㉕ 報知高

兼所員　伊藤　清

§1 報知高の定義

平均値mの正規母集団から独立に見本$x_1, x_2, \cdots, x_n$をとり出した時、見本をそのまゝの報告と、その平均値のみの報告との間にmに関する知識として差があるかどうか。いふまでもなく前者を得ると、後者はそれから計算し得られるから、前者が後者と同程度又はそれ以上の報告價値があることは確かであるが、真に前者が優れてゐるといへるかどうか、こういふ比較をする爲に報知高といふ概念を導入する。

一般に観測値$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$があつて、その分布法則の確率密度を、$p(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m)$とする　$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$は補助変数である。$p$は各$\theta_\mu$に関して二回迄連続的微分可能で、$p \neq 0$なる$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$の集合は$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$に無関係とし、$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$はこの集合の上のみを動くとする、我々の目的は$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$に関する推定である、今この観測値の函数（統計量）$s_1, s_2, \cdots, s_k$に対して次の定義をする。

定義1[(1)]　$s_1, s_2, \cdots, s_k$が互に函数関係のない統計量とし、その分布密度を$g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k, \theta_1, \cdots \theta_m)$とする、この時

(1) $I(s_1; s_2, \cdots s_k) = \mathcal{E}\left\{\sum_\mu \left(\frac{\partial}{\partial\theta_\mu}\log g(s_1 \cdots s_k, \theta_1 \cdots \theta_m)\right)^2\right\}$

を $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_k$ の報知高と云ふ．$\mathcal{E}$ は期望値を表はす．

この定義は確率密度のある分布についてなされておる。しかし $(x_1, x_2 \cdots x_n)$ の分布が純粋不連続で $(\xi_1 \cdots \xi_n)$ になる確率が $p(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \theta_1 \cdots \theta_m)$ の場合にも上と同様な條件の下に報知高が定義出来る。以後確率密度のある分布について説明するが、他の場合についても同様である。

定理 1 $\quad I = -\sum_\mu \mathcal{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_\mu^2}\log g(s_1, s_2, \cdots, s_k, \theta_1, \cdots\cdots, \theta_m)\right\}$

証明、一般の場合も同様であるから、$m=1$ の場合に証明する．θ_1 を単に θ であらはす

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log g) = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{g_\theta}{g} = \frac{g_{\theta\theta}}{g} - \left(\frac{g_\theta}{g}\right)^2 = \frac{g_{\theta\theta}}{g} - \left(\frac{\partial \log g}{\partial\theta}\right)^2$$

$$\mathcal{E}\left(\frac{\partial \log g}{\partial\theta}\right)^2 = \mathcal{E}\left(\frac{g_{\theta\theta}}{g}\right) - \mathcal{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\log g)\right\}$$

右辺の第一項 $= \int \cdots \int \frac{g_{\theta\theta}(\sigma_1 \cdots \sigma_k \theta)}{g(\sigma_1 \cdots \sigma_k \theta)} g(\sigma_1 \cdots \sigma_k \theta)\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_k$

$$= \int \cdots \int g(\sigma_1, \cdots, \sigma_k, \theta)\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_k$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int \cdots \int g(\sigma_1, \cdots, \sigma_k, \theta)\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_k$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \cdot 1 = 0$$

§2. 報知高の性質

定義から明らかに

<u>定理 1</u>　$I(s_1, s_2, \cdots, s_k)=0$ なる為に必要且つ十分なる條件は $(s_1 \cdots s_k)$ の分布が $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m$ に無関係な事である。

$s_1 \cdots s_k$ の分布が θ に無関係であれば, $s_1, s_2, \cdots, s_k$ が如何なる値をとるとも, それによつて $\theta_1 \cdots \theta_m$ に就て何等の推定をなす端緒も得られないので、その時報知高が 0 となるのは、報知高の名にふさはしい、

---

(1) この定義は $m \leqq 2$ の場合 Fischer の定義とは異るが、これの方が簡単で而も適当なやうに思はれる。

<u>定理 2</u>　$(s_1, s_2, \cdots, s_k)$ と $(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ とが $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ に無関係な対応で一対一に対応する時には、$I(s_1 \cdots s_k)=I(t_1 \cdots t_k)$

証明　$m=1$ の場合に証明する、θ_1 を θ であらはす

$$t_K=\varphi_K(s_1 \cdots s_k) \qquad K=1, 2, \cdots, k$$

とし、$\varphi_1 \cdots \varphi_k$ の函数行列式を Φ とする、$(s_1 \cdots s_k)$, $(t_1, \cdots t_k)$ の分布密度を夫々 $g(\sigma_1 \cdots \sigma_k, \theta)$, $h(\tau_1, \cdots \tau_k, \theta)$ とすると、

$$h(\varphi_1(\sigma_1 \cdots \sigma_k), \cdots, \varphi_k(\sigma_1 \cdots \sigma_k), \theta)\Phi(\sigma_1 \cdots \sigma_k)=g(\sigma_1, \cdots, \sigma_k, \theta).$$

$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ に夫々 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ を代入して

$h(t_1, \cdots, t_k, \theta)\,\Phi(s_1 \cdots s_k) = g(s_1, \cdots, s_k, \theta)$

$\Phi(s_1 \cdots s_k)$ が θ を含まないことに注意して

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log h(t_1, \cdots, t_k, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log g(s_1, \cdots, s_k, \theta)$$

故に　$I(t_1, \cdots, t_k) = I(s_1, \cdots, s_k)$　証明終

この定理の仮定の下では $(s_1, \cdots s_k)$ を知ることと、$(t_1, \cdots t_k)$ を知ることとは、同等であるから、両者の報知高の等しいといふ結論は報知高の名称を裏書きするものである。

<u>定理 3</u>　$I(s_1, s_2, \cdots s_l) = I(s_1, s_2, \cdots, s_k) + \mathcal{E}\, I_{s_1, \cdots s_k}(s_{k+1}, \cdots, s_l) \geqq I(s_1, \cdots s_k)$.

茲に $I_{s_1, \cdots s_k}(s_{k+1}, \cdots, s_l)$ は $s_1, s_2, \cdots s_k$ が定められたといふ條件の下に於ける $s_{k+1}, \cdots, s_n$ の確率分布密度について考へた報知高である、

又上の最後の不等式で、特に等式の成立するのは $s_1\, s_2 \cdots s_k$ の定まったといふ條件の下に於ける $s_{k+1}, s_{k+2}, \cdots, s_n$ の確率法則が θ を含まない事である.

証明、$m = 1$ の場合に証明する、$s_1, s_2, \cdots, s_l$ の確率分布密度を $f(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l, \theta)$ とし、$s_1, s_2, \cdots, s_k$ の確率分布密度を $g(\sigma_1, \cdots, \sigma_k, \theta)$ とすると.

$$h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l, \theta)\, d\sigma_{k+1}\, d\sigma_{k+2} \cdots d\sigma_l = \frac{f(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_l, \theta)}{g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_k, \theta)}\, d\sigma_{k+1}\, d\sigma_{k+2} \cdots d\sigma_l$$

は $s_K = \sigma_K,\ K = 1, 2, \cdots, k$ なる條件の下に於ける

$s_{k+1}, \cdots s_l$ の確率分布密度である。

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log h(\sigma_1, \cdots \sigma_k, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(\sigma_1, \cdots, \sigma_l . \theta)$$

$$I(s_1, s_2, \cdots, s_l) = I(s_1 \cdots s_k) - \mathcal{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log h(s_1 \cdots, s_l, \theta)\right)$$

$$= I(s_1 \cdots s_k) - \mathcal{E}\,\mathcal{E}_{s_1 \cdots s_k}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log h(s_1, \cdots, s_l, \theta)\right)$$

茲に $\mathcal{E}_{s_1 \cdots s_k}$ は $s_1, s_2, \cdots s_k$ を定めたといふ條件の下に於ける数学的期望値を示す、故に結局

$$I(s_1 \cdots s_l) = I(s_1 \cdots s_k) + \mathcal{E} I_{s_1 \cdots s_k}(s_{k+1}, \cdots, s_l) \geqq I(s_1 \cdots s_k)$$

等式の成立するのは $\mathcal{E} I_{s_1, \cdots s_k}(s_{k+1} \cdots s_l) = 0$、故に定理1により、本定理の後半を得る。

定理3により、新しい統計量を導入すれば、一般に報知高は増すが、もとの統計量が定まったといふ條件の下に於ける導入統計量の（條件附）確率法則が未知常数 θ を含まない場合には、報知高は増加しない。この定理から直ちに次の定理が得られる。

<u>定理4</u>　$(s_1 \cdots s_k)$ と $(s_{k+1}, \cdots s_l)$ とが独立ならば $I(s_1, s_2, \cdots, s_l) = I(s_1, \cdots, s_k) + I(s_{k+1}, \cdots, s_n)$

特に $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_k$ が独立ならば

$I(s_1, s_2, \cdots, s_k) = I(s_1) + I(s_2) + \cdots I(s_n)$、

§2. 充足統計量

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を観測値とし、$s_1, s_2, \cdots, s_k$ をこれから導かれた互に函数関係のない統計量とする。

定理 1　$I(s_1, s_2, \cdots, s_k) \leqq I(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

特に等式の成立するのは $s_1, s_2, \cdots, s_k$ が定まった場合の $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の分布法則が補助変数 $\theta_1, \cdots, \theta_m$ に無関係な事である。

証明　$m=1$ の場合に証明することにし、θ_1 を θ であらはす。$s_1, \cdots, s_k$ に $s_{k+1}, \cdots, s_n$ なる統計量を補って $(s_1, \cdots, s_n)$ と $(x_1, \cdots, x_n)$ とが補助変数に無関係な対応で一対一に対応するやうにする。

前節の定理2及び3により、

$$I(x_1, \cdots, x_n) = I(s_1, \cdots, s_n) \geqq I(s_1, \cdots, s_k)$$

故に本定理の前半を得る。等式が成立するのは、$s_1, \cdots, s_k$ が定まった時に於ける $s_1, \cdots s_n$ の分布法則が補助変数に無関係な場合であるが、これは、$x_1 \cdots x_n$ と $s_1, \cdots s_n$ とが補助変数に無関係な対応で一対一に対応することから、$s_1 \cdots s_k$ が定まった時に於ける $x_1, \cdots x_n$ の分布法則が補助変数を含まない場合といふことが出来る。

定理1により、観測値系 $(x_1 \cdots x_n)$ が最大の報知高を有する事が分った。報知高は定義により負ではない。故に

$$0 \leqq \frac{I(s_1 \cdots s_k)}{I(x_1 \cdots x_n)} \leqq 1$$

定義１　$E(s_1 \cdots s_k) = \dfrac{I(s_1 \cdots s_k)}{I(x_1 \cdots x_n)}$

を $s_1 \cdots s_k$ の效率といふ。

観測値系の分布法則の補助変数 $\theta_1, \theta_2 \cdots, \theta_m$ があるとする。

定義２　補助変数の数に等しい統計量系 t_1, t_m があつて、その効率が１に等しい時充足統計量系といふ。

(t_1, t_m) が充足統計量系ならば、上の定理１後半により、$t_1, t_2, \cdots, t_m$ が知られたといふ條件の下に於ける観測値 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の（條件附）分布法則は $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ を含まないから、$t_1, \cdots, t_m$ が知られた以上 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を知つて見ても、未知常数に関する新しい知識となり得ない、即ち $t_1, \cdots, t_m$ を知れば十分なので、充足統計量系の名もこの点に由来する、

定理２　$t_1, \cdots, t_m$ が $\theta_1 \cdots \theta_m$ の充足統計量系である為の必要且つ十分な條件は、観測値 $x_1 \cdots x_n$ の分布密度を $f(\xi_1, \xi_2, \xi_n, \theta_1 \cdots \theta_m)$ が、

(1)　$f(x_1 \cdots x_n, \theta_1 \cdots \theta_m) = g(t_1, \cdots, t_m, \theta_1 \cdots \theta_m)\, h(x_1 \cdots x_n)$

なる形になることである、

<u>証明</u>　$t_\mu=\varphi_\mu(x_1\cdots x_n),\ \mu=1,2,\cdots,m$ とする。

先づ(1)が成立すれば、$t_1\cdots t_m$ の分布法則を

$k(t_1,\cdots,t_m,\theta_1,\cdots,\theta_m)$ とすれば、

$$k(\tau_1\cdots\tau_m,\theta_1\cdots\theta_m)d\tau_1\cdots d\tau_m=\int\cdots\int f(\xi_1\cdots\xi_n,\theta_1\cdots\theta_m)d\xi_1\cdots d\xi_m$$

$$\left(\begin{array}{c}\tau_\mu<\varphi_\mu(\xi_1\cdots\xi_n)<\tau_\mu+d\tau_\mu\\ \mu=1,2,\cdots,m\end{array}\right)$$

$$=g(\tau_1,\cdots,\tau_m\theta_1\cdots\theta_m)\int\cdots\int h(\xi_1\cdots\xi_n)d\xi_1\cdots d\xi_m.$$

$$\left(\begin{array}{c}\tau_\mu<\varphi_\mu(\xi_1\cdots\xi_n)<\tau_\mu+d\tau_\mu\\ \mu=1,2,\cdots,m\end{array}\right)$$

$$=g(\tau_1\cdots\tau_m\theta_1\cdots\theta_m)S(\tau_1\cdots\tau_m)d\tau_1\cdots d\tau_m$$

故に　$f(x_1\cdots x_n,\theta_1\cdots\theta_m)=k(t_1\cdots t_m,\theta_1\cdots\theta_m)\dfrac{h(x_1\cdots x_n)}{S(t_1\cdots t_m)}$

故に　$I(x_1\cdots x_n)=I(t_1\cdots t_m)$

故に　$t_1\cdots t_m$ は充足統計量系である。

逆に　$t_1\cdots t_m$ が充足統計量系とする。

$t_1\cdots t_m$ に $t_{m+1}\cdots t_n$ を附加して $(x_1\cdots x_n)$ と $(t_1\cdots t_n)$ とが一対一に対応するやうにする、然らば $t_1\cdots t_m$ の充足性により

(2)　$I(t_1\cdots t_m)=I(x_1\cdots x_n)$

又 $(x_1\cdots x_n)$ と $(t_1\cdots t_n)$ とが一対一に対応す

るから

(3) $\qquad I(x_1 \cdots x_n) = I(t_1 \cdots t_n)$

故に

(4) $\qquad I(t_1 \cdots t_m) = I(t_1 \cdots t_n)$

$(t_1 \cdots t_m)$, $(t_1 \cdots t_n)$ の分布密度を夫々 $g(\tau_1 \cdots \tau_m, \theta_1, \cdots, \theta_m)$, $p(\tau_1, \cdots, \tau_n, \theta_1 \cdots \theta_m)$ とする。$(x_1 \cdots x_n)$ と $(t_1 \cdots t_m)$ とが一対一に対応するから、

(5)
$$f(x_1 \cdots x_n, \theta_1 \cdots \theta_m) = p(t_1 \cdots t_n, \theta_1 \cdots \theta_m)\,\Phi(x_1 \cdots x_n) \qquad \Phi(x_1 \cdots x_n) = \frac{\partial(t_1 \cdots t_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}$$

次に (4) により $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2 \cdots$, $t_m = \tau_m$ という条件の下に於ける $(t_{m+1} \cdots t_n)$ の分布法則は、$\theta_1 \cdots \theta_m$ に無関係。即ち

(6)
$$\frac{p(\tau_1, \cdots, \tau_n, \theta_1 \cdots \theta_m)}{g(\tau_1 \cdots \tau_m, \theta_1 \cdots \theta_m)} = \Psi(\tau_1 \cdots \tau_m)$$

故に
$$\begin{aligned} f(x_1 \cdots x_n, \theta_1 \cdots \theta_m) &= g(t_1 \cdots t_m, \theta_1 \cdots \theta_m)\,\Phi(x_1 \cdots x_n)\,\Psi(t_1 \cdots t_m) \\ &= g(t_1 \cdots t_m, \theta_1 \cdots \theta_m)\,h(x_1 \cdots x_m) \end{aligned}$$
$$h(x_1 \cdots x_n) = \Phi(x_1 \cdots x_n)\,\Psi(t_1 \cdots t_m)$$

充足統計量系が存在する時、これを見出すにはどうすればよいか、

<u>定理 3</u> 充足統計量系が存在するならばその一つは最大尤度法で求められる。

証明 $t_1 \cdots t_m$ を一つの充足統計量系とすれば、

定理2により $f(x_1\cdots x_n,\theta_1\cdots\theta_m)=g(t_1\cdots t_m,\theta_1\cdots\theta_m)\cdot h(x_1\cdots x_n)$

故に最大尤度法によって

$\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_m$ を求めると、

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\mu}f(x_1\cdots x_n,\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_m)=0$$

故に

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\mu}g(t_1\cdots t_m,\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_m)=0\quad \mu=1,2,\cdots,m$$

これを解いて

$$t_\mu=t_\mu(\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_m)\quad \mu=1,2,\cdots,m$$

故に $f(x_1\cdots x_n,\theta_1\cdots\theta_m)=g(t_1(\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_m),\cdots,t_m(\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_m),\theta_1\cdots\theta_m)\cdot h(x_1\cdots x_n)$

故に $\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_m$ も充足統計量系である。

§4 Koopman の定理

$p(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ なる分布密度を持つた n 次元母集団からの大きさ N の任意見本 $(x_{11}\cdots x_{1n}),(x_{21}\cdots x_{2n}),\cdots,(x_{N1}\cdots x_{Nn})$ を観測値と考へる時、充足統計量系が存在する為の必要十分條件は、p が

(1) $\log p(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,\theta_1,\cdots\theta_m)=\sum_{\mu=1}^{m}M_\mu(\theta_1\cdots\theta_m)X_\mu(\xi_1\cdots\xi_n)+N(\theta_1\cdots\theta_m)+Y(\xi_1\cdots\xi_n)$

なる形に書かれる事である、

証明　無駄な複雑さを避ける為に $\hat{n}=n=1$ とする、p は $p(\xi,\theta)$ で見本は $x_1,x_2,\cdots,x_N$ となり條件(1)は

(1) $\log p(\xi,\theta)=M(\theta)X(\xi)+N(\theta)+Y(\xi)$ の

形となる、観測値系の分布密度は

$\prod_{\nu=1}^{N} p(\xi_\nu,\theta)$ である、今

(2) $t=\varphi(x_1,\cdots,x_N)$

が效率1の統計量とし、その分布密度を $f(t,\theta)$

であらはす、前節定理2により

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\prod_{\nu=1}^{N}p(x_\nu,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(t,\theta)$$

故に

(3) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x_\nu,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(t,\theta)$

さて

(4) $g(\xi,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(\xi,\theta)$, $\Phi(t,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(t,\theta)$

と置いて(3)を書きかへると、

(3') $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{N}g(x_\nu,\theta)=\Phi(t,\theta)$

$\theta=\theta_0$（常数）と置いて、$\displaystyle\sum_{\nu=1}^{N}g(x_\nu,\theta_0)=\Phi(t,\theta_0)$

これを t について解いて

$$t=\Psi\left(\sum_{\nu=1}^{N}g(x_\nu,\theta_0)\right)$$

今　$H(\sigma,\theta)=\Phi(\Psi(\sigma),\theta)$ とすれば(3')から

$$\sum_{\nu=1}^{N} g(x_\nu, \theta) = H\left(\sum_{\nu=1}^{N} g(x_\nu, \theta_0), \theta\right)$$

上の式を x_1 で微分し、$\frac{\partial H}{\partial \sigma}(\sigma,\theta)$ を $K(\sigma,\theta)$ であらはすと、

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, \theta) = K\left(\sum_{\nu=1}^{N} g(x_\nu, \theta_0), \theta\right) \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, \theta_0)$$

K は $x_1 \cdots x_n$ の対称函数であり、左辺及び $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, \theta_0)$ は x_1 のみの函数であるから、K は θ のみの函数でなければならない。これを $M_1(\theta)$ とし、x_1 のみの函数 $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, \theta_0)$ を $X_1(x_1)$ とすれば、

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, \theta) = M_1(\theta) X_1(x_1)$$

故に

$$g(x_1, \theta) = M_1(\theta) X(x_1) + N_1(\theta)$$

$$X(x_1) = \int X_1(x_1)\, dx_1$$

$$g(\xi, \theta) = M_1(\theta) X(\xi) + N_1(\theta)$$

これを θ について積分すると、

$$\log p(\xi, \theta) - M(\theta) X(\xi) + N(\theta)$$

$$M(\theta) = \int M_1(\theta)\, d\theta, \quad N(\theta) = \int N_1(\theta)\, d\theta$$

偖て逆に $p(\xi, \theta)$ が $(1')$ で与へられる時

$t \equiv \sum_{\nu=1}^{N} X(x_\nu)$ が效率が 1 であることを示す。

観測値 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の分布密度は $\prod_{\nu=1}^{N} p(\xi_\nu, \theta)$ であって

$$\prod_{\nu=1}^{N} p(x_\nu,\theta)=\exp\left(\sum_{\nu=1}^{N}X(x_\nu)M(\theta)+\sum_{\nu=1}^{N}Y(x_\nu)+N(\theta)\right)$$
$$=\exp(tM(\theta)+N(\theta))\exp\left(\sum_{\nu=1}^{N}Y(x_\nu)\right)$$

故に前節定理2により t は充足統計量である、

§5 單純統計假説に対する一様最良棄却域

測度値 $x_1\cdots x_n$ の分布法則を P_θ その密度を $f(\omega,\theta)$, $\omega=(\omega_1\cdots\omega_n)$ であらはす、

今 $\theta=\theta_0$ なる單純仮説の検定を考へて見る、

定理1　仮説 $\theta=\theta_0$ に対する大きな α の棄却域の中で、対立仮説 $\theta=\theta_1$ に対する第二種の誤差の最小なるものは

(1)　$$D_k\equiv\left\{\omega;\frac{f(\omega,\theta_0)}{f(\omega,\theta_1)}\leqq k\right\}$$

(k は $P_{\theta_0}(D_k)=\alpha$ によって定められる常数)

である。