㉓ 最小自乗法に関するMarkoffの定理を繞って（其の一）

所員　小川　潤次郎

筆者はさきに本講究録第三巻第7号に於て同じ表題で書いたのであるが其の後増山元三郎博士よりの注意に依つて Statistical Research Memoirs. Volume II, Department of Statistics University of London, University College に J. Neyman と F. N. David の論文のあることを知り、又 P.L. Hsu の論文を読む機会があつたので此の機会に之等二つの論文を紹介しておくことにする。

F. N. David and J. Neyman : Extension of The Markoff Theorem on Least Squares

P.L. Hsu : On The Best Unbiased Quadratic Estimate of The Variance

§1 n個の母集団 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ があつて各母集団より丁度一つづつの個体が抽出されるとする。それらの抽出は互に独立になされるものと假定する。今ある性質に着目するとして、それを表す値を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする。θ は $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ のある collective character とする。

定義 I，或函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ があつて母集団 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ の性質の如何に拘らず $f(x_1, x_2, \cdots,$

x_n)の数学的希望値が恒等的にθに等しい。

$$\mathcal{E}\left[f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right] \equiv \theta \qquad (1)$$

のとき、$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$はθの不偏推定値であるとふ。

かやうな不偏推定値の内で特に線形であるものを線形不偏推定値とふ。collective character θの線形不偏推定値は一般には澤山ある訳で、それ等の内でその標準偏差の小さいもの程良い推定値であるとする。

定義II. xの一次函数Fが次の性質を有するときFはθの最良線形不偏推定値又は簡単に最良推定値とふ。

$$\mathcal{E}(F) \equiv \theta \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}(F-\theta)^2 = \text{最小} \qquad (3)$$

これ丈定義して拡張されたMarkoffの定理を述べると次の如くなる。

拡張されたMarkoffの定理

(a) $x_1, x_2, \cdots, x_n$はすべて独立である。

(b) x_i $(i=1,2,\cdots,n)$の平均値は$s \leqq n$個の未知常数p_j $(j=1,2,\cdots,s)$の一次形式である。

$$\mathcal{E}(x_i) = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{is}p_s \qquad (4)$$

但し係数a_{ij} $(j=1,2,\cdots,s)$は既知である。

(c) (4)なるn個の方程式から少くとも一組のs個の方程式を取ればp_jに関して解ける即ち行列

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{ns} \end{pmatrix} \tag{5}$$

の階数は s である。

(d) x_i の分散 σ_i^2 に関しては

$$\sigma_i^2=\frac{\sigma^2}{P_i}\quad(i=1,2,\cdots\cdots,n) \tag{6}$$

で σ は未知でもよいが P_i はある既知の正数であるとする。

以上の (a), (b), (c), (d) なる4條件の下に次の (α) (β) なる二つの結論が出る。

(α) $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_s$ は既知の常数として, $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_s$ の一次函数

$$\theta=b_1p_1+b_2p_2+\cdots\cdots+b_sp_s \tag{7}$$

の最良線形不偏推定値は次の如くして得られる。即ち

$$S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_{i1}g_1-a_{i2}g_2-\cdots-a_{is}g_s)^2P_i \tag{8}$$

を最小ならしめる $g_1, g_2, \cdots\cdots, g_s$ の値を $g_1^0, g_2^0, \cdots\cdots g_s^0$ としてこれを (7) の $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_s$ に代入すればよい。

$$F=b_1g_1^0+b_2g_2^0+\cdots\cdots+b_sg_s^0 \tag{9}$$

(β) F の分散の推定値は

$$\mu_F^2=\frac{S_0}{n-s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{P_i} \tag{10}$$

であたへられる，但しS_0はSの最小値

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_{i1}\hat{q}_1^0-a_{i2}\hat{q}_2^0-\cdots-a_{is}\hat{q}_s^0)^2}{p_i} \tag{11}$$

で又λ_iは(9)式のx_iの係数である。

(α)の證明：方針は最良線形不偏推定値の定義から得られるFの式と(α)の方法で得られる(9)とを比較して，その一致することを示す。

$$F=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \tag{12}$$

として$\mathcal{E}(F)\equiv\theta$が$p$に関して恒等的に成立つと云ふ條件を書いて見ると，

$$\mathcal{E}(F)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{E}(x_i)=\sum_{j=1}^{s}p_j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_{ij} \tag{13}$$

であるから次のs個の式が成立つ。

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_{ij}=b_j \quad (j=1,2,\cdots,s) \tag{14}$$

$s\leqq n$であるから，(14)を滿足する$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$の組は一般には無数にある。それらの内で

$$\sigma_F^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\lambda_i^2=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{p_i} \tag{15}$$

を最小ならしめる如きλを求めよう。その爲に

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{p_i}-2\sum_{k=1}^{s}d_k\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_{ik} \tag{16}$$

として

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_i}=\frac{2\lambda_i}{p_i}-2\sum_{k=1}^{s}d_k a_{ik}=0。 \tag{17}$$

$$\lambda_i = P_i \sum_{k=1}^{s} \alpha_k a_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{18}$$

(18)を(14)に代入して整頓すれば

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} P_i a_{ij} a_{i1} + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} P_i a_{ij} a_{i2} + \cdots + \alpha_s \sum_{i=1}^{n} P_i a_{ij} a_{is} = b_j \quad (j=1,2,\cdots,s) \tag{19}$$

そこで今

$$G_{jk} = \sum_{i=1}^{n} P_i a_{ij} a_{ik} \tag{20}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{s1} & G_{s2} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix} \tag{21}$$

とおけばΔは

$$M' = \begin{vmatrix} \sqrt{P_1}\, a_{11} & \sqrt{P_1}\, a_{12} & \cdots & \sqrt{P_1}\, a_{1s} \\ \sqrt{P_2}\, a_{21} & \sqrt{P_2}\, a_{22} & \cdots & \sqrt{P_2}\, a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{P_n}\, a_{n1} & \sqrt{P_n}\, a_{n2} & \cdots & \sqrt{P_n}\, a_{ns} \end{vmatrix} \tag{22}$$

とすれば$\Delta = M'^2$であって、P_iはすべての正であるから、M'はMと同様の性質を有す。即ちM'の階数はsであるから、M'のs次の小行列式の内には少くとも一つ0でないものがある。而してΔはM'のs次の小行列式の積和であるから[(1)]確かに0でない。従って(19)なる聯立方程式はCramerの（註(1)藤原松三郎：行列及び行列式、29頁、定理11参照）公式に依って次の如く解かれる。Δに於けるG_{jk}の

餘因子をΔ_{jk}として

$$\alpha_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{s} b_j \Delta_{jk} \tag{23}$$

(23)を(18)に代入して

$$\lambda_i = P_i \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{s} b_j \Delta_{jk} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{24}$$

かかるλの値に対してσ_F^2は條件(14)の下に極値を有する訳であるが、σ_F^2はnon-negativeで如何程でも大なる値を取り得るから、結局(24)なるλの値に対しては最小値を取る。(24)のλの値を(12)式に代入して、the best linear estimateとして

$$F = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{s} b_j \Delta_{jk} \tag{25}$$

を得る。之を書直して

$$F = \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{k=1}^{s} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} P_i x_i a_{ik} \tag{26}$$

次に吾々は(α)方法に依つてFの形を求めて見よう。(8)のSを最小ならしめる$g_1^0, g_2^0, \cdots, g_s^0$はSを$g_j$で偏微分して

$$g_1^0 \sum_{i=1}^{n} P_i a_{i1} a_{ij} + g_2^0 \sum_{i=1}^{n} P_i a_{i2} a_{ij} + \cdots + g_s^0 \sum_{i=1}^{n} P_i a_{is} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i a_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,s) \tag{27}$$

から求められる。而してこれは(20)の記号を用ひれば

$$G_{j1} g_1^0 + G_{j2} g_2^0 + \cdots + G_{js} g_s^0 = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i a_{ij}$$

であるから

$$q_k^0 = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{s}\Delta_{jk}\sum_{i=1}^{n}P_i x_i a_{ij} \quad (k=1,2,\cdots,s) \qquad (28)$$

従つてこの q_k^0 の値を(9)式に代入して

$$F_1 = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{s}\Delta_{jk}\sum_{i=1}^{n}P_i x_i a_{ij} \qquad (29)$$

となつてこれは(20)式の F と一致する。これで(α)は証明出来たことになる。

(β) の證明

$$\mu_F^2 = \frac{S_0}{n-s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{P_i} \qquad (30)$$

が σ_F^2 の *unbiased estimate* である為には

$$\mathcal{E}(S_0) \equiv (n-s)\sigma^2 \qquad (31)$$

であることが必要にして且つ充分である。今

$$S_z = \sum_{i=1}^{n}(z x_i - a_{i1}q_1 - a_{i2}q_2 - \cdots - a_{is}q_s)^2 P_i \qquad (32)$$

とすれば、$z=1$ のとき $S_1 \equiv S$ である。所で S_z は、$z, q_1, q_2, \cdots, q_s$ に関する二次の斉次多項式であるから *Euler* の公式に依つて

$$S_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_z}{\partial z}z + \frac{\partial S_z}{\partial q_1}q_1 + \cdots + \frac{\partial S_z}{\partial q_s}q_s\right) \qquad (33)$$

である。所で $q_1^0, \cdots, q_s^0$ は $\frac{\partial S}{\partial q_i}=0$ の根であることに注意すれば

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_z}{\partial z}\right)_{\substack{z=1 \\ q_j = q_j^0 \ (j=1,2,\cdots,s)}} \qquad (34)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{i1} q_1^0 - a_{i2} q_2^0 - \cdots - a_{is} q_s^0) P_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - q_1^0 \sum_{i=1}^{n} P_i x_i a_{i1} - q_2^0 \sum_{i=1}^{n} P_i x_i a_{i2} \cdots$$

$$\cdots q_s^0 \sum_{i=1}^{n} P_i x_i a_{is} \tag{35}$$

扨てこゝで

$$\xi_i = x_i - a_{i1} P_1 - a_{i2} P_2 - \cdots - a_{is} P_s \tag{36}$$

$$\eta_i = q_i - P_i \tag{37}$$

とおけば

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a_{i1} \eta_1 - a_{i2} \eta_2 - \cdots - a_{is} \eta_s)^2 P_i \tag{38}$$

となる.これを(32)式と比較して

$$\eta_i^0 = q_i^0 - P_i \tag{39}$$

とすれば前と同様の計算に依って

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} P_i \xi_i^2 - \eta_1^0 \sum_{i=1}^{n} P_i \xi_i a_{i1} - \eta_2^0 \sum_{i=1}^{n} P_i \xi_i a_{i2} -$$

$$\cdots - \eta_s^0 \sum_{i=1}^{n} P_i \xi_i a_{is} \tag{40}$$

所で

$$\mathcal{E}(\xi_i^2) = \mathcal{E}(x_i - \mathcal{E}(x_i))^2 = \sigma_i^2 = \frac{\sigma^i}{P_i} \tag{41}$$

$$\mathcal{E}(\xi_i \xi_j) = \mathcal{E}((x_i^0 - \mathcal{E}(x_i))(x_j - \mathcal{E}(x_j)) = 0 \tag{42}$$

(28),(36),(39)を用ひて

$$\eta_k^0 = \frac{1}{\Delta} \sum_{l=1}^{S} \Delta_{lk} \sum_{j=1}^{n} P_j \xi_j a_{jl} \tag{43}$$

従って,(41),(42)を用ひて

$$\mathcal{E}(\eta_k^0 \cdot \xi_i) = \frac{1}{\Delta} \sum_{l=1}^{S} \Delta_{lk} \sum_{j=1}^{n} P_j \mathcal{E}(\xi_j \xi_i) a_{jl}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell k} P_i \frac{\sigma^2}{P_i} a_{i\ell}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\Delta} \sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell k} a_{i\ell} \tag{44}$$

依つて

$$\mathcal{E}(S_0) = n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{\Delta}\Big[\sum_{i=1}^{S} P_i a_{i1} \sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell 1} a_{i\ell} + \sum_{i=1}^{n} P_i a_{i2} \sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell 2} a_{i\ell} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} P_i a_{is} \sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell s} a_{i\ell}\Big]$$

$$= \sigma^2\Big\{n - \frac{1}{\Delta}\Big[\sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell 1} G_{\ell 1} + \sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell 2} G_{\ell 2} + \cdots + \sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell s} G_{\ell s}\Big]\Big\} \tag{45}$$

所で

$$\sum_{\ell=1}^{S} \Delta_{\ell j} G_{\ell j} = \Delta \quad (j = 1, 2, \cdots, S) \tag{46}$$

であるから

$$\mathcal{E}(S_0) = \sigma^2(n - S) \tag{47}$$

これで（β）の證明が終る。

次に F, S_0 及び $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{P_i}$ を行列式で表はすことを考へよう。

$$H_j = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i a_{ij} \tag{48}$$

とおくと

$$F = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{S} b_k \sum_{j=1}^{S} \Delta_{jk} H_j \tag{49}$$

$$= -\frac{\Delta_\theta}{\Delta} \tag{50}$$

但し

$$\Delta_\theta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \\ H_1 & G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ H_2 & G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_s & G_{s1} & G_{s2} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix} \tag{51}$$

又

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 \tag{52}$$

とすれば

$$S_0 = \frac{1}{\Delta}\left\{H_0\Delta - H_1\sum_{j=1}^{s}\Delta_{j1}H_j - H_2\sum_{j=1}^{s}\Delta_{j2}H_j - \cdots - H_s \sum_{j=1}^{s}\Delta_{js}H_j\right\} = \frac{\Delta_0}{\Delta} \tag{53}$$

但し

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_s \\ H_1 & G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ H_2 & G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_s & G_{s1} & G_{s2} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix} \tag{54}$$

次に (24) の λ_i の値を用ひて

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{P_i} = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{i=1}^{n}P_i\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\sum_{j=1}^{s}b_j\Delta_{jk}\right)^2 \tag{55}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{P_i} = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{i=1}^{n}P_i\left\{\left[\sum_{j=1}^{s}b_j\sum_{k=1}^{s}\Delta_{jk}a_{ik}\right]\left[\sum_{l=1}^{s}b_l\sum_{m=1}^{s}\Delta_{ml}a_{im}\right]\right\} \tag{56}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{P_i} = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{s}b_j\sum_{l=1}^{s}b_l\sum_{k=1}^{s}\Delta_{jk}\sum_{m=1}^{s}\Delta_{ml}\sum_{i=1}^{n}P_i a_{ik}a_{im}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{l=1}^{s} b_l \sum_{k=1}^{s} \Delta_{jk} \sum_{m=1}^{s} \Delta_{ml} G_{mk} \tag{57}$$

$$\sum_{m=1}^{s} \Delta_{ml} G_{mk} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \Delta, & k = l \end{cases} \tag{58}$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{P_i} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{k=1}^{s} b_k \Delta_{jk}$$

$$= - \frac{\Delta_1}{\Delta} \tag{59}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \\ b_1 & G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ b_2 & G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2s} \\ & & \vdots & & \\ b_s & G_{s1} & G_{s2} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix} \tag{60}$$

依って分散の推定値は

$$\mu_F^2 = - \frac{\Delta_0 \Delta_1}{(n-s)\Delta^2} \tag{61}$$

§2. 上述の Markoff の定理の應用例

ある一つの確率変数 y が他の確率変数 x と相関し y の x に関する regression は linear であり且つ x を与へたときの y の分散は未知であるが有限でそれは x の値に無関係に σ^2 であるとする。そのとき $x = X$ のときの $Y(X)$ を estimate しようと云ふのである。大切なことは y が正規分布すると云ふことを仮定しないと云ふ点である。

先づ x の値例へば

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{1}$$

に対してyの値が測定され，これらの測定値は互に独立であるとする。吾々の問題は次の三点である。
(a) $Y(x)$ の best linear estimate $F(x)$ を求め，(b) $F(x)$ の分散の estimate $\mu^2_{F(x)}$ を求め，次に(c) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の如何なる系に対して$F(x)$が最も大なる正確度を有するか。

これに対して，Markoff の定理が直接に適用出来る様に問題を formulate しよう。(1)の各xに対して独立に測定されたyの値を

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n \tag{2}$$

とすれば，これが明かに前節の$x_1, \cdots x_n$の役をするから定理の條件(a)は満たされる。次に

$$\mathcal{E}(y_i)=p_1+p_2\,x_i \tag{3}$$

であるからp_1, p_2が unknown parameter で $s=2$である。定理のときと比較して

$$a_{i1}=1,\ a_{i2}=x_i \tag{4}$$

であるから，行列(5)は$x_1, x_2, \cdots, x_n$が皆等しくなければ階数2である。即ち定理の條件(b)(c)は満足される。

次にy_iの分散σ_i^2とすれば

$$\sigma_i^2=\frac{\sigma^2}{P_i} \tag{5}$$

でこのときは$P_i=1$，$i=1, 2, \cdots, n$であるから(d)もより。

最後に調べることは$Y(x)$がp_1, p_2の linear な

函数であるかと云ふことだがそれは$Y(X)$は$x=X$のときの平均値であるから

$$\theta = Y(X) = p_1 + p_2 X \tag{6}$$

で$b_1=1$, $b_2=X$である。依つてMarkoffの定理が適用出来るのである。

$$G_{11}=n,\ G_{12}=\sum_{i=1}^{n} x_i = G_{21},\ G_{22}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{7}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n\sigma_x^2 \tag{8}$$

更に又

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i,\quad H_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{9}$$

であるから

$$\Delta_\theta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & X \\ H_1 & G_{11} & G_{12} \\ H_2 & G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}$$

$$= -(H_1 G_{22} - H_2 G_{12}) + X(H_1 G_{21} - H_2 G_{11}) \tag{10}$$

$$= -n^2\left\{\sigma_x^2 \bar{y} + (X-\bar{x})\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}\right)\right\}$$

依つて

$$F(X) = \bar{y} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}(X-\bar{x}) \tag{11}$$

これはよく知られたregressionの方程式である。

次に$\mu_{F(X)}^2$を計算しよう。

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{12}$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \Sigma y^2 & \Sigma y & \Sigma xy \\ \Sigma y & n & \Sigma x \\ \Sigma xy & \Sigma x & \Sigma x^2 \end{vmatrix} \tag{13}$$

x, y の標本相関係数 r, $n\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ とし(13)の行列式で第二行を $\bar{y}$ 倍して第一行から引き次に第二行を $\bar{x}$ 倍して第三行から引くと

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} n\sigma_y^2 & 0 & nr\sigma_x\sigma_y \\ \Sigma y & n & \Sigma x \\ nr\sigma_x\sigma_y & 0 & n\sigma_x^2 \end{vmatrix} = n^3\sigma_x^2\sigma_y^2(1-r^2) \tag{14}$$

又

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & X \\ 1 & n & \Sigma x \\ X & \Sigma x & \Sigma x^2 \end{vmatrix} = 2X\Sigma x - nX^2 - \Sigma x^2 \tag{15}$$

$$= -n\left\{\sigma_x^2 + (X - \bar{x})^2\right\} \tag{16}$$

故に

$$\mu_{F(x)}^2 = -\frac{\Delta_0\Delta_1}{(n-2)\Delta^2} = \frac{\sigma_y^2(1-r^2)}{n-2}\left\{1 + \frac{(X-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}\right\} \tag{17}$$

(17) 式に依って(C)の答も出る。即ち $X = \bar{x}$ となし得ない場合には σ_x が最大のとき $\mu_{F(x)}^2$ が最小になる。