㉕ MAPKOBの最小自乗法の一定理に関する注意

兼所員　増　山　元三郎

n個の母集団 $\pi_1, \pi_2, -----, \pi_n$ があつて，各母集団から一つづつ個体が抽出され，これが相互い独立である場合の Mapkob − Neyman − David の定理は，Stat. Res. mem. II (1937), 105 に解かれていて，本誌 3 (1947), 152 に小川所員の紹介があり，佐藤教授の増補版数理統計学，1948 の増補部分 542 頁 にも紹介されているが，茲に独立性の條件を取除いても，殆どその儘成立つことを注意して置きたい。即ち

i) 変量 $(x_1, x_2, ----, x_n)$ の母分散行列を $(\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j)$ とし，この階数は n，

ii) x_i の期待値が $s\,(\leqq n)$ 個の未知母数 p_i の一次函数で，係数 $a_{i\alpha}$ は既知とし，

$$E(x_i) = \mathop{S}_{\alpha=1} a_{i\alpha} p_\alpha$$

と置くと，行列 $(a_{i\alpha})$ の階数は s，

iii) $$\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j = \sigma^2 D_{ij}$$

と置くと，σ^2 は未知であるが，D_{ij} は既知である

とする。　この時

（A）　p_α の任意の一次形式，

$$\theta = \overset{s}{\underset{\alpha=1}{\mathrm{S}}} b_\alpha p_\alpha \qquad (b_\alpha \text{ は既知})$$

の最良不偏推定量 t は，

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - \overset{s}{\underset{\alpha=1}{\mathrm{S}}} a_{i\alpha} q_\alpha)(x_j - \overset{s}{\underset{\beta=1}{\mathrm{S}}} a_{j\beta} q_\beta) D_{ij}$$

を最小ならしめる q_α の値を $q_{\alpha 0}$ とすると，

$$t = \mathrm{S}\, b_\beta q_{\beta 0}$$

であり，

（B）　t の母分散 σ_t^2 の不偏推定量は

$$V_t = \frac{S_0}{n-s} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j d_{ij}$$

で與えられる。　茲に S_0 は S の最小値であり，d_{ij} は（D_{ij}）の逆行列（d_{ij}）の要素で，λ_i は t を x_1，x_2，-----，x_n で表した時の x_i の係数である。
即ち

$$t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

證明は

$$G_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\, a_{j\alpha}\, a_{i\beta},$$

$$H_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij}\, a_{j\alpha}\, x_i$$

と置けば， Neyman - Daird のやった通りに進めばよい。 この時拡張のために，新しく證明を要することは， $G_{\alpha\beta}$ の行列式が正であることであるが，これは

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, Z_i\, Z_j$$

が正定符号二次形式であることに注意すれば， $G_{\alpha\beta}$ の右辺の二次形式に適当な一次変換を行い，Neyman- Daird の證明した場合に帰着させることができるから問題はない。