

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

と出來このとき

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} F & G \\ G' & H \end{pmatrix} \tag{55}$$

とし，F,H は夫々 r 次，$(n-r)$ 次の正方対稱行列であって，G は $r\times(n-r)$ 型の矩形行列で，G' は G の転置行列である。

（53）が A,B に対して成立つならば

$$P^{-1}(E-\lambda A-\mu B)P=E-\lambda P^{-1}AP-\mu P^{-1}BP$$

$$P^{-1}(E-\lambda A)P=E-\lambda P^{-1}AP$$

$$P^{-1}(E-\mu B)P=E-\mu P^{-1}BP$$

であるから

$$|E-\lambda P^{-1}AP-\mu P^{-1}BP|=|E-\lambda P^{-1}AP||E-\mu P^{-1}BP| \tag{56}$$

が成立つ。依って直交行列 P で変換して

$$\theta_1=\alpha_1x_1^2+\cdots+\alpha_rx_r^2\equiv\left(y\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},y\right) \tag{57}$$

$$\theta_2=\left(y\begin{pmatrix} F & G \\ G' & H \end{pmatrix},y\right) \tag{58}$$

であると考へてよい。今

$$M_1 \equiv \begin{pmatrix} F & G \\ G' & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \tag{59}$$

として

$$\theta_2' = (y M_1, y), \quad \theta_2'' = (y M_2, y) \tag{60}$$

とすれば

$$\theta_2 = \theta_2' + \theta_2'' \tag{61}$$

假定によつてθ_1とθ_2は独立で，又θ_1とθ_2とは共通変数がないから，従つてθ_1と$\theta_2 - \theta_2'' = \theta_2'$とが独立であるとHotellingは云ふが，これは$\theta_1, \theta_2, \theta_2''$が互に独立でない場合には必ずしも成立しない。これがHotellingの証明の難点である。

θ_1とθ_2'とが独立ならば積率函数を計算して，λ，μの任意の実数値に対して

$$|E - \lambda P^{-1}AP - \mu M_1| = |E - \lambda P^{-1}AP||E - \mu M_1| \tag{62}$$

が成立つ。これを詳しくかくと

$$\begin{vmatrix} E_r - \lambda D - \mu F & -\mu G \\ -\mu G' & E_{n-r} \end{vmatrix} = \prod^{r} (1 - \lambda \alpha_i) \cdot |E - \mu M_1| \tag{63}$$

両辺のλの最高冪の係数を比較して

$$|E - \mu M_1| = 1 \tag{64}$$

$\mu \equiv \frac{1}{x}$　とおいて

$$|xE - M_1| = x^n \tag{65}$$

これはM_1の固有値がすべて0であることを示す。M_1は対稱行列であるから$Sp(M_1 M_1')$はM_1の要素の平方和であり，又一方M_1の固有値の平方和であるから$Sp(M_1 M_1') = 0$，依つて$M_1 = 0$

即ち

$$P^{-1}APP^{-1}BP = 0$$

$$P^{-1}ABP = 0$$

$$AB = 0$$

が証明されるのである。

以上述べたHotellingの証明は難点があるが，此のideaに従つて，次の如き証明が統計数理研究所所員菅原正巳氏に依

つて与へられた

この場合も一般性を失ふことなく

$$A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_r \end{pmatrix} \qquad (66)$$
$$B = (b_{ij})$$

として

$$|E-\lambda A||E-\mu B| = |E-\lambda A-\mu B| \qquad (67)$$

の両辺を入，μ の冪級数に展開して $\lambda^r\mu$，$\lambda^r\mu^2$ の係数を比較しようと云ふのである。

$$|E-\lambda A| = \prod_{\rho=1}^{r}(1-\lambda\alpha_\rho)$$

$$|E-\mu B| = \begin{vmatrix} 1-\mu b_{11} & -\mu b_{12} & \cdots & -\mu b_{1n} \\ -\mu b_{21} & 1-\mu b_{22} & \cdots & -\mu b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-\mu b_{n1} & -\mu b_{n2} & & 1-\mu b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= 1-\mu\left(\sum_{i=1}^{r} b_{ii}\right)+\mu^2\sum_{i>j} D_{ij}-\mu^3\sum_{i>j>k} D_{ijk}+\cdots\cdots \qquad (69)$$

但しこゝに

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ji} & b_{jj} \end{vmatrix}, \quad D_{ijk} = \begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ij} & b_{ik} \\ b_{ji} & b_{jj} & b_{jk} \\ b_{ki} & b_{kj} & b_{kk} \end{vmatrix} \cdots\cdots \qquad (70)$$

なる主座小行列式である。又

$$|E-\lambda A-\mu B| = \begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_1-\mu b_{11} & -\mu b_{12} & -\mu b_{1r} & -\mu b_{1r+1} & \cdots & -\mu b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -\mu b_{r1} & -\mu b_{r2} \cdots & 1-\lambda\alpha_r-\mu b_{rr} & -\mu b_{rr+1} & \cdots & -\mu b_{rn} \\ -\mu b_{r+1,1} & -\mu b_{r+12} \cdots & -\mu b_{r+1r} & -\mu b_{r+1r+1} & \cdots & -\mu b_{r+1n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ -\mu b_{n1} & -\mu b_{n2} \cdots & -\mu b_{nr} & -\mu b_{nr+1} & \cdots & 1-\mu b_{nn} \end{vmatrix} \qquad (71)$$

の $\lambda^r\mu$ の係数を考へると，それは

$$(-1)^{r+1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r\cdot\sum_{\lambda=r+1}^{r} b_{\lambda\lambda} \qquad (72)$$

で，$\lambda^r\mu^2$ の係数は

$$(-1)^r\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r\cdot\sum_{\lambda>\mu} D_{\lambda\mu} \qquad (73)$$

λ, μ は r+1 から n まで動く

である。これらと (68), (69) と比較して

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{\lambda=r+1}^{n} b_{\lambda\lambda} \tag{74}$$

$$\sum_{\lambda>\mu} D_{\lambda\mu} = \sum_{i>j} D_{ij} \tag{75}$$

(74) 及 (34) より

$$\sum_{e=1}^{r} b_{ee} = 0 \tag{76}$$

$$\sum_{e>m} D_{em} + \sum_{e,\lambda} D_{e\lambda} = 0 \tag{77}$$

但し e.m は 1 から r まで，λ は r+1 から n まで，ij は 1 から n まで動くものとする。(77) を書き直して

$$\sum_{e>m} (b_{ee} b_{mm} - b_{em}^2) + \sum_{e,\lambda} (b_{ee} b_{\lambda\lambda} - b_{e\lambda}^2) = 0 \tag{78}$$

(76) を平方して

$$\sum_{e=1}^{r} b_{ee}^2 + 2 \sum_{e>m} b_{ee} b_{mm} = 0 \tag{79}$$

依って

$$\sum_{e>m} b_{ee} b_{mm} = -\frac{1}{2} \sum_{e} b_{ee}^2 \tag{80}$$

(80) を (78) に代入して

$$-\frac{1}{2} \sum b_{ee}^2 - \sum_{e>m} b_{em}^2 + \sum_{\lambda} \left(\sum_{e} b_{ee} \right) b_{\lambda\lambda} - \sum_{e\cdot\lambda} b_{e\lambda}^2 = 0 \tag{81}$$

(76) を用ひて

$$-\frac{1}{2} \sum b_{ee}^2 - \sum_{e>m} b_{em}^2 - \sum_{e\cdot\lambda} b_{e\lambda}^2 = 0 \tag{82}$$

b_{ij} はすべて実数であったのだから

$$b_{ee} = b_{em} = b_{e\lambda} = 0 \tag{83}$$

依って

$$B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right] \tag{84}$$

の形となるから AB = 0 が証明されたことになる。

次に A.T. Craig[12] は二変数正規~~母~~集團

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)} dx\,dy \tag{85}$$

から取られた大さnの任意標本

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), -----, (x_n, y_n) \tag{86}$$

を考へて，ベクトル記号で

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, ----, x_n),\quad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, ----, y_n) \tag{87}$$

A及びBをn次の実対稱行列として

$$\theta_1 = (\mathfrak{x} A', \mathfrak{y}),\quad \theta_2 = (\mathfrak{x} B', \mathfrak{y}) \tag{88}$$

なる二つの双一次形式統計量を考へて，その独立性を問題とした。このときも~~積率母函~~數を計算して

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1) &= |E - 2\rho t_1 A - (1-\rho^2) t_1^2 A^2|^{-\frac{1}{2}} \\ \varphi_2(t_2) &= |E - 2\rho t_2 B - (1-\rho^2) t_2^2 B^2|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{89}$$

$$\varphi(t_1, t_2) = |E - 2\rho(t_1 A + t_2 B) - (1-\rho^2)(t_1 A + t_2 B)^2|^{-\frac{1}{2}}$$

となるから，θ_1とθ_2が独立なる為の必要且充分條件は，t_1, t_2のすべての実数値に対して次の関係式の成立つことである。

$$\begin{aligned} &|E - 2\rho(t_1 A + t_2 B) - (1-\rho^2)(t_1 A + t_2 B)^2| \\ &= |E - 2\rho t_1 A - (1-\rho^2) t_1^2 A^2|\,|E - 2\rho t_2 B - (1-\rho^2) t_2^2 B^2| \end{aligned} \tag{90}$$

Craigの論文の要点は（85）と$AB=0$とが等値であると云ふ主張である。これを証明する為めに，Craigは坂元氏が註（5）の論文で用ひられた方法を嚴密にして用ひてゐるが，この場合にも，§1.補助定理3を用ひれば簡単に出るものである。尤もこれは§4.に於てもつと一般的な定理のexampleとして示されるであらう。

先づ吾々の立場から（90）と$AB=0$の同値であることを云はう。$AB=0$ならば（90）の成立つことは明かであるから，（90）から$AB=0$の出ることを云へばよい。A, B及びA+Bの階数を夫々r_1, r_2及びrとすれば，勿論$r \leqq r_1 + r_2$である。これら行列の0でない固有値を夫々$\alpha_1, ----, \alpha_{r_1}, \beta_1, ----, \beta_{r_2}$及び$\gamma_1, ----, \gamma_r$とすれば（90）は次の如く書ける。

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{r} (1 - t(\rho+1)\gamma_i)(1 - t(\rho-1)\gamma_i) \\ &= \prod_{i=1}^{r_1} (1 - t(\rho+1)\alpha_i)(1 - t(\rho-1)\alpha_i) \prod_{j=1}^{r_2} (1 - t(\rho+1)\beta_j)(1 - t(\rho-1)\beta_j) \end{aligned} \tag{91}$$

$t_1 = t_2 = t$ としてある．両辺の t の次数を比較して

$$r = r_1 + r_2 \tag{92}$$

又，以上の議論は $-1 \leqq \rho \leqq 1$ なる任意の ρ の値に対して成立つべきであるから，初めから $\rho \neq \pm 1$ と考へておけばA+Bの0でない固有値 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_r$ に対しては，$\prod_{i=1}^{r}\varphi_i = \prod_{i=1}^{r_1}\alpha_i \cdot \prod_{j=1}^{r_2}\beta_j$ となる．依つて §1. 補助定理4 に依つて AB=0 である。

次に Craig の証明を紹介しよう。(90) 式で $t_2 = vt_1$ とし，v は実数とする。然るときは，

$$\begin{aligned}&|E-2\rho t_1(A+vB)-(1-\rho^2)t_1^2(A+vB)^2|\\&=|E-2\rho t_1A-(1-\rho^2)t_1^2A^2||E-2\rho t_1vB-(1-\rho^2)t_1^2v^2B^2|\end{aligned} \tag{93}$$

今 $A+vB$ の階数を r'，零でない固有値を $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r'}$ とすれば (93) は

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{r'}(1-t_1(\rho+1)\delta_i)(1-t_1(\rho-1)\delta_i)\\&=\prod_{i=1}^{r_1}(1-t_1(\rho+1)\alpha_i)(1-t_1(\rho-1)\alpha_i)\prod_{i=1}^{r_2}(1-t_1(\rho+1)v\beta_i)(1-t_1(\rho-1)v\beta_i)\end{aligned} \tag{94}$$

となつて，t_1 の次数を比較して $r' = r_1 + r_2$，且つ又 $\delta_1, \cdots\cdots, \delta_{r'}$ は全体として，$\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_{r_1}, v\beta_1, \cdots\cdots, v\beta_{r_2}$ と一致することが分る。

さて実変数 v の実係数多項式をその要点とする対称行列 $M(v)$ に於て

$$|\lambda E - M(v)| = (\lambda - p_1(v))(\lambda - p_2(v))\cdots\cdots(\lambda - p_n(v)) \tag{95}$$

となつて，こゝに $p_1(v), \cdots\cdots, p_n(v)$ は v の実係数多項式であるならば，v のすべての実数値に対して実数値を取る直交行列 $L(v)$ があつて

$$L'(v)M(v)L(v) = \begin{pmatrix} p_1(v) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2(v) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n(v) \end{pmatrix} \tag{96}$$

なり，更に v のすべての実数値に対して $\dfrac{dL(v)}{dv}$ が存在する。に関して Craig は脚註で N.H. McCoy が次の事実を証明したと述べてゐる。即ち (95) の $p_1(v), \cdots\cdots, p_n(v)$ がすべて実多項

式である場合には、$L(v)$の要素は，あるvの実多項式を実多項式の正の平方根で割ったものであつて，根号の内の多項式はvのすべての実数値に対して負にも0にもならない。この証明は筆者には，今の所分らないが相当面倒なものゝやうに思へる。

以上の事柄を承認するとすれば

$$|\lambda E-A-vB| = \lambda^{n-(r_1+r_2)}(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_{r_1})(\lambda-v\beta_1)\cdots(\lambda-v\beta_{r_2}) \qquad (97)$$

であるから，行列 $A+v$ Bは上記の$M(v)$の性質を有するから，上記の如き直交行列$L(v)$があつて

$$L'(v)(A+vB)L(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_{r_1} & & & & \\ & & & v\beta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & v\beta_{r_2} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (98)$$

$v=0$ とすれば

$$L'(0)AL(0) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_{r_1} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (99)$$

次には (97) をvで微分して$v=0$とおいて

$$\frac{dL'(0)}{dv}AL(0)+L'(0)BL(0)+L'(0)A\frac{dL(0)}{dv} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \beta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \beta_{r_2} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (100)$$

$L'(v)L(v)=E$ を vで微分して，$v=0$ とおくと

$$\frac{dL'(0)}{dv}L(0)+L'(0)\frac{dL(0)}{dv} = 0 \qquad (101)$$

であるから

$$L'(0)\frac{dL(0)}{dv} = S \quad \text{とおくと}, \quad S' = -S \quad \text{であつて}$$

$$\frac{dL'(0)}{dv} = -L'(0)\frac{dL(0)}{dv}L'(0) = -SL'(0) \tag{102}$$

これから

$$\frac{dL(0)}{dv} = -L(0)\frac{dL'(0)}{dv}L(0) = L(0)S \tag{103}$$

(102)に右から $AL(0)$ をかけ (103)に左から $L'(0)A$ をかけると

$$\frac{dL'(0)}{dv}AL(0) = -SL'(0)AL(0) \tag{104}$$

$$L'(0)A\frac{dL(0)}{dv} = L'(0)AL(0)S \tag{105}$$

であるから，(104)(105)を(100)に代入して

$$L'(0)BL(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \beta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \beta_{r_2} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} + SL'(0)AL(0) - L'(0)AL(0)S \tag{106}$$

Sは歪対称行列で，$L'(0)AL(0)$ は(99)で與へられてゐるから，実際かけ算を行って見れば分る通り $L'(0)AL(0)S$ 及び $SL'(0)AL(0)$ の主対角線上の要素はすべて0であるから(106)から $L'(0)BL(0)$ は次の如くなる。

$$L'(0)BL(0) = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & & & & & & & k_{1n} \\ k_1 & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \beta_1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \beta_{r_2} & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ k_{1n} & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{107}$$

の形である。ところで $L'(0)BL(0)$ の零でない固有値が $\beta_1, \cdots, \beta_{r_2}$ なのであるから

$$|xE - L'(0)BL(0)| = \begin{vmatrix} x & -k_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ -k_{21} & x & & & & \\ \vdots & & x-\beta_1 & & & \\ \vdots & & & x-\beta_{r_2} & & \\ \vdots & & & & x & \\ -k_{n1} & & & & & x \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-r_1}(x-\beta_1)\cdots\cdots(x-\beta_{r_2}) \tag{108}$$

この両辺の x^{n-2} の係数を比較して

$$\sum_{i<j}\beta_i\beta_j = \sum_{i<j}\beta_i\beta_j - \sum k_{ij}^2 \tag{109}$$

これから

$$k_{ij} = 0 \tag{110}$$

故に

$$L'(0)AL(0)L'(0)BL(0) = L'(0)ABL(0) = 0$$

$$AB = 0$$

となる。

更に又 A.T. Craig は同じ論文で次のやうな場合を考察している。即ち

$$\theta_1 = \sum a_{ij}x_iy_j, \quad \theta_2 = \sum b_{ij}x_ix_j \tag{111}$$

なる双一次形式統計量と二次形式統計量を考へて　それらの積率母函数を計算して，θ_1 と θ_2 の独立性は次の関係式が t_1, t_2 のすべての実数値に対して成立つことゝ等値であることを示した。

$$|E - 2\rho t_1A - (1-\rho^2)t_1^2A^2 - 2t_2B|$$
$$= |E - 2\rho t_1A - (1-\rho^2)t_1^2A^2||E - 2t_2B| \tag{112}$$

前と同様にして $t_1 = 1$，$t_2 = v$ とおくと (112) は次の如く書改められる。

$$|E - 2\rho A - (1-\rho^2)A^2 - 2vB|$$
$$= |E - 2\rho A - (1-\rho^2)A^2||E - 2vB|$$
$$= \prod_{j=1}^{r_1}(1-(\rho-1)\alpha_j)(1-(\rho+1)) \tag{113}$$

今 $C \equiv 2\rho A + (1-\rho^2)A^2$ とおくとき，A の零でない固有値 α に

関して $2\rho+(1-\rho^2)\alpha=0$ とならない限り，$C+2vB$ の零でない固有値は全体として C 及び B の零でない固有値と一致する。

依って Craig 流に McCoy の証明した事実を認めるならば適当な直交行列 $L(v)$ を取って

$$L'(0)CL(0)L'(0)2BL(0)=0 \tag{114}$$

$$(2\rho+(1-\rho^2)A)AB=0 \tag{115}$$

上に述べた條件から $|2\rho+(1-\rho^2)A|\neq 0$ であるから

$$AB=0 \tag{116}$$

これも §1 の補助定理4を用ひるならば

$$(2\rho A+(1-\rho^2)A^2)\cdot 2vB=0 \tag{117}$$

これから上と同様にして

$$AB=0$$

が結論される。

§3. Cochran の定理[13]及び其証明

簡単の為に考へる正規母集團の母平均 0，母分散は 1 であるとする。即ち密度函数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{118}$$

で與へられるものとする。この母集團から抽出された大さ n の任意標本を

$$\mathfrak{x}=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n) \tag{119}$$

なるベクトルで表はし，この任意標本の二次形式として表はされる s 個の統計量 $q_1,q_2,\cdots\cdots,q_s$

$$q_v=(\mathfrak{x}A_v,\mathfrak{x}),\quad v=1,2,\cdots\cdots,s \tag{120}$$

を考察の対象とする。q_v の階数即ち A_v の階数を r_v とする。

このとき Cochran の定理と云ふのは次の如きものである。

Cochran の定理

$q_1,q_2,\cdots\cdots,q_s$ の間に

$$q_1+q_2+\cdots\cdots+q_s=x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2 \tag{121}$$

が成立つとき，$q_1, q_2, \cdots\cdots, q_s$が互に独立なる為の必要且充分な條件は

$$r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_s = n \tag{122}$$

なることであって，このときは q_ν, $\nu=1,2,\cdots\cdots,s$ は夫々自由度 r_ν, $\nu=1,2,\cdots\cdots,s$ の χ^2— 分布をなす。

この定理の証明も §2 の *idea* に従って次の如く透明になる。

Cochran の定理の証明

（121）式を行列で書けば

$$A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_s = E \tag{123}$$

であって，若し q_μ と q_ν が $\mu \neq \nu$ のとき互に独立ならば §2 の議論によって $A_\mu A_\nu = 0$, $\mu \neq \nu$, $\mu=\nu=1,2,\cdots\cdots,s$ であるから（123）より

$$r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_s = n$$

となる。而してこのときは

$$(A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_s)\cdot A_\mu = A_\mu \tag{124}$$

より

$$A_\mu^2 = A_\mu, \quad \mu = 1, 2, \cdots\cdots, s \tag{125}$$

となることが分る。

ところで $q_\mu = (yA_\mu \cdot y)$ の積率母函数は

$$\varphi(t) = |E - 2tA_\mu|^{-\frac{1}{2}} \tag{126}$$

であって，A_μ の零でない固有値を $\alpha_{\mu 1}, \cdots\cdots, \alpha_{\mu r_\mu}$ とすれば

$$\varphi(t) = [(1-2t\alpha_{\mu 1})(1-2t\alpha_{\mu 2})\cdots\cdots(1-2t\alpha_{\mu r_\mu})]^{-\frac{1}{2}} \tag{127}$$

となるから，q_μ が χ^2—分布をする為の必要且充分な條件は

$$\alpha_{\mu 1} = \alpha_{\mu 2} = \cdots\cdots = \alpha_{\mu r_\mu} = 1^{(14)} \tag{128}$$

なことであって，このときは

$$\varphi(t) = (1-2t)^{-\frac{r_\mu}{2}} \tag{129}$$

となるから，q_μ の自由度は r_μ である。

このことを行列の言葉で云換へること，A_μ が冪等と云ふことであるから，（125）に依って q_μ は，自由度 r_μ の χ^2— 分布に従ふのである。（$\mu=1, 2, \cdots\cdots, s$）

逆に (121) の関係を満す s 個の統計量 $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_s$ に対して (122) が成立つとき，これらは互に独立であって，且つ q_μ $\mu=1,2,\cdots\cdots,s$ は夫々自由度 r_μ. $\mu=1,2,\cdots\cdots,s$ の χ^2— 分布に従ふことを証明するに帰納法を用ひる。[15]

先づ $s=2$ のときは（123）に依って $A_1+A_2=E$ は勿論冪等であるから §1 補助定理3に依って

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0 \tag{130}$$

依って §2 の議論によって q_1, q_2 は互に独立である。又

$$E = A_1+A_2 = (A_1+A_2)^2 = A_1^2 + A_2^2 \tag{131}$$

A_1, A_2 を実数体の上の n 次元ベクトル空間 $\mathfrak{L}$ の一次変換と考へると（131）から $\mathfrak{L}$ の任意のベクトル y に対して

$$A_1 y + A_2 y = A_1^2 y + A_2^2 y$$

書直して

$$A_1(y - A_1 y) = -A_2(y - A_2 y) \tag{132}$$

であるから §1 補助定理1から $A_1(\mathfrak{L}) \frown A_2(\mathfrak{L}) = 0$ であるから

$$A_1(y - A_1 y) = 0, \quad A_2(y - A_2 y) = 0$$

即ち

$$A_1 = A_1^2, \quad A_2 = A_2^2 \tag{133}$$

即ち A_1, A_2 の冪等性が出る。これで $s=2$ の場合はすべて証明出来たのである。

次に $s-1$ 迄は定理は証明されたとする。

$$A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_{s-1} + A_s = E \tag{134}$$

$B \equiv A_1 + \cdots\cdots + A_{s-1}$ として B の階数を r' とすれば，假定から

$$r' \leqq r_1 + \cdots\cdots + r_{s-1} = n - r_s \tag{135}$$

又，$B + A_s = E$ なることから

$$n \leq r' + r_s \qquad (136)$$

(125) と (126) とから

$$n = r' + r_s \qquad (137)$$

従って

$$r' = r_1 + \cdots\cdots + r_{s-1} \qquad (138)$$

故に (137) から $s=2$ の場合の議論を $B + A_s = E$ に適用して，

$$BA_s = 0 \qquad (139)$$

$$B^2 = B, \quad A_s^2 = A_s \qquad (140)$$

が出る。(140) の $B^2 = B$ から帰納法の假定によって

$$A_\mu^2 = A_\mu, \quad \mu = 1, 2, \cdots\cdots, s-1 \qquad (141)$$

$$A_\mu A_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, \cdots\cdots, s-1 \qquad (142)$$

が出る。依って (139) の左から A_μ をかけて $\mu = 1, 2, \cdots, s-1$ に対して

$$(A_\mu A_1 + \cdots\cdots + A_\mu^2 + \cdots\cdots + A_\mu A_{s-1}) A_s = 0 \qquad (143)$$

$$\mu = 1, 2, \cdots\cdots, s-1$$

$$A_\mu A_s = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots\cdots, s-1 \qquad (144)$$

が出る。

依って §2 の議論によって q_μ, $\mu = 1, 2, \cdots\cdots, s-1$ と q_s とは互に独立であって，q_s は自由度 r_s の χ^2-分布に従ふことが分る。

これで Cochran の定理は完全に証明されたことになる。

§4　多変数正規母集團の場合の二次形式統計量の独立性

次に，本§では多変数正規母集團の場合に §2 と同じことを考へよう。これは行列の立場では Kronecker の積を用ひればよいのである。

今 k 変数正規母集團の母平均 0, 母分散行列 V とすれば，同時分布の密度は

$$(2\pi)^{-\frac{k}{2}} |V|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{x} V^{-1} \mathfrak{x}')} \qquad (145)$$

但しこゝに

$$\mathfrak{y} = (x_1, \text{--------}, x_k) \tag{146}$$

で與へられることになる。

そこで，A.C. Aitken(16)がなした如く，この母集團から抽出された大さnの任意標本を一行に並べて

$$\mathfrak{X} = (x_{11}, x_{21}, \text{-----}, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \text{----}, x_{n2}, \text{----}, x_{1k}, x_{2k}, \text{---}, x_{nk}) \tag{147}$$

とする。そこで此等 nk 個の $x_{\mu\nu}$, $\mu = 1, 2, \text{---} n$; $\nu = 1, 2, \text{---}, k$ の二次形式統計量 $\theta = (\mathfrak{X} A, \mathfrak{X})$ を考へてその積率母函数 $\varphi(t)$ を計算しよう。

$$\varphi(t) = E(e^{t\theta})$$
$$= (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} |V|^{-\frac{r}{2}} \underbrace{\int \text{---} \int}_{n} e^{-\frac{1}{2}\left[\sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{y}_\nu V^{-1}, \mathfrak{y}_\nu) - 2t(\mathfrak{X} A, \mathfrak{X})\right]} d\mathfrak{y}_1 \text{---} d\mathfrak{y}_n \tag{148}$$

但し $d\mathfrak{y}_\nu = dx_{\nu 1} dx_{\nu 2} \text{-----} dx_{\nu k}$, $\nu = 1, 2, \text{-----}, n$ とする。適当な直交行列 P を取って

$$\mathfrak{y}_\nu^* = \mathfrak{y}_\nu P \qquad \nu = 1, 2, \text{------}, n \tag{149}$$

なる変換に依って V^{-1} は対角線形になるとする。

$$P' V^{-1} P = D \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix} \tag{150}$$

とすれば

$$(\mathfrak{y}_\nu V^{-1} \mathfrak{y}_\nu) = (\mathfrak{y}_\nu^* P' V^{-1} P, \mathfrak{y}_\nu^*) = \lambda_1 x_{\nu 1}^{*2} + \text{----} + \lambda_k x_{\nu k}^{*2} \qquad \nu = 1, 2, \text{---} n \tag{151}$$

となるであらう。$\lambda_1, \lambda_2, \text{-----}, \lambda_k$ は V^{-1} の固有値であって V^{-1} は正値行列であるから，λ_ν はすべて正である。

変換 $\mathfrak{y}_\nu^* = \mathfrak{y} P$ に依って A なる行列は如何に変換されるかを考へよう。今 $P = (p_{ij})$ とすれば

$$x_{\nu i}^* = p_{1i} x_{\nu 1} + p_{2i} x_{\nu 2} + \text{------} + p_{ki} x_{\nu k} \tag{152}$$
$$\nu = 1, 2, \text{---}, n, \quad i = 1, 2, \text{----}, k$$

であるから $\mathfrak{X}$ なるベクトルの成分の間の変換式を詳しくかけば次の如くなる。

$$
\left.\begin{array}{llll}
x_{11}^{*} = p_{11}x_{11} & + p_{21}x_{12} & + \cdots\cdots + p_{k1}x_{1k} & \\
x_{21}^{*} = \quad p_{11}x_{21} & + p_{21}x_{22} & + p_{k1}x_{2k} & \\
\cdots\cdots & & & \\
x_{n1}^{*} = \qquad p_{11}x_{n1} & + p_{21}x_{n2} & + p_{k1}x_{nk} & \\
x_{12}^{*} = p_{12}x_{11} & + p_{22}x_{12} & + p_{k2}x_{1k} & \\
\cdots\cdots & & & \\
x_{n2}^{*} = \qquad p_{12}x_{n1} & + p_{22}x_{n2} & + p_{k2}x_{nk} & \\
\cdots\cdots & & & \\
x_{1k}^{*} = p_{1k}x_{11} & + p_{2k}x_{12} & + p_{kk}x_{1k} & \\
\cdots\cdots & & & \\
x_{nk}^{*} = \qquad p_{1k}x_{n1} & + p_{2k}x_{n2} & + p_{kk}x_{nk} &
\end{array}\right\} \tag{153}
$$

従って，$\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{X}^{*}$ との間の変換行列は

$$
\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11}E & \cdots\cdots & p_{1k}E \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ p_{k1}E & \cdots\cdots & p_{kk}E \end{bmatrix} = P \times E \tag{154}
$$

(Kroneckerの積)

であって，

$$
\mathfrak{X}^{*} = \mathfrak{X}\,\mathbb{P} \tag{155}
$$

となる。*Jacobian* は

$$
\left| \frac{\partial(\mathfrak{X})}{\partial(\mathfrak{X}^{*})} \right| = \left| \det \mathbb{P}' \right| = \left| (\det P')^{n} \right| = 1 \tag{156}
$$

となるから (148) は次の如くなる

$$
\varphi(t) = (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} |V|^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int\cdots\int}_{n} e^{-\frac{1}{2}\left(\lambda_1 \sum_{v=1}^{n} x_{v1}^{*2} + \cdots + \lambda_k \sum_{v=1}^{n} x_{vk}^{*2} - 2t(\mathfrak{x}^{*}\mathbb{P}'A\mathbb{P}\mathfrak{x}^{*}\right)} dy_1^{*} \cdots dy_n^{*} \tag{157}
$$

こゝで

$$
\mathbb{D} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 E & & & \\ & \lambda_2 E & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k E \end{bmatrix} = D \times E \tag{158}
$$

とおくと（157）は

$$\varphi(t)=(2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|V|^{-\frac{n}{2}}\underbrace{\int\cdots\int}_{n} e^{-\frac{1}{2}\{(x^{*}\mathbb{D},x^{*})-2t(x^{*}P'AP,x^{*})\}}\cdot dy_1^{*}\cdots dy_n^{*} \tag{159}$$

となる。こゝで $D=Q^2$ とし，$\mathbb{Q}=Q\times E$ (160)

とおいて

$$y_\nu = y_\nu^{*}Q, \qquad \nu=1,2,\cdots\cdots,n \tag{161}$$

$$\mathcal{Y} = x^{*}\mathbb{Q} \tag{162}$$

なる変換をすれば，（149）の e の肩は

$$-\frac{1}{2}\{(\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{D},\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1})-2t(\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}P'AP,\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1})\}$$

$$=-\frac{1}{2}\{(\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{Q}'^{-1},\mathcal{Y})-2t(\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}P'APQ'^{-1},\mathcal{Y})\} \tag{163}$$

となり

$$\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{Q}'^{-1}=E \tag{164}$$

で又 Jacobian は

$$\left|\frac{\partial(x^{*})}{\partial(\mathcal{Y})}\right|=\left|\det\mathbb{Q}^{-1}\right|=\left|\det.\mathbb{D}\right|^{-\frac{n}{2}}=\left|\det V\right|^{\frac{n}{2}} \tag{165}$$

となることに注意すれば

$$\varphi(t)=(2\pi)^{-\frac{nk}{2}}\underbrace{\int\cdots\int}_{n} e^{-\frac{1}{2}\{(\mathcal{Y},\mathcal{Y})-2t(\mathcal{Y}\mathbb{Q}^{-1}P'APQ'^{-1},\mathcal{Y})\}}d\mathcal{Y} \tag{166}$$

となるから、§2 と同様の計算で

$$\varphi(t)=|E-2tA^{*}|^{-\frac{1}{2}} \tag{167}$$

但し

$$A^{*}=\mathbb{Q}^{-1}P'APQ'^{-1} \tag{168}$$

であることが分る。故に §2 の場合と同様に論じて，θ が χ^2－分布に従ふ為の必要且充分條件は

$$A^{*2}=A^{*} \tag{169}$$

（168）式を用ひて（169）を書改めると

$$\mathbb{Q}^{-1}P'AP'^{-1}\mathbb{Q}^{-1}P'APQ'^{-1}=\mathbb{Q}^{-1}P'APQ'^{-1} \tag{170}$$

而して，

$$\mathbb{P}\mathbb{Q}'^{-1}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}' = (P\times E)(Q^{-1}\times E)\cdot(P'\times E)$$
$$= (PD^{-1}P'\times E) = V\times E = \mathbb{V} \qquad (171)$$

であるから（169）の條件は

$$\mathbb{A}\mathbb{V}\mathbb{A} = \mathbb{A}^{(17)} \qquad (172)$$

となる。このとき θ の自由度は $\mathbb{A}$ の階数である。

二つの二次形式統計量

$$\theta_1 = (\mathfrak{X}\mathbb{A}, \mathfrak{X}), \quad \theta_2 = (\mathfrak{X}\mathbb{B}, \mathfrak{X}) \qquad (173)$$

の独立性に関しては §2 の場合と全く同様にして

$$\mathbb{A}^*\mathbb{B}^* = 0 \qquad (174)$$

を得るが，(168) を用ひて書き直して

$$\mathbb{A}\mathbb{V}\mathbb{B} = 0^{(18)} \qquad (175)$$

を得る。これが独立性の完全條件である。

§ 5. 一次形式統計量及び，一次形式統計量と二次形式統計量の間の独立性

初めには，母平均 0，母分散 1 の正規母集團を考へ，これから抽出された大さ n の任意標本 $\mathfrak{y} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の一次形式として表はされる統計量 $L(\mathfrak{y}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = (\mathfrak{a}, \mathfrak{y})$ を考へて，これの積率母函数を計算すれば

$$\varphi(t) = E(e^{Lt}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n} \exp.-\frac{1}{2}\left((\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{y}) - 2tL(\mathfrak{y})\right)d\mathfrak{y}$$
$$= \exp.\frac{1}{2}\|t\mathfrak{a}\|^2 \qquad (176)$$

他にもう一つの一次形式統計量 $M(\mathfrak{y}) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_r = (\mathfrak{b}, \mathfrak{y})$ を考へて，$L(\mathfrak{y})$ と $M(\mathfrak{y})$ の同時分布の積率母函数を計算すると

$$\varphi(t_1, t_2) = E(e^{t_1L + t_2M})$$
$$= \exp.\frac{1}{2}\|t_1\mathfrak{a} + t_2\mathfrak{b}\|^2 \qquad (177)$$

従って，$L(\mathfrak{y})$ と $M(\mathfrak{y})$ との独立性の完全條件は

$$\| t_1 \mathfrak{a} + t_2 \mathfrak{b} \|^2 = \| t_1 \mathfrak{a} \|^2 + \| t_2 \mathfrak{b} \|^2 \qquad (178)$$

がt_1, t_2のすべての実数値に対して成立つことであって,それは

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0 \qquad (179)$$

と等値である。

次には母平均0, 母分散行列Vなるk変数正規母集團から抽出された大さnの任意標本

$$\mathfrak{X} = (x_{11} \cdots x_{n1}\ x_{12} \cdots x_{n2} \cdots x_{1k} \cdots x_{nk})$$

の一次形式として表はされる二つの統計量

$$\mathbb{L}(\mathfrak{X}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{X}),\quad \mathbb{M}(\mathfrak{X}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{X}) \qquad (180)$$

の間の独立性を考へよう。このときも積率母函数を計算する。

$\mathbb{L}(\mathfrak{X})$と$\mathbb{M}(\mathfrak{X})$の同時分布の積率母函数は

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2) &= E\left(e^{t_1 \mathbb{L}(\mathfrak{X}) + t_2 \mathbb{M}(\mathfrak{X})}\right)\\ &= (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} |V|^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int \cdots \int}_{n} e^{-\frac{1}{2}\{(\mathfrak{X} V, \mathfrak{X}) - 2(t_1 \mathbb{L}(\mathfrak{X}) + t_2 \mathbb{M}(\mathfrak{X}))\}} d\mathfrak{X}\end{aligned} \qquad (181)$$

但し　$d\mathfrak{X} = dx_{11} \cdots dx_{n1}\, dx_{12} \cdots dx_{n2} \cdots dx_{1k} \cdots dx_{nk}$ とする。

§4 の場合と同様な $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ なる行列を取って

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{X} \mathbb{P} \mathbb{Q} \qquad (182)$$

なる変換で積分変数をかへる。Jacobian は

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial(\mathfrak{y})}{\partial(\mathfrak{X})} \right| &= |\det \mathbb{P} \cdot \det \mathbb{Q}| = |\det \mathbb{Q}|^n\\ &= |\det . V|^{-\frac{n}{2}}\end{aligned} \qquad (183)$$

なることから

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2) &= (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} \underbrace{\int \cdots \int}_{nk} e^{-\frac{1}{2}\{(\mathfrak{y}\ \mathfrak{y}) - 2t_1 \mathfrak{a}(\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}')' \mathfrak{y}' - 2t_2 \mathfrak{b}(\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}')'\mathfrak{y}'\}} d\mathfrak{y}\\ &= \exp . \tfrac{1}{2} \| t_1 \mathfrak{a} \cdot \mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1} + t_2 \mathbb{B} \cdot \mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1} \|^2\end{aligned} \qquad (184)$$

又一方 $\mathbb{L}(\mathfrak{X}), \mathbb{M}(\mathfrak{X})$ の夫々の積率母函数は

$$\begin{aligned}\varphi(t_1) &= \exp . \tfrac{1}{2} \| t_1 \mathfrak{a} \cdot \mathbb{P} \mathbb{Q}^{-1} \|^2\\ \varphi(t_2) &= \exp . \tfrac{1}{2} \| t_2 \mathfrak{b}\ \mathbb{P} \mathbb{Q}^{-1} \|^2\end{aligned} \qquad (185)$$

であるから $\mathbb{L}(\mathfrak{X})$ と $\mathbb{M}(\mathfrak{X})$ の独立性の完全條件は

$$\| t_1 \mathbb{a} \mathbb{P} Q^{-1} \|^2 + \| t_2 \mathbb{b} \mathbb{P} Q^{-1} \|^2$$
$$= \| t_1 \mathbb{a} \mathbb{P} Q^{-1} + t_2 \mathbb{b} \mathbb{P} Q^{-1} \|^2 \qquad (186)$$

がすべての t_1, t_2 の実数値に対して成立つことであつてそれは

$$(\mathbb{a} \mathbb{P} Q^{-1}, \mathbb{b} \mathbb{P} Q^{-1}) = 0 \qquad (187)$$

と等値である。これを行列のかけ算にかくと

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{P} Q^{-1} Q^{-1} \mathbb{P}' \mathbb{b}' = 0$$

$P'V^{-1}P = D,\ Q^2 = D$ であったのだから

$$P'V^{-1}P = Q^2$$

これから $\qquad V = PQ^{-2}P'$ であるから

$$\mathbb{P} Q^{-2} \mathbb{P}' = \mathbb{V} \qquad (188)$$

従って（187）は

$$\mathbb{a} \mathbb{V} \mathbb{b}' = 0 \qquad (189)$$

となる。

一次形式と二次形式の間の独立性は坂元[19], Kac[20] に従って一次形式を平方して二次形式として論ずればよい。即ち

$$Q = (\mathbb{x} \mathbb{A}, \mathbb{x}) \qquad \mathbb{L}(\mathbb{x}) = \mathbb{a} \mathbb{x}'$$

の間の独立性には

$$\mathbb{L}^2 = (\mathbb{a} \cdot \mathbb{x}')^2 = (\mathbb{x} \mathbb{a} \mathbb{a}, \mathbb{x})$$

と Q が独立でなければならないから §4 から

$$\mathbb{A} \mathbb{V} \mathbb{a} \mathbb{a} = 0 \qquad (190)$$

これから $\mathbb{a} \neq 0$ でない限り

$$\mathbb{A} \mathbb{V} \mathbb{a} = 0 \qquad (191)$$

が出る。

§ 6. 應用例

§2. 以下の諸結果を用ひて独立性を判定する例を述べよう。

（例 1）[21] 正規母集團 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ から抽出された大きさ n の任意標本を $x_1, x_2, \text{-------}, x_n$ とし，標本平均値 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ と分散の不偏推定値 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ とが独立であるこ

との証明この事実は Student の t−分布を導く際に用ひられるのである。

$\bar{x}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j$ なる二次形式の行列は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \tag{192}$$

であり又

$$\begin{aligned}(x_i - \bar{x})^2 &= \left(-\frac{1}{n}x_1 + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)x_i - \cdots - \frac{1}{n}x_n\right)^2 \\ &= \frac{(n-1)^2}{n^2}x_i^2 - 2\,\frac{n-1}{n^2}\sum_{e\neq i} x_i x_e + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{e\neq i\\ m\neq i}} x_e x_m\end{aligned} \tag{193}$$

であるから s^2 なる二次形式の行列は

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & -\frac{1}{n(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{n(n-1)} \\ -\frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ -\frac{1}{n(n-1)} & -\frac{1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{194}$$

であるから実際に掛算をして

$$AB = O \tag{195}$$

である。依って§2の結果から s^2 と $\bar{x}^2$ とが独立で，従って s^2 と $\bar{x}$ とが独立となる。又坂元；Kac の結果（§5）を用ひるならば

$$\alpha = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right) \tag{196}$$

とすれば $\bar{x} = (\alpha, y)$ となり又

$$s^2 = \frac{1}{n-1}(yB^*, y) \tag{197}$$

とかくと

$$B^* = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{198}$$

となるので

$$B^{*}\alpha = 0 \tag{199}$$

を確めればよいのである。又明かに

$$B^{*2} = B^{*} \tag{200}$$

であって，B^{*} の階数は $n-1$ であるから，§4 の結果を用ひて

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}s^2 \tag{201}$$

は，自由度 $n-1$ の χ^2―分布に従ふことが分る。

（例 2） 二組の任意標本

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n_1};\ y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_{n_2} \tag{202}$$

が與へられたとき，これが同一の正規~~母~~集團から取られたものであるがどうかを検定しようと云ふときに

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \bar{y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_i \tag{203}$$

として $|\bar{x}-\bar{y}|$ と分散

$$\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sigma^2 \tag{204}$$

の標本推定値と比較して t 分布を用ひるのであるが，このとき分散の推定値として

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2}{n_1+n_2-2} \tag{205}$$

を用ひると，$\bar{x}-\bar{y}$ と s^2 は独立になるが，分散の推定値として

$$\hat{x} = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}x_i+\sum_{i=1}^{n_2}y_i\right) \tag{206}$$

として

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\hat{x})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\hat{x})^2}{n_1+n_2-1} \tag{207}$$

を用ひると $\bar{x}-\bar{y}$ と $\hat{s}^2$ とは独立にならない。

この事実を §§ 2, 4, 5 の結果を用ひて，説明して見よう。この場合には

$$\mathfrak{y} = (x_1 \cdots\cdots x_{n_1}\ y_1 \cdots\cdots y_{n_2}) \tag{208}$$

とすれば

$$\bar{x} - \bar{y} = (\alpha, y) \tag{209}$$

但し　$\alpha = \left(\frac{1}{n_1}, \cdots\cdots \frac{1}{n_1} \cdot -\frac{1}{n_2}, \cdots\cdots, -\frac{1}{n_2} \right)$

であり又

$$s^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}(y B, y)$$ とおくと

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1-\frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} & \cdots & -\frac{1}{n_1} & & & & \\ -\frac{1}{n_1} & 1-\frac{1}{n_1} & \cdots & -\frac{1}{n_1} & & 0 & & \\ \cdots & \cdots & & & & & & \\ -\frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} & \cdots & 1-\frac{1}{n_1} & & & & \\ \hline & & & & 1-\frac{1}{n_2} & -\frac{1}{n_2} & \cdots & -\frac{1}{n_2} \\ & & & & -\frac{1}{n_2} & 1-\frac{1}{n_2} & \cdots & -\frac{1}{n_2} \\ & 0 & & & \cdots & \cdots & & \\ & & & & -\frac{1}{n_2} & -\frac{1}{n_2} & \cdots & 1-\frac{1}{n_2} \end{array} \right) \tag{210}$$

であって，Bの階数は明かに n_1+n_2-2 である。而して実際に

$$B\alpha = 0 \tag{211}$$

であるから §5 の坂元，Kacの結果によって，s^2と$\bar{x}-\bar{y}$ は独立である。又 $B^2=B$ であるから §4の結果から

$$\frac{n_1+n_2-2}{\sigma^2} s^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} (x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (y_i-\bar{y})^2 \right) \tag{212}$$

は自由度 n_1+n_2-2 の χ^2分布に従ふことが分る。

又

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n_1+n_2-1}(y C, y) \tag{213}$$

とおくと

$$C = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n_1+n_2} & -\frac{1}{n_1+n_2} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n_1+n_2} \\ -\frac{1}{n_1+n_2} & 1-\frac{1}{n_1+n_2} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n_1+n_2} \\ \cdots\cdots & & & \\ -\frac{1}{n_1+n_2} & -\frac{1}{n_1+n_2} & & 1-\frac{1}{n_1+n_2} \end{pmatrix} \tag{214}$$

であって，確かに

$$C\alpha = \left(\frac{1}{n_1}, \cdots\cdots, \frac{1}{n_1}, -\frac{1}{n_2}, \cdots\cdots \frac{1}{n_2}\right) \neq 0 \qquad (215)$$

だから，$\hat{s}^2$ と $\bar{x}-\bar{y}$ は独立でない。

C に関しては，その階数は n_1+n_2-1 で又冪等であるから

$$\frac{n_1+n_2-1}{\sigma^2}\hat{s}^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\hat{x})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\hat{x})^2\right) \qquad (216)$$

は自由度 n_1+n_2-1 の χ^2 分布に従ふことが分る。

同様に考へて k 組の任意標本

$$x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \cdots\cdots, x_{\nu n_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \cdots\cdots, k \qquad (217)$$

が與へられたとき，$\bar{x}_\nu = \frac{1}{n_\nu}\sum_{i=1}^{n_\nu} x_{\nu i}$，$\nu = 1, 2, \cdots\cdots, k$ の任意の一次結合は，その分散の推定値

$$s^2 = \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_\nu}(x_{\nu i}-\bar{x}_\nu)^2 \Big/ (n_1+\cdots\cdots+n_k-k) \qquad (218)$$

と独立である。

何者 $\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \bar{x}_\nu$ に対應するベクトルは

$$\alpha = \left(\frac{a_1}{n_1}, \cdots\cdots, \frac{a_1}{n_1}, \frac{a_2}{n_2} \cdots\cdots, \frac{a_2}{n_2}, \cdots\cdots, \frac{a_k}{n_k}, \cdots \frac{a_k}{n_k}\right) \qquad (219)$$

であつて s^2 に対應する行列は

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} 1-\frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} & \cdots & -\frac{1}{n_1} \\ -\frac{1}{n_1} & 1-\frac{1}{n_1} & \cdots & -\frac{1}{n_1} \\ \cdots & & & \\ -\frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} & \cdots & 1-\frac{1}{n_1} \end{matrix} & & & \\ \hline
 & \ddots & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & \begin{matrix} 1-\frac{1}{n_k} & -\frac{1}{n_k} & \cdots & -\frac{1}{n_k} \\ -\frac{1}{n_k} & 1-\frac{1}{n_k} & \cdots & -\frac{1}{n_k} \\ \cdots & & & \\ -\frac{1}{n_k} & -\frac{1}{n_k} & \cdots & 1-\frac{1}{n_k} \end{matrix}
\end{array}\right) \qquad (220)$$

となるから，$B\alpha = 0$ であることが分る。又 B の階数は $n_1+\cdots\cdots+n_k-k$ であつて，$B^2 = B$ は明かであるから

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_\nu}(x_{\nu i}-\bar{x}_\nu)^2 \qquad (221)$$

は自由度 $n_1+\cdots\cdots+n_k-k$ の χ^2 分布に従ふことが分る。

次に §2 で，紹介した A.T. Craig の定理を §4 の一例として証明しよう。

（例 3） 二變數正規母集團

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}dxdy \tag{222}$$

から抽出された大さ n の任意標本を $(x_1, y_1), \cdots\cdots, (x_n, y_n)$ とするとき

$$\mathfrak{x}=(x_1,\cdots\cdots,x_n),\quad \mathfrak{y}=(y_1,\cdots\cdots,y_n) \tag{223}$$

とするとき，A, B を n 次の実対稱行列として二つの双一次形式統計量

$$\theta_1=(\mathfrak{x}A',\mathfrak{y}),\qquad \theta_2=(\mathfrak{x}B',\mathfrak{y}) \tag{224}$$

が独立なる為の完全條件は $AB=0$ であり又双一次形式統計量 $\theta_1=(\mathfrak{x}A',\mathfrak{y})$ と二次形式統計量 $\theta_2=(\mathfrak{x}B,\mathfrak{x})$ の独立性の完全條件は $AB=0$ であることの証明。

先づ、二つの双一次形式の独立性から考へよう。このときは §4 で $k=2$ であって $V=\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}$ であるから

$$\mathbb{V}=\begin{pmatrix}E_n & \rho E_n\\ \rho E_n & E_n\end{pmatrix} \tag{225}$$

である。又双一次形式 $\theta_1=(\mathfrak{x}A',\mathfrak{y})$，$\theta_2=(\mathfrak{x}B',\mathfrak{y})$ を $x_1, x_2\cdots x_n\ y_1\cdots\cdots y_n$ の二次形式と考へれば其の行列は夫々

$$\mathbb{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & A\\ A & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbb{B}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & B\\ B & 0\end{bmatrix} \tag{226}$$

であるから（§4）式から

$$\begin{pmatrix}0 & A\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & \rho E_n\\ \rho E_n & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B\\ B & 0\end{pmatrix}=0 \tag{227}$$

このかけ算を実行して

$$\begin{pmatrix}AB & \rho AB\\ \rho AB & AB\end{pmatrix}=0 \tag{228}$$

故にこれは

$$AB = 0$$

と等値である。

次に双一次形式と二次形式の場合は

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{229}$$

であるから §4, (175) 式から $\mathbb{A}\mathbb{V}\mathbb{B}$ を計算して

$$AB = 0$$

を得る。

（例 4） k 変数正規母集團

$$(2\pi)^{-\frac{k}{2}}|V|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{y}\Pi^{-1}, \mathfrak{y})}d\mathfrak{y} \tag{230}$$

の一組の任意標本 $\mathfrak{y} = (x_1, ---, x_k)$ に関して，統計量

$$\theta = (\mathfrak{y}V^{-1}, \mathfrak{y}) \tag{231}$$

は自由度 k の χ^2 分布に從ふことの証明。

§4 で $n=1$ と考へればよいから

$$V^{-1}VV^{-1} = V^{-1}$$

且つ又 V は正値行列だから V^{-1} の階数は k である。依って θ は自由度 k の χ^2 分布に從ふ統計量である。

（例 5） Cochran の定理の應用例として正規回帰論に現れる二次形式統計量の独立性を考へて見よう。(22)

今母平均が $a_1x_1 + ---- + a_kx_k$，分散 σ^2 なる正規母集團があつて，固定変数 $x_1, ----, x_k$ に $x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, ----, x_{\nu k}$, $\nu = 1, 2, --- n$ なる値を與へたときの標本値を y_ν, $\nu = 1, 2, ---- n$ とする。このとき尤度函数（Likelihood Function）は

$$P(O_n; a_1, ----, a_k, \sigma^2)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp. -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \sum_{p=1}^{k} a_p x_{\nu p})^2 \tag{232}$$

であるから，a_p, $p=1,2,\cdots,k$ の最尤推定値を夫々 $\hat{a}_p$, $p=1,2,\cdots,k$ とすれば，それは次の聯立一次方程式の解となる。

$$\sum_{v=1}^{n} x_{vp}\left(y_v-\sum_{q=1}^{k}\hat{a}_q x_{vq}\right)=0, \quad p=1,2,\cdots k \tag{233}$$

さて，こゝで k 個のベクトル

$$\mathfrak{y}_p'=(x_{1p}, x_{2p},\cdots, x_{np}), \quad p=1,2,\cdots,k \tag{234}$$

は，一次独立としておくと，$a_{pq}=\sum_{v=1}^{n}x_{vp}x_{vq}$, $p,q=1,2,\cdots,k$ とするとき，行列 $(a_{p,q})$, $p,q=1,2,\cdots,k$ は正値行列[23]であるから聯立方程式 (233) は唯一の解を有する。

(233) の関係式を用ひれば

$$\sum_{v=1}^{n}\left(y_v-\sum_{p=1}^{k}a_p x_{vp}\right)^2=\sum_{v=1}^{r}\left(y_v-\sum_{p=1}^{k}\hat{a}_p x_{vp}\right)^2+\sum_{p,q=1}^{k}a_{p,q}(\hat{a}_p-a_p)(\hat{a}_q-a_q) \tag{235}$$

と書き直せるのであるが，左辺は明かに k 変数正規分布をするから（例4）から (235) 式の右辺の第二項

$$\sum_{p,q=1}^{k}a_{p,q}\cdot(\hat{a}_p-a_p)(\hat{a}_q-a_q) \quad \text{(40頁最後押入す.)} \tag{242}$$

は自由度 k の χ^2 一分布に従ふ二次形式統計量である。こゝで次の補助定理を証明しておく。

補助定理，母平均 0，母分散 1 なる正規分布から抽出された n 個の任意標本 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の二次形式統計量 $\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$ が自由度 k の χ^2 一分布に従ふならば二次形式統計量 $\sum_{i,j}(\delta_{ij}-a_{ij})x_ix_j$ は自由度 $(n-k)$ の χ^2 一分布に従って $\sum a_{ij}x_ix_j$ と独立に分布する。

証明は §2 及 §3 の結果を用ひれば次の如くなされる。これを行列の言葉で云ひ換へると $(a_{ij})=A$ は冪等で階数 k であるから

$$(\delta_{ij}-a_{ij})(a_{ij})=(E-A)A=A-A^2=0$$

であるから §2 より二つの統計量は独立であることが分り又 A は対称行列であるから適当な直交変換 P で対角線上になり，冪

等なることからその主対角線上の要素はすべて1であるから

$$P'(E-A)P=E-P'AP$$

の階数は $n-k$ で，これは冪等であるから $E-A$ に関しても同様である。（証明終了）

この補助定理を用ひるならば(235)の右辺第一項は

$$\sum_{v=1}^{n}\left(y_v-\sum_{p=1}^{k}\hat{a}_p x_{vp}\right)^2=\sigma^2\chi^2_{n-k} \tag{243}$$

であつて，これは第二項と独立である。

終りに臨んで，筆者の前論文（*Junjirô Ogawa, On the Independence of Statistics of Quadratic Forms*）を *Annals of Math. Statistics* の Referee に紹介して下さつた Dr. W. E. Deming，別刷を送つて下さつた，Dr. H. Hotelling 及び Dr. A. T. Craig 統数研の人達，特に筆者の前論文の誤りを指摘して補助定理2,4の証明をして下さつた鍋谷清治氏，色々と議論して一緒に考へて下さつた菅原正已，坂本平八氏及び原稿を通讀して色々と有益な忠言を賜つた北川敏男博士に心からの感謝を捧げます。

（1948. 4. 27）

註

(1) W. G. Cochran. The distribution of quadratic forms in a normal system with application to the analysis of covariance. Proceeding of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 30. 1934.

その証明に就ては S. S. Wilks, Mathematical Statistics, 1943. p. 107 参照

(2) A. C. Aitken On the independence of linear and quadratic forms in samples of normally distributed variates, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. LX 1939-40

(3) A. T. Craig. On the independence of certain estimate of variance, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 9. 1938.

(4) A. T. Craig. Note on the independence of certain quadratic forms. Annals of Mathematical Statistics. Vol. 14. 1943.

(5) 坂本平八，統計量の独立性に就て，統数研講究録 Vol. 1. No. 9. 1944.

(6) H. Hotelling. Note on a matric theorem of A. T Craig. Annals of Mathematical Statistics. Vol. 15. 1944.

(7) 小川潤次郎，二次形式統計量の独立性に就て，統数研，講究録 Vol. 2. No. 4. 1946

Junjirô Ogawa. On the Independence of Statistics of Quadratic Forms.

統数研，講究録 Vol. 3. No 8. 1947.

(8) A.T. Craig. Bilinear forms in normally correlated variables. Annals of Mathematical Statistics. Vol. 18. No. 4. 1947.

(9) 註 (7) の論文参照

(10) この積率母函数の計算は A.C. Aitken. On the independence of linear and quadratic forms in Samples of normally distributed variates. Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh. Vol. LX 1939-40; A.T. Craig. On the independence of certain estimate of variance. Annals of Math. Stat. Vol. 9. 1943; 坂本平八，統計量の独立性について，統数研講究録 Vol. 1. 1945. 小川潤次郎，On the independence of Statistics of quadratic forms. 統数研講究録 Vol. 3. No. 8 1947. を見よ。

(11) 註 (6) の論文参照

(12) 註 (8) の論文参照

(13) S. S. Wilks, Mathematical Statistics. 1943, p 107 を見よ。

(14) 坂本平八，註 (5) の論文定理 II 参照

(15) 小川註 (7) の論文の idea である。

(16) Aitken 註 (2) の論文参照

(17) 坂本平八，註 (5) の論文定理 II 参照

(18) 坂本平八 註 (5) の論文定理 I 参照

(19) 坂本平八 註 (5) の論文参照

(20) M. Kac. A Remark on Independence of linear and Quadratic Forms involving Independent Gaussian Variables, Annals of Math. Stat. Vol. 16. No. 4. 1945.

(21) A.C. Aitken 註（2）の論文参照

(22) S.S. Wilks, Mathematical statistics, 1943. Chapt. VIII Normal Regression Theory 参照

(23) S.S. Wilks, Mathematical statistics, 1943. Chapt. VIII p. 160.

● P36上より11行へ挿入す。

$$\sum_{v=1}^{n}\left(y_v-\sum_{p=1}^{k}a_p x_{vp}\right)^2=\sigma^2\chi_n^2 \tag{236}$$

これは左辺をσ^2で割ったものが自由度nのχ^2分布であることの略記である。

（２３３）式を書直して、

$$\sum_{v=1}^{n}x_{vp}\left[\left(y_v-\sum_{q=1}^{k}a_q x_{vq}\right)-\sum_{q=1}^{k}(\hat{a}_q-a_q)x_{vq}\right]=0 \tag{237}$$

$$p=1,2,\cdots,k$$

であるから $\eta_v=y_v-\sum_{q=1}^{k}a_q x_{vq}$, $v=1,2,\cdots\cdots,n$ は母平均 0, 分散σ^2なる正規分布に従ふ独立な確率変数である。

今

$$(a_{pq})^{-1}=(a^{qp}) \tag{238}$$

とおいて、(237)から $\hat{a}_p-a_p$, $p=1,2,\cdots\cdots,k$ を解くと、

$$\hat{a}_p-a_p=\sum_{q=1}^{k}a^{pq}\sum_{v=1}^{n}x_{vq}\eta_v \qquad p=1,2,\cdots\cdots,k \tag{239}$$

であるから

$$E(\hat{a}_p-a_p)=0 \qquad p=1,2,\cdots\cdots,k \tag{240}$$

又

$$\begin{aligned}E(\hat{a}_p-a_p)(\hat{a}_q-a_q)&=E\left\{\sum_{r=1}^{k}a^{pr}\sum_{v=1}^{n}x_{vr}\eta_v\cdot\sum_{s=1}^{k}a^{qs}\sum_{v=1}^{n}x_{v}\ \ v\right.\\&=\sum_{r,s}^{k}a^{pr}a^{qs}\sum_{v,\mu}^{n}x_{vr}x_{\mu s}E(\eta_v\eta_\mu)\\&=\sigma^2\sum_{r,s}^{k}a^{pr}a^{qs}\sum_{r}x_{vr}x_{rs}=\sigma^2\sum_{r,s}a^{pr}a^{qs}a_{rs}\\&=\sigma^2\sum\delta_{ps}a^{qs}=\sigma^2a^{qp}\end{aligned} \tag{241}$$

依って $\hat{a}_1-a_1,\cdots\cdots,\hat{a}_k-a_k$ は母平均 0, 分散行列 (a^{qp}) なる