單葉函数に就いて

鍋島　一郎

① 講究録，第四巻（1948）に単葉円に就いて述べた時，次の定理

［定理 1］　$f(Z)$ が $|Z|<1$ で正則で，$|f'(Z)|<1$ とし，$Z=1$ に於ける $f'(Z)$ の角微係数を D_1 とすると

$$\text{円}\quad \frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > D_1 \qquad \left(\text{中心 } \frac{D_1}{D_1+1},\ \text{半径 } \frac{1}{D_1+1}\right)$$

内で $f(Z)$ は単葉となる。

を証明した。

これは，

$$\left|\frac{f'(Z)+1}{f'(Z)-1}\right| \geqq \Re\left(\frac{1+f'(Z)}{1-f'(Z)}\right) \geqq \frac{1}{D_1}\Re\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \frac{1}{D_1}\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > 1$$

なることを用いる。

ここでは，この定理の応用として得られた次の定理を證明する。

②

[定理2]　$f(z)$ が $|z|<1$ で正則，$f(0)=0$，
$f'(0)=1$，$f'(z)\neq 0$．
$|f'(z)|<M$　$(M>1)$ とし，

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$$

$$\lim_{z\to e^{i\theta}}\frac{f''(z)}{M}\leqq D<+\infty\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とすると，

(i)　$f(z)$ は半径 $\dfrac{1}{D+1}$ で $|z|=1$ に内接するすべての円内で單葉となる。

(ii)　$D<1$ ならば，$f(z)$ は $|z|<\dfrac{2-\sqrt{3+D}}{D+1}$ で凸型となる。

(iii)　$D\geqq 1$ ならば，$f(z)$ は $|z|<\dfrac{D}{(D+1)(8D-1)}$ で凸型となる。

(iv)　$f(z)$ は $|z|<\dfrac{D+C}{D+1}$　$\left(C=\tanh\dfrac{\pi}{2}=0.65\cdots\right)$ で星型となる。

(v)　$D<1$ の時，$|a_2|\leqq\dfrac{D+2}{2}$，$|a_3|\leqq\dfrac{3D^2+4D+3}{4}$

$D\leqq 1$ の時，$|a_2|\leqq 2\sqrt{2}(D+1)$，$|a_2|\leqq 3\sqrt{2}(D+1)^2$．

(vi)　$f(z)$ による $|z|<1$ の像領域は円板 $|w|<\dfrac{1}{D+2}$ $(D<1$ の時$)$

$|w|<\dfrac{1}{4\sqrt{2}(D+1)}$　$(D\geqq 1)$ を含む

(vii) $D < 1$ の時，$f(Z)$ の $Z=1$ に於ける角微係数をを D_f とすると，

$$D_f \geqq 1 + M \log M > M$$

(viii) $f'(Z)$ の $Z=1$ に於ける角微係数を $D_{f'}$ とすると，

$$D_{f'} \geqq M \log M$$

【証明】(i) 先づ

$$\lim_{Z \to e^{i\theta}} \frac{f'(Z)}{M} = D_\theta$$ の存在をいう。

$\varepsilon = e^{i\theta}$ とおき，$\dfrac{F(Z)}{M} = \dfrac{\bar{\varepsilon}^2 f(\varepsilon Z)}{M}$ ----- ①

とおくと，

$$\frac{F'(Z)}{M} = \frac{f'(\varepsilon Z)}{M}\bar{\varepsilon}^2 \cdot \varepsilon \qquad \frac{F''(Z)}{M} = \frac{f''(\varepsilon Z)}{M}\bar{\varepsilon}^2 \cdot \varepsilon^2 = \frac{f''(\varepsilon Z)}{M}$$

$$\left|\frac{F'(Z)}{M}\right| = \left|\frac{f'(\varepsilon Z)}{M}\right| < 1$$ であるから，

$Z = 1$ に於ける $\dfrac{F'(Z)}{M}$ の

角微係数 $D_\theta = \lim\limits_{Z \to 1} \dfrac{F''(Z)}{M} = \lim\limits_{Z \to \varepsilon} \dfrac{f''(Z)}{M}$ が存在する。

依って

$$\lim_{Z \to 1} \frac{F''(Z)}{M} = D_\theta \leqq D$$ から，定理1により，

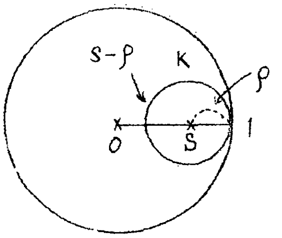
$\dfrac{F(Z)}{M}$ は

円 K ; $\dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > D$

内で単葉となる（①の-①式参照）
即ち $F(Z)$ が この円内で単葉となる。

①式から $f(Z)$ は中心 $\dfrac{D}{D+1}\varepsilon$, 半径 $\dfrac{1}{D+1}$ の円内で

単葉となる。任意の ε について成立するから，(i) が
証明された。
(ii) 以下は次の如くにして証明される。



$\rho = \dfrac{1}{D+1}$ とおき，

$s = 1-\rho$, $s-\rho < r < 1$ とし，

$$\begin{cases} Z = \rho \cdot \dfrac{u+x}{1+xu} + s \\ x = \dfrac{r-s}{\rho} \end{cases}$$

により，円 K は $|u| < 1$ に写像される。

$$F(u) = \frac{f\left(\rho \frac{u+x}{1+xu} + s\right) - f(r)}{\rho(1-x^2)f'(r)} = u + A_2 u^2 + \cdots\cdots$$

は $F(0)=0$, $F'(0)=1$ で $|u|<1$ で単葉であるから，

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(r)}{f'(r)}\frac{(1-r)(\rho+r-s)}{\rho} - \frac{2(r-s)}{\rho}\right]$$

$$|A_2| \leqq 2$$

であつて，

$$\left| \frac{r f''(r)}{f'(r)} - \frac{2r}{1-r} \cdot \frac{r-s}{\rho+r-s} \right| \leqq \frac{4r}{1-r} \cdot \frac{\rho}{\rho+r-s}$$

となる

$Z = r e^{i\theta}$ $(s-\rho < r < 1)$ に対してはKの代りに中心 $s e^{i\theta}$，半径 ρ の円を考えれば，同様にして

$$\left| Z \frac{f''(Z)}{f'(Z)} - \frac{2r}{1-r} \cdot \frac{r-s}{\rho+r-s} \right| \leqq \frac{4r}{1-r} \cdot \frac{\rho}{\rho+r-s} \quad \text{----②}$$

となる。

$\rho > \frac{1}{2}$ 即ち $D<1$ の場合と $\rho \leqq \frac{1}{2}$ 即ち $D \geqq 1$ の場合に分けて

(ii) $D<1$ $\left(\rho > \frac{1}{2}\right)$ の時

② 式は $|Z|<1$ で成立する。

これから

$$r \frac{2(r-s)+4\rho}{(1-r)(\rho-s+r)} \geqq \Re\left(\frac{Z f''(Z)}{f'(Z)}\right) \geqq r \frac{2(r-s)-4\rho}{(1-r)(\rho-s+r)} \quad \text{----③}$$

となり，

$$1 + \Re\left(\frac{Z f''(Z)}{f'(Z)}\right) \geqq 1 + r \frac{2(r-s)-4\rho}{(1-r)(\rho-s+r)}$$

となるから，

---

(1) C. a. ~~Шнодер~~ [illegible] ; К теории ~~Многолистных~~ однолистных функций : Recueil. math. 8(50) 参照

$$1+r\,\frac{2(r-s)-4\rho}{(1-r)(\rho-s+r)}>0$$

即ち，

$$r^2-r(s+5\rho-1)+\rho-s>0$$

で $f(z)$ は凸型となる

$$\rho=\frac{1}{D+1} \text{ により } f(z) \text{ は } |z|<\frac{2-\sqrt{3+D}}{D+1} \text{ で}$$

凸型となる。

(iii) $D\geqq 1$ $(\rho\leqq\frac{1}{2})$ の時，③式に於て，$r=1-\rho\ (>1-2\rho)$ とおくと，

$$\mathfrak{R}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geqq-\frac{4(1-\rho)}{\rho}$$

となる。

$$u(z)=\mathfrak{R}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\frac{4(1-\rho)}{\rho}\right)$$

とおくと，$u(z)$ は調和で $u(z)\geqq 0$ on $|z|=R=1-\rho$

$\therefore\ u(z)\geqq 0$ in $|z|\leqq R$

$$\therefore\ u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\theta)+r^2}\,d\psi \quad \text{---- ④}$$

$(t=Re^{i\psi})$

$$\therefore\ u(z)\geqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(t)\frac{R^2-r^2}{(R+r)^2}\,d\psi=\frac{R-r}{R+r}u(0)$$

$$\therefore \quad u(z) \geqq \frac{R-r}{R+r}\cdot\frac{4(1-\rho)}{\rho} \qquad |z| = r < R = 1-\rho$$

$$u(z) \geqq \frac{R-r}{R+r}\cdot\frac{4(1-\rho)}{\rho} \qquad |z| \leqq r$$

$$\therefore \quad \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geqq \frac{4(1-\rho)}{\rho}\left\{\frac{R-r}{R+r}-1\right\} = \frac{4(1-\rho)}{\rho}\cdot\frac{-2r}{R+r}$$

$$\therefore \quad 1 + \Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqq 1 - \frac{4(1-\rho)2r}{\rho(R+r)}$$

依って，

$$1 - \frac{4(1-\rho)2r}{\rho(R+r)} > 0$$

なる r に対し，$f(z)$ は凸型となる。

即ち

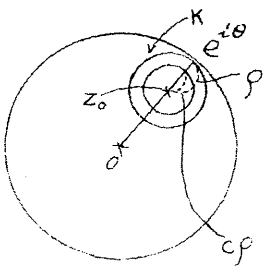
$$r < \frac{\rho(1-\rho)}{8-9\rho} = \frac{D}{(8D-1)(D+1)}$$

故に

$$|z| < \frac{D}{(8D-1)(D+1)}$$

で $f(z)$ は凸型となる。

(iv)



$\zeta = \dfrac{z-z_0}{\rho}$ とおき，

$g(\zeta) = f(z(\zeta))$ とおくと，

$$F(u) = \frac{g\left(\frac{u+\zeta}{1+\bar{\zeta}u}\right) - g(\zeta)}{g'(\zeta)(1-|\zeta|^2)}$$

は $|\zeta|<1$ で正則，　$F(0)=0$, $F'(0)=1$

で，且つ単葉である.

$$F(-\zeta) = \frac{-g(\zeta)}{g'(\zeta)(1-|\zeta|^2)} \quad \therefore \zeta\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} = \frac{-\zeta}{F(-\zeta)(1-|\zeta|^2)}$$

$$\therefore \left| \arg \zeta \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} \right| = \left| \arg \frac{F(-\zeta)}{-\zeta} \right|$$

然るに golusin の定理(2) により

$$\left| \arg \frac{F(-\zeta)}{-\zeta} \right| \leqq \lg \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}$$

故に

$$\lg \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|} < \frac{\pi}{2} \quad \text{即ち}$$

$$|\zeta| < \frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{e^{\frac{\pi}{2}}+1} = \tanh\frac{\pi}{2} = c = 0.655$$

で

$$\Re\left(\zeta \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\right) > 0 \quad \text{となる。}$$

---

(2) 小松勇作：等角写像論 P. 243 定理 35.5

即ち

$$\mathcal{R}\left(\frac{z-z_0}{\rho}\frac{\rho f'(z)}{f(z)}\right)>0 \quad \mathcal{R}\left((z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0 \quad \text{in } K$$

$$z=z_0+c_1e^{i\theta},\ -c\rho<c_1<c\rho,\quad z_0=(1-\rho)e^{i\theta}$$

とおくと

$$c_1\mathcal{R}\left(e^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0$$

$$\therefore \qquad \mathcal{R}\left(e^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0 \quad \text{for} \quad 0\leqq\theta<2\pi$$

$$\therefore \qquad \mathcal{R}\left((1-\rho+c_1)e^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0$$

即ち，

$$\mathcal{R}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0 \quad \text{on} \quad |z|=1-\rho+c_1$$

故に，

$$\mathcal{R}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0 \quad \text{in } |z|<1-\rho+c\rho$$

故に，

$$|z|<1-\rho+c\rho=1-\frac{1}{D+1}+\frac{c}{D+1}=\frac{D+c}{D+1}$$

で　$f(z)$ は，星型となる。

(V)　a_2，a_3 の 評価

①　$D<1$　の時，②式から

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2(r-s)}{(1-r)(\rho+r-s)}\right|\leqq\frac{4\rho}{(1-r)(\rho+r-s)}$$

$|z|=r=0$　とおくと

$$\left|\frac{f''(0)}{f'(0)}-\frac{-2s}{(\rho-s)}\right|\leqq\frac{4\rho}{(\rho-s)}$$

$$\left|\frac{f''(0)}{f'(0)} - \frac{-2(1-\rho)}{2\rho}\right| \leqq \frac{4\rho}{2\rho} = 2$$

$f'(0)=1$ 故

$$\left|\frac{f''(0)}{2!} + \frac{1-\rho}{2\rho}\right| \leqq 1$$

$$\therefore \quad \left|a_2 + \frac{1-\rho}{2\rho}\right| \leqq 1$$

$$\therefore \quad |a_2| \leqq 1 + \frac{1-\rho}{2\rho} = \frac{1+\rho}{2\rho} = \frac{D+2}{2} < \frac{3}{2}$$

即ち

$$|a_2| \leqq \frac{D+2}{2} < \frac{3}{2}$$

又，

$$F(u) = \frac{f\left(\rho\,\frac{u+x}{1+ux} + s\right) - f(r)}{\rho(1-x^2)f'(r)} = u + A_2u^2 + A_3u^3 + \cdots$$

の式から

$$A_3 = \frac{1}{6}\left\{\frac{f''(r)}{f'(r)}\,\frac{(1-r)^2(\rho+r-s)^2}{\rho^2} - \frac{f''(r)}{f'(r)} \times \frac{6(r-s)(1-r)(\rho+r-s)}{\rho^2} + 6\,\frac{(r-s)^2}{\rho^2}\right\}$$

$|A_3| \leqq 3$

から

$$\left|\frac{f'''(r)}{f'(r)}\,\frac{(1-r)^2(\rho+r-s)^2}{\rho^2} - \frac{f''(r)}{f'(r)}\,\frac{6(r-s)(1-r)(\rho+r-s)}{\rho^2} + 6\,\frac{(r-s)^2}{\rho^2}\right| \leqq 18 \quad 5$$

$r=0$ とおくと

$$\left|\frac{f'''(0)}{f'(0)} - \frac{f''(0)}{f'(0)}\,\frac{-6s}{(\rho-s)} + 6\,\frac{s^2}{(\rho-s)^2}\right| \leqq \frac{18\rho^2}{(\rho-s)^2}$$

$f'(0)=1$ 故

$$\left|\frac{f'''(0)}{6}+\frac{f''(0)}{6}\frac{6S}{(\rho-S)}+\frac{S^2}{(\rho-S)^2}\right| \leqq \frac{3\rho^2}{(\rho-S)^2}$$

$$\left|a_3+a_2\frac{2S}{(\rho-S)}+\frac{S^2}{(\rho-S)^2}\right| \leqq \frac{3\rho^2}{(\rho-S)^2}$$

$$\left|a_3+\frac{1-\rho}{\rho}a_2+\frac{(1-\rho)^2}{4\rho^2}\right| \leqq \frac{3}{4}$$

$$|a_3| \leqq \frac{3}{4}+\frac{1-\rho}{\rho}|a_2|+\frac{(1-\rho)^2}{4\rho^2}$$

$$|a_3| \leqq \frac{3}{4}+\frac{1-\rho}{\rho}\cdot\frac{1+\rho}{2\rho}+\frac{(1-\rho)^2}{4\rho^2}=\frac{2\rho^2-2\rho+3}{4\rho^2}$$

$$=\frac{3D^2+4D+3}{4}<\frac{10}{4}$$

㋺ $D \geqq 1$ の時,

$|z|=1-\rho$ で $\quad \frac{4}{\rho} \geqq \mathcal{R}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqq -\frac{4}{\rho}$

$$\frac{4}{\rho} \geqq \mathcal{J}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqq -\frac{4}{\rho}$$

故に上式は $|z| \leqq 1-\rho$ で成立する。

$z=0$ とおくと,

$$\frac{2}{\rho} \geqq \mathcal{R}(a_2) \geqq -\frac{2}{\rho}$$

$$\frac{2}{\rho} \geqq \mathcal{J}(a_2) \geqq -\frac{2}{\rho}$$

$$\therefore \quad |a_2| \leqq \frac{2\sqrt{2}}{\rho}=2\sqrt{2}(D+1)$$

又，⑤式は，$z = re^{i\varphi}$ に対して

$$\left| \frac{f'''(z)}{f'(z)} \cdot \frac{(1-r)^2(\rho+r-s)^2}{\rho^2} - \frac{f''(z)}{f'(z)} \frac{6(r-s)(1-r)(\rho+r-s)}{\rho^2} + 6\frac{(r-s)^2}{\rho^2} \right| \leqq 18$$

$|z| = r = 1-\rho$ とおくと，

$$\left| \frac{f'''(z)}{f'(z)} \frac{\rho^4}{\rho^2} \right| \leqq 18 \quad \therefore \left| \frac{f'''(z)}{f'(z)} \right| \leqq \frac{18}{\rho^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{18}{\rho^2} \geqq \mathcal{R}\left(\frac{f'''(z)}{f'(z)} \right) \geqq -\frac{18}{\rho^2}$$

$$\frac{18}{\rho^2} \geqq \mathcal{J}\left(\frac{f'''(z)}{f'(z)} \right) \geqq -\frac{18}{\rho^2}$$

故に，上式は $|z| \leqq 1-\rho$ で成立する。

$z = 0$ とおくと，

$$\frac{3}{\rho^2} \geqq \mathcal{R}(a_3) \geqq -\frac{3}{\rho^2}$$

$$\frac{3}{\rho^2} \geqq \mathcal{J}(a_3) \geqq -\frac{3}{\rho^2}$$

$$\therefore \qquad |a_3| \leqq \frac{3\sqrt{2}}{\rho^2} = 3\sqrt{2}(D+1)^2$$

(vi)　$f(z) \neq C$　とすると，

$$F(z) = \frac{C f(z)}{C - f(z)} = z + b_2 z^2 + \cdots\cdots$$

$F(0) = 0$，$F'(0) = 1$，　$f(z)$ 単葉なる領域で $F(z)$ も単葉であるから，

$$b_2 = a_2 + \frac{1}{C}$$

により，

（イ）$D < 1$ の時，　$|b_2| \leqq \frac{D+2}{2}$，　$|a_2| \leqq \frac{D+2}{2}$，

$$\therefore \quad \left| \frac{1}{C} \right| \leqq D + 2, \quad \therefore |C| \geqq \frac{1}{D+2}$$

依つて，$f(z)$ による $|z|<1$ の像領域は円板 $|w| < \frac{1}{D+2}$ を含む。

（ロ）$D \geqq 1$ の時，$|b_2| \leqq 2\sqrt{2}(D+1)$　$|a_2| \leqq 2\sqrt{2}(D+1)$

$$\left|\frac{1}{C}\right| \leqq 4\sqrt{2}(D+1) \qquad \therefore |C| \geqq \frac{1}{4\sqrt{2}(D+1)}$$

依つて $f(z)$ による，$|z|<1$ の像領域は円板 $|w| < \frac{1}{4\sqrt{2}(D+1)}$ を含む。

(vii)　$|f'(z)| < M$　故　$f(z) = \int_0^z f'(z)\,dz$

$$\therefore |f(z)| < M \quad in \quad |z| < 1$$

$$f(0) = 0$$

然して　$D < 1$　の時，内接単葉円は原点を含むから，$f(z)$ は

原点を含まない。

又，Schwarz の定理により

$$\frac{|f(Z)|}{M} \leqq |Z| \text{ ---------- } ⑥$$

故に
$$F(Z) = \frac{f(Z)}{MZ} \quad \text{は} \quad |Z| < 1 \quad \text{で正則，}$$

$$F(0) = \frac{f'(0)}{M} = \frac{1}{M}$$

$F(Z) \neq 0 \quad |F(Z)| < 1 \quad in \quad |Z| < 1$

故に　$Z = 1$　に於ける $F(Z)$ の角微係数を D_F とすると，

$$D_F = \lim_{Z \to 1} F'(Z) = \lim_{Z \to 1} \frac{f'(Z) \cdot Z - f(Z)}{MZ^2} = \frac{D_f - 1}{M}$$

$$\overset{(3)}{\geqq} \frac{4 \left| \log \frac{1}{M} \right|^2}{\left\{ \left| 1 - \log \frac{1}{M} \right|^2 - \left| 1 + \log \frac{1}{M} \right|^2 \right\}} = \log M$$

$$\therefore \quad D_f \geqq M \log M + 1 > M$$

となる。（$D_f > M$ なることは ① 式より明らか）

(viii)　$|f'(Z)| < M \quad in \; |Z| < 1 \quad f'(Z) \neq 0 \quad in \; |Z| < 1$ である

から
$$\frac{D_{f'}}{M} \geqq \frac{4 \left| \log \frac{1}{M} \right|^2}{\left\{ \left| 1 = \log \frac{1}{M} \right|^2 - \left| 1 + \log \frac{1}{M} \right|^2 \right\}} = \log M$$

$$\therefore \quad D_{f'} \geqq M \log M.$$

（証　終）

(3)　鍋島，「単位円内有界正則函数の零点と角微係数に就いて」講究録三巻、十三、四号参照