(48) 層化標本法ノ効用ノ限界ニツイテ

石　田　望

I. 無限母集團πカラノm'ケノ任意標本法ニヨツテ得ラレル平均 $\bar{x} = \frac{1}{m'}\sum_{i=1}^{m'} x_i$ ノ分布ヲ見レバ

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{m'}\sum_{i=1}^{m'} E(x_i) = a \qquad a\text{ハ母平均}$$

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{m'} = \frac{1}{m'}\sum_{i=1}^{k} p_i(\sigma_i^2 + (a_i - a))^2$$

コヽニ $p_i = P(X \subset \pi_i)$　σ_i ハ i 層ノS.Dデアル

一方 p_i ノ値ヲ知ツテ井テソレヲ用ヒテ層化任意標本法ニヨレバソノ平均

$$\bar{x}_R = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i m_i/m = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i p_i$$

（$\bar{x}_i$ハi層ノ平均）

ノ分布ヲ見レバ

$$E(\bar{x}_R) = \sum_{i=1}^{k} E(\bar{x}_i)p_i = \sum a_i p_i = a$$

（a_i ハ i 層母平均）

$$\sigma_{\bar{x}_R}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_{\bar{x}_i}^2 p_i^2 = \sum_{i=1}^{k} (\sigma_i^2/mp_i)p_i^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 p_i$$

トナツテ

$m = m'$ ノトキニハ

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_{\bar{x}_R}^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} p_i(a_i - a)^2$$

トナリ層化法ノ方ガ好マシイノデアル

又，今 π ガ有元母集團デアリ，抽出操作ガ一度ニm'ケ

同時ニ取リ出スモノデアルトソノ平均 $\bar{x}$ ノS.Dハ次ノ様ニナル。

任意法ノトキハ

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{m'}\left(\frac{N-m'}{N-1}\right) = \frac{N-m'}{m'(N-1)}\sum_{i=1}^{k} p_i\,(\sigma_i^2+(a_i-a)^2)$$

層化法ノトキハ

$$\sigma_{\bar{x}_R}^2 = \sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2 p_i^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma_i^2}{m_i}\left(\frac{N_i-m_i}{N_i-1}\right)p_i^2$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} p_i\sigma_i^2\left(\frac{(N-m)p_i}{Np_i-1}\right)$$

Nハ Π ノ總ケ數

$m = m'$ トスルト

$$\sigma_{\bar{x}}^2-\sigma_{\bar{x}_R}^2 = \frac{1}{m}\cdot\frac{N-m}{N-1}\sum_{i=1}^{k}p_i(a_i-a)^2+\frac{N-m}{m(N-1)}\sum_{i=1}^{k}p_i\sigma_i^2-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}p_i\sigma_i^2\left(\frac{(N-m)p_i}{Np_i-1}\right)$$

今Nガ充分大キク Np_i モ大キナトキニハ

$$\frac{1}{Np_i-1} \fallingdotseq \frac{1}{Np_i}$$ トシテヨイカラ

$$\sigma_{\bar{x}}^2-\sigma_{\bar{x}_R}^2 \fallingdotseq \frac{1}{m}\cdot\frac{N-m}{N}\sum_{i=1}^{k}p_i(a_i-a)^2+\frac{N-m}{mN}\sum p_i\sigma_i^2-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}p_i\sigma_i^2\left(\frac{(N-m)p_i}{Np_i}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{N-m}{N}\sum_{i=1}^{k}p_i(a_i-a)^2 \quad > 0$$

ココデ又 $\frac{m}{N}$ ガ充分ニ小サイトキハ $\frac{N-m}{N}\fallingdotseq 1$

サウナルト Π ガ無限母集團ノトキト同ジデアル。

ソコデ無限母集團ニツキ論ジテオケバ，Np_i ガ充分大キク，又 $\frac{m}{N}$ ガ充分小サイトキノ有限母集團ニ関シテモ適用出來ルワケデアル。シカシココデ注意シナケレバナラヌコトハ $\sum_{i=1}^{k}p_i(a_i-a)^2$ ガ非常ニ小サクソレニ比シ $\sum_{i=1}^{k}p_i\sigma_i^2$ ガ極端ニ大キイトキニハN,mニ関スル僅少ノ差モ全体ニ

大キク響イテクルノデコノ様ナ論法ハ成立シナイコトデアル

サテ，我々ハ層化法ヲ有利ト見ルワケデアルガ，ソレハ p_i ノ真ノ値ヲ知ツテヰルトキノコトデアツテ，我々ハ p_i ノ真ノ値ハコレヲ知ラナイノデアル。

ソコデ p_i ヲ知ルノニ次ノ三ツノ方法ガ考ヘラレル。

i) 母集團ノ全体ニ予備調査ヲ行ツテ p_i ノ真ノ値ヲ知ル法

ii) 他ノ何カノ資料ニヨリ p_i ヲ推定シテソレヲ代用スル法

iii) 母集団ヨリ n ケ任意標本ヲ取リソノ割合ヒデ p_i ヲ代用スル法

ソコデ，調査の總費用 C ヲ一定トシテ層化任意標本法ノ効用ノ限界ヲ見ヨウトイフワケデアル。

II. 母集団ノ全体ニ予備調査ヲ行ツテ p_i ヲ得ル方法

予備調査ノ一個体当リノ費用ヲ A．本調査ノソレヲ B トスルト ramdam sampling ニヨル sample ノ総数 m' ハ

$$C = Bm' \quad 従ツテ \quad m' = \frac{C}{B} \quad \cdots\cdots (2.1)$$

コレニ対シテ本方法デハ．

$$C = AN + Bm\,; \quad 従ツテ \quad m = \frac{C-AN}{B} \quad \cdots\cdots (2.2)$$

故ニ，勿論 $m' > m$ デアル

コノ場合ニ尚，本法ガヨイタメニハ

$$D=\sigma_{\bar{x}}^2-\sigma_{\bar{x}_R}^2=\frac{1}{m'}\sum_{i=1}^{k}p_i(\sigma_i^2+(a_i-a)^2)-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}p_i\sigma_i^2$$

$$=\frac{1}{mm'}(m\sum_{i=1}^{k}p_i(\delta a_i)^2-(m'-m)\sum_{i=1}^{k}p_i\sigma_i^2)>0$$

$$\sum_{i=1}^{k}p_i(\delta a_i)^2=\sum_{i=1}^{k}p_i(a_i-a)^2=P\quad \sum p_i\sigma_i^2=Q$$

トオク

$$D=\frac{1}{mm'}(mP-(m'-m)Q)>0 \quad \text{-----}(2.3)$$

(2.3) = (2.1)(2.2) ヲ代入

$$D=\frac{B}{C(C-AN)}((C-AN)P-QAN)$$

$$A(P+Q)N-CP<0$$

$$\therefore\quad N<\frac{CP}{A(P+Q)}\quad \text{------}(2.4)$$

Nガ (2.4)ヲ満足スル範囲内ニ於テノミ本法ハ任意標本法ニマサルコトガワカル。

III. p_i ノ推定値 $p_i+\delta p_i$ ヲ以テ代用スル方法

コレニヨル平均 $\bar{x}'_R=\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i(p_i+\delta p_i)$

$$E(\bar{x}'_R)=\sum E(\bar{x}_i)(p_i+\delta p_i)=\sum a_i(p_i+\delta p_i)$$

$$=\sum p_i a_i+\sum a_i\delta p_i$$

$$=a+\sum a_i\delta p_i=a+\Delta a \quad \text{----}(3.1)$$

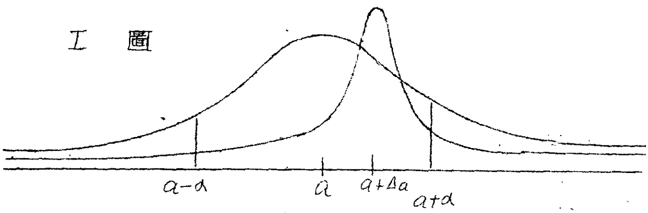
コレハ明カニ bias ヲ持ツテ得ルワケデアル

$$\sigma_{\bar{x}_R}^2=\frac{1}{m}\sum(p_i+\delta p_i)\sigma_i^2=\sigma_{\bar{x}_R}^2+\sum\delta p_i\cdot\sigma_i^2/m \quad \text{--}(3.2)$$

サテコレデ本法ト ramdam sampling 法トヲ比較スルワケデアルガ，前者ハ biased デアリ得ルノニ反シ後者ハ unbiased デアル。

デ仮リニ本法ニ於ケル方ガ S.D ガ小デアルトシテモソレダケデハ何トモ判定ハ出來ヌワケデアル。

下図ヲミルトソノ間ノ関係ガワカル　今適当ナ區間（$a-\alpha$



$a+\alpha$）ヲ取リソノ中ニ入ル面積ノ大小ヲ比較シ大キイ程ヨイ事トスル　ココデαノ取リ方ガ問題トナルガ，仮リニ　$\alpha=k\sigma_{\bar{x}}$ ト取リ（$a-k\sigma_{\bar{x}}, a+k\sigma_{\bar{x}}$）ノ中ニ入ル面積ヲ比較シヨウ。

今便利ノ爲ニ両方共 $m=0.\ \sigma=1$　ノ正規分布ニ直シテミル。

$N(a, \sigma_{\bar{x}})$ ノ方ハ（$a-k\sigma_{\bar{x}}, a+k\sigma_{\bar{x}}$）ガ（$-k, k$）トナル

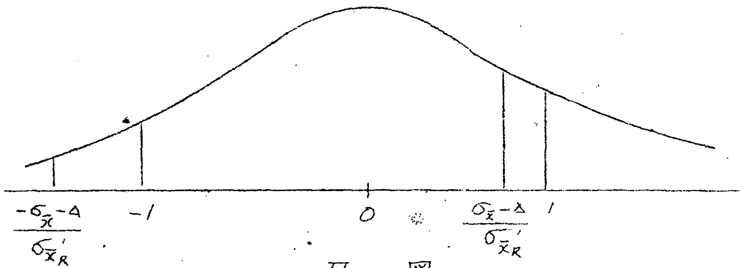
$N(a+\Delta a, \sigma'_{\bar{x}_R})$ ノ方ハ（$a-k\sigma_{\bar{x}}, a+k\sigma_{\bar{x}}$）ガ$\left(\frac{-\Delta a-k\sigma_{\bar{x}}}{\sigma'_{\bar{x}_R}}, \frac{-\Delta a+k\sigma_{\bar{x}}}{\sigma'_{\bar{x}_R}}\right)$ トナル

故ニ　（$-1, 1$）ノ面積ト$\left(\frac{-\Delta a-k\sigma_{\bar{x}}}{\sigma'_{\bar{x}_R}}, \frac{-\Delta a+k\sigma_{\bar{x}}}{\sigma'_{\bar{x}_R}}\right)$ノ面積トノ比較トナル。

先ヅ，コノ二ツノ區間ノ面積ノ等シイ所ヲ求メネバナラナイ。コレハ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x-2b}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ヲ満足スル x ヲ求メル問題デアル。コレハ $b > a$ ノトキ必ズ求マルハズデアルガ解析的ニハ求メルコトハ困難デ



II 図

アル。ソコデ $a=1$ トシタトキノ種々ノ $2b$ ニ対スル x ノ値ヲ表カラ求メルト次ノ様ニナル

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0.682690 \quad x \text{ ト等シクナル } x \text{ ノ値}\right)$$

$$\therefore 2b = 2a + \theta = 2 + \theta$$

θ	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
x	0.870	0.806	0.785	0.760	0.735	0.718	0.697	0.683	0.669	0.656
$1-x$	0.130	0.194	0.215	0.240	0.265	0.282	0.303	0.317	0.331	0.344

θ	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.36		∞
x	0.645	0.634	0.624	0.616	0.606	0.599	0.592	0.583		0.476
$1-x$	0.355	0.366	0.376	0.383	0.394	0.401	0.407	0.417		0.524

サテ今或ル費用デコノ $p_i+\delta p_i$ ノ知識ヲ得、ソノ残リデ本調査ヲ行ツタトスルト標本数 $m'>m$ デアル。

$$\sigma_{\bar{x}_R}^2 = \frac{1}{m}(Q+R) \qquad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{m'}(p+Q)$$

一方

$$\frac{k\sigma_{\bar{x}}-\Delta a}{\sigma_{\bar{x}_R}'} = \frac{k-\Delta}{\sigma_{\bar{x}_R}'/\sigma_{\bar{x}}} \qquad \Delta = \frac{\Delta a}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$$\sigma_{\bar{x}_R}'/\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{m'}{m}}\sqrt{\frac{Q+R}{P+Q}}$$

$$\therefore \quad \frac{k\sigma_{\bar{x}}-\Delta a}{\sigma_{\bar{x}_R}'} = \sqrt{\frac{m}{m'}}\cdot\frac{k-\Delta}{\sqrt{\frac{Q+R}{P+Q}}} = \sqrt{\frac{m}{m'}}\cdot\frac{k-\Delta}{\Delta'}$$

$$\Delta'^2 = \frac{Q+R}{P+Q}$$

$$2b = \sqrt{\frac{m}{m'}}\cdot\frac{2k}{\Delta'}$$

$k=1$ ノトキニハ $\qquad \theta = \sqrt{\frac{m}{m'}}\cdot\frac{2}{\Delta'}-2$

$$x = \sqrt{\frac{m}{m'}}\cdot\frac{1-\Delta}{\Delta'}$$

デ，θ，x ヲ表ニ入レテ見テ可否ヲ見レバヨイ。コノ場合，同ジ θ，x ニ対シテハ x，θ ガ大キイ方ガヨイ。

IV. p_i ヲ n ケノ任意標本ニヨル予備調査ニヨツテ推定スル法

費用ハ　任意標本法　$C = Bm'$

　　　　本　　法　$C = An+Bm$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{m'}(P+Q) \qquad \sigma_{\bar{x}_R}'^2 = \frac{1}{m}Q+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2 p_i$$
$$= \frac{1}{m}(Q+R)$$

次ニRハ確率変数デアル

一方 $\Delta a = \sum_{i=1}^{k} (a_i - 1)\delta p_i$ モ亦確率変数デアルカ

ラ、ソノ分布ヲ調ベネバナラナイ。

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \delta p_i\right) = 0.$$

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \delta p_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 p_i q_i - 2\sum_{i \neq j} a_i a_j p_i p_j\right)$$

$$= \frac{1}{n} S^2 \quad (1 - p_i = q_i)$$

又 $E\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \delta p_i\right) = 0$

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \delta p_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^4 p_i q_i - 2\sum_{i \neq j} \sigma_i^2 \sigma_j^2 p_i p_j\right)$$

$$= \frac{1}{n} T^2$$

ソコデ，R，Δa ノ代リニ各々ソノ標準偏差ノt倍ヲ取ッテオサヘルコトニスル

スナハチ，

$$\Delta = \frac{tS}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{n}} \qquad \Delta' = \frac{Q - \frac{tT}{\sqrt{n}}}{P + Q}$$ トシテ

$$\theta = \sqrt{\frac{n}{m'}} \cdot \frac{2k}{\Delta'_{-2k}} = \sqrt{\frac{C - An}{C}} \cdot \frac{2k}{\Delta'} - 2k$$

$$x = \sqrt{\frac{m}{m'}} \cdot \frac{k - \Delta}{\Delta'} = \sqrt{\frac{C - An}{C}} \cdot \frac{k - \Delta}{\Delta'}$$

デ，nヲ入レテミテ θ, x ヲキメ表ト合ハセテ可否ヲ

決定シ適当なnヲ求メレバヨイノデアル。

V 実例

$p_1 = \frac{1}{4} \qquad p_2 = \frac{1}{2} \qquad p_3 = \frac{1}{4}$

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 3 \qquad a_3 = 6 \qquad a = 3.25$

$\sigma_1 = 1 \qquad \sigma_2 = 2 \qquad \sigma_3 = 4$

$A = 1 \qquad B = 4 \qquad C = 500$

$$P = \sum_{i=1}^{k} p_i (a_i - a)^2 = 3.19$$

$$Q = \sum^{k} \sigma_i^2 p_i = 6.25$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 p_i q_i - 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j p_i p_j = 0.5625 \quad S = 0.75$$

$$T^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^4 p_i q_i - 2 \sum_{i \neq j} \sigma_i^2 \sigma_j^2 = 24.6875$$

$T = 4.96$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{m'} (p + Q) = \frac{9.4375}{125} \qquad \sigma_{\bar{x}} = 0.20$$

$$\Delta = \frac{tS}{\sigma_{\bar{x}} \sqrt{n}} \qquad \Delta' = \frac{Q + \frac{tT}{\sqrt{n}}}{p + Q}$$

$$\theta = \sqrt{\frac{C - An}{C} \cdot \frac{2k'}{\Delta'}} - 2k' \qquad x = \sqrt{\frac{C - An}{C} \cdot \frac{2k' - \Delta}{\Delta'}}$$

$k' = 1$ トシ　$t = 1$ トシタラ

$n = 196$ トスルト　$\theta = 0.14$　$x = 0.72$

トナッテ　コレハ任意標本法ヨリヨイ。シカシ $t=2$ トスルトモウ悪クナル。

又，n ヲ大キクシテモ小サクシテモ悪クナルバカリデアル。ツマリ，P ガ大キク Q ガ小サイノデコレハ結果ガ悪イダラウトイフコトハ予測出來ルノデアル。

以上