第5號

13、これくていふ序説（I）

林　知己夫

これくていふに関する基礎的な事柄に就て考へた事、思つた事を順次に描いてみる積りである。先づ其の存在を指してみることにした。

§ 、其の形成

これくていふ、の思想萌芽は前世紀末乃至は今世紀當初 *H.Bruns**, *Fechner**2 の書に仄かに認められるのではあるが無規則性（*Regellosigkeit*）を其本質として偶然の一表現を試みようとする美しい象徴的なこれくていふ、の思想は *Richard Von mises* に依つて1919年の *math Zeit* に始めて発表せられたものである。此の雄渾秀抜な理論にも其の常として多少の缺陥があつた。此の点は1931年の書物及其以後の論説に於て改められた形の下に表現せられてゐる。今此を映してみよう。
試行の繰返しを観察する事によつて生じた標識系列を $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$ とする標識と言ふのは *merkmal, attribute, label, caractere distinctif* の訳語であつて各試行を特色つける所一我の欲する現象記述に適合して定められるのであ——の象徴であり試行結果を一意的に明確に表現するものでなくてはならない。此は k 個の実数の組乃至は k 次元空間の一点として表現せられる。（此の空間は標識空間と呼ばれる）。
此処に *Kollektiv* なる思想を導入し確率なる数値は

Kollektiv の中に於てのみ意味をもつと言ふのである。*Kollektiv* とは何か。標識系列 $m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots$ が次の性質をもつときAに関し確率 p_A をもつ *Kollektiv* であると定義するのである。

① 標識空間内の点の任意の部分集合をAとする。

$m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$, の中Aなる標識を示すものゝ数を n_A とするとき 此の相対頻度即ち n_A/n が n が増すとき一定の極限値をもつ。言ひかへれば

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = p_A \quad \text{が存在する}$$

第二の性質をのべる前に選出行為 (*Stellenauswahl*, *place selection*, *choix de position*) を考へなくてはならない。今原標識系列から部分系列 $m_{i_j}, m_{i_{j+1}}, m_{i_{j+2}} \cdots\cdots$ を選出するに当つて次の様な規則に従つて之を行ふものとする時此が選出行為と称せられるものである。

先づ m_1 を選出するか選出せぬかを m_1 の標識を使用することなく決定しなければならない。次に m_i 迄は選出如何が決められたとして m_{i+1} を選出するかどうかを決定するのである。此の決定は m_{i+1} の標識を使用することなく m_1, $\cdots m_i$ 迄の標識観測結果を知つた時 (m_{i+1}, $m_{i+2} \cdots\cdots$ については其の標識如何は観測されてゐないと考へるべきである。) 高々其れ迄の観測結果を利用して予め定められたる法則に従つて (其の観測結果を全く使用しなくとも差支へないのであるが ($i+1$) 番目の行為として選出するか否かの行為をせねばならぬと言ふ意味を含むである) 行はれる

---

*1 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre 1906

*2 Kollektivmasslehre 1897 (前頁参照)

のである。従つて此の選出行為を固定的に表現してみるならば例へばある算術法則又は同一の標識を示した時次のものを選出する等の法則乃至はj番目（予め定む）のものが標識Bを示した時次のものを選出する等の法則による選出方法を示してあるのであるが、此は其の真意伝へるものでなく定義よりするも飽く迄人間の身体的行為として了解せられねばならない。

② $m_1, m_2, \cdots\cdots$なる標識系列の中から$p_A \neq 0$, $p_B \neq 0$を示す様な共通部分なき標識空間内の任意の部分集合A Bを持つてあるものを抽出する。此の抽出された系列にある任意の選出行為を施して得られた系列に於ても常にA, Bの相対頻度が存在して（此をp_A', p_B'とする）且

$$p_A' : p_B' = p_A : p_B \text{ が成立する}$$

misesは後々理論を進展し易くするために此の様な要求をしたのであるがWaldは此と等価な次の様な性質を挙げて居りmisesも亦此を認め爾後此の方を採用して居る

②' $m_1, m_2, \cdots\cdots$よりある任意の選出行為により得られた種々の部分系列（有限で切れることのないもの）に於て常に標識Aを示すものの相対頻度の極限値が不変である。即ちp_Aに等しい。

註[1] ある任意のは総てので置換しても差支へがない。ある任意と云ふも"all"の積りであることはmisesの"Probability, Statistics and Truth"に明らかである。

註[2] ② ⇄ ②' の証明は簡単である。

以上①②（或は②'）の性質をもつKollektivから新しいKollektivを這般の事情を考察した上で四つの操作1選出

行為、2、混成行為、3分離（縮退）行為、4結合行為により誘導し其処に於ける確率分布を求むべく理論を建立してゐるのである。

然し此に対して異議が唱へられた。
①に対してはCantelli の誤解（Bernoulli の定理の誤れる解釈 此と極限値存在との混同）ある外目立つものはなかつたが ②に対しては"総ての"を繞つて意見が沸騰した。すべての Stellenauswahl であるから必ず$\{\alpha_i\}$ $i=1,2,\cdots\cdots$）なる自然数は一つのStellenauswahl をなしてゐる筈であり又此の$\{\alpha_i\}$が$m_1, m_2, \cdots\cdots$の中標識Aを示すものの番号のみをもつてゐる事もあり得る筈である。さうすると$\{\alpha_i\}$なるStellenauswahl より得られた部分系列に於てはAの極限値は1になつて了ふ従つて②'をみたすものは存在しないと言ふのである。
此はすべての　と云ふ言葉の中に問題があるのであり此の様な抗議に就て私はMises, Waldとは別様にStellenauswahl なる（ロゴス）そのものの本質を見失つた意味の概念的濫用の結果と考へる（後述）のであるがMises はすべてのと言ふのは：欲求するある具体的問題群の解決にあたつて使用するすべての種類の：したがつて必然的に高々可附番個なるべき：の意味である形式的に解釈したすべての意味ではないと言ふ、すべての選出行為とは我々の使用する種々なる可附番個の選出行為であると謂ふ
此のMises の考へを踏襲して数学的にKollektiv の存在を構成的に證明してゐる、

§ 存在の構成的證明を繞つて

先づ定義よりのべてみなければならない。

M ： 標識空間

L ： 其の部分集合

A ： $m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots$ なる標識系列

$H_n(L, A)$ ： $m_1, \cdots\cdots, m_n$ 中 L なる標識を示すものの数 n_A を n で割つたもの

$$H_n(L, A) = n_A / n$$

次に選出行爲を数学的に表現するのである。此の一つの選出行爲は函数列 $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots = \{f_n\}$ によつて次の様に表現せられる。f_n は $(m_1, \cdots\cdots, m_n)$ の函数であり（$n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$）0又は1のみをとるものとする、なほ* $m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots, m_n, \cdots\cdots$ なる原標識系列から $f_1(m_1), f_2(m_1, m_2), \cdots\cdots, f_n(m_1, \cdots\cdots m_n), \cdots\cdots$ なる系列（0, 1 よりなる系列）をつくる。そして $f_i(m_1 \cdots\cdots m_i) = 1$ なるとき m_{i+1} を選出し、$f_i(m_1 \cdots\cdots m_i) = 0$ なるとき m_{i+1} を選ばぬものと解釈するならば $f_1(m_1), \cdots\cdots f_n(m_1, \cdots\cdots m_n), \cdots\cdots$ を眺めることにより $m_1, m_2, \cdots\cdots\cdots$ なる原系列から部分系列 $m_{i_1}, m_{i_2}, m_{i_3}, \cdots\cdots\cdots$ をつくる事が出来る、此は原系列から $\{f_n\}$ によつて選出された部分系列であると言へよう。

此の $\{f_n\}$ は選出行爲の固定的（空間的）表現をよく示してゐるものと考へられる。

$\mathfrak{F}$ ： 以上の様な種々なる $\{f_n\}$ の系（System）但し identity を含む。

$\mathfrak{M}$ ： M の部分集合の系（System）

K ： 一つの標識系列

斯の様に記号を定義して Kollektiv を扱つてみよう。

$K = \{m_i\}$ が次の條件を満足する時 $\mathfrak{F}$ 及び $\mathfrak{M}$ に関する Koll-

*（（$m_1, \cdots m_n$）の函数として f_n の値はすべて定められてあるのである）8行*印へ挿入

ektiv と言ひ K(𝔉, 𝔐) であらはす。

① 𝔐 の要素 L に対して $H_n(L, K)$ が n が限りなく増す時一定の極限値 $\mu(L)$ をもつ $\mu(L)$ を L の確率と言ふ。

$$\lim_{n\to\infty} H_n(L, K) = \mu(L)$$

② A を K から一つの 𝔉 によりつくられた中途で切れることのない部分系列とする。此の時 $\lim_{n\to\infty} H_n(L, A) = \mu(L)$
$\left(= \lim_{n\to\infty} H_n(L, K)\right)$ が成立する

此の Kollektiv は如何なる 𝔉 及び M に関する條件の下に存在するであらうか、Wald は次の揚言をなして証明してゐる。

(イ) M ： 有限集合の標識空間
𝔉 ： 可附番個の $\{f_n\}$ の System（可附番個の選出行為）
𝔐 ： M の部分集合の System
μ ： 𝔐 の凡ての要素に対して定義された負となることはない additive な函数で $\mu(M)$ に 1 を示す

此の時分布 μ をもつ Kollektiv $K(𝔉, 𝔐)$ が Kontinuum に存在する

(ロ) M ： 無限集合の標識空間
𝔉 ： 同上
𝔐 ： M のすべての部分集合の System
μ ： 同上

分布 μ をもつ Kollektiv $K(𝔉, 𝔐)$ が存在するための完全條件は $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(m_i) = 1$ が成立する様な互に共通部分のない標識の列 $\{m_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ が存在すると言ふ事である。

此等の證明は選出行為を逐次に中に含めて構成的に Kollektiv をつくつて行くことによるのである。

例へば$\{V_i\}$ 選出行為の系列とする$V_1, V_2, V_3, \cdots$
$(V_i = \{f_n^i\})$
$(r_1, r_2, \cdots r_n)$ r_iは0又は1のみをとる。
$A_{r_1 \cdots r_n}$ 此は唯次の様なm_jよりなる$\{m_i\}$の部分系列とする

此のm_jは$r_k = 0$又は1なるに従ひV_k($k=1 \cdots n$)により選ばれる又 えらばれぬ要素を示す。例へばA_{01}とは$\{m_i\}$の中V_1なる選出行為により選ばれることのないものの中V_2なる選出行為により選ばれたる$\{m_j\}$よりなるものである。此の様なA－集合をつかつて欲する頻度を持つ様な系列を順を追つて建立して行くのである。

以上の様にして存在を證明し得られた Kollekti を Mises も亦承認されて居り形式主義者の議論には十分であらうと述べてゐる.

此の様な Kallektiv を Mises－Wald の Kellekti とよぶ－

（Wald の證明は Ergebnisse eines mathematischen Kolloquin Wien 1937, 38P－72P に面白く述べられてある）

§ 選出行為に就て

Kollektiv による確率論の建立（理論化）は全く行為的立場に立つて偶然の一象徴を試みたものであり、其の個別的一回の生起現象に対しては何等の欲する定言を得ぬが然し然るべき蓋然性をもつ様な事象を考へ、其等の生起現象を多数集め集団現象として観察することによつて其の事象に其等事象の多数の生起現象の中に於てのみ意味をもつ他事象との関係に関するある定量的表現を与へようとする

のが其の望んでゐる所である——偶然の表現には此の外所謂主観的確率論的表現が考へられるが此の問題に就ては別に詳述する——。言ひかへてみるならば所謂決定論の立場よりは記述し得られぬ現象を多数集めた集団現象として別の観点より観察し其処に於て自然科学的立場に立つて描出し、記述し、予見する即ち映すものであると言へるのである。

Kollektiv に対する二つの條件を考へてみよう。先づ其の極限値に関して言へば n_A/n（記号 前§参照）が n を増すに随つて即ち行為的に n を増して行くに随つて一定の数値に近づいて行くのが見えてくる意味に於てこそ其の実在が直観せられるのであると考へられ、かゝる立場に立つて其の存在が要請せられるに過ぎない。※

次に此の理論の中核なる無規則性（*Regellosighert randomness, irrégularité*）も亦形式的空間的のものでなく時間—空間的 *event* として身体的行為に依つて表現せられてゐると考へられ此処に於て始めて其の真意が傳へられると言へるのである。*Mises* は1919年の論文に於て述べた「系列の要素が如何なる標識をもつ　かは予め定言出来ない」の意味を前§で示した *Stellenauswahl* によつてもつと洗練した厳密な明快な形を与へたと言ふ意味の事を述べてゐる。此によつて *Mises* の企図する所を察するに明らかに行為としての *Stellenauswahl* を述べようとして居るのであり *Stellenauswahl* の固定的表現如何であらうとも唯其の表現のみによつては真の *Stellenauswahl* でなく其を身体的に *entweder oder* に立迷ひつゝ行使する所に於て始めて *Stellenauswahl* となるのであると考へる

べきである。

斯の如く Stellenauswahl は単に「与へられてあるもの」でなく原標識系列に向つて此より部分系列を順次つくることとして了解せらるべきものであつて現在選出しようとする欲求の立場よりみるとき一つの可能性を与へてゐるものと言はねばならない。言ひかへて見るならば俯瞰的、形式的に言つた現在の意味でない現在、即ち過去未来を表現する実存的意味の現在に於ける我の現在的(永遠に今であるべき)一種の自覚であつて未来をつくる行為の意志を決定すべき韈であると考へられる。従つて Stellenauswahl は当然選出行為と云はるべきものであらう。

Stellenauswahl は具体的問題解決の為に依つてゞなく行為其のものゝ性質(性格、本質)上必然的に其の可附番的なることは身体的行為をともなつて直観せられるのである。したがつてすべての Stellenauswahl とは当然直観せられたものとしての可附番的の種々なる選出行為を意味するものであると言へよう
此の立場に立つてみる時選出行為を可附番的として Kollektiv の存在を示した Wald の理論は極めて興味深いものがある。

此の本質を見失ひ形式的に「すべての」を解釈することは Stellenauswahl と言ふ行為の固定的表現に固執して其の概念的なもののみの間に推理を試したものであつて偶然其のものに基底を置くが故に行為としての Stellenauswahl をもち来つた Kollektiv 理論の真意を解せぬものと思はれる。

此の事情はラッセルが例の集合の矛盾に就て述べてゐる事「上の論法の中で犯してゐる誤謬は所謂不純な集合即ち論理型に関して純粋でない集合を定義したことにある。後の章でも述べる様に集合は一つの論理的擬対象で集合に関して述べてゐる様に見える命題も実は其の中に集合と言ふ言葉が表れない様に変形されるときに限つて意味のあるものである。此の事実によつて集合を表す記号の――此は実在的のものでなく唯名的のものであるが――意味をもつ場合が規定される。従つて此の様な仮而非名称が正しくない方法で使はれてゐる文章や記号の集りは誤りではなく寧ろ意味のないものである。此の意味に於て集合が其れ自身の要素であるとかないとか言ふ言葉は誤りと云ふべきではなく意味のないものと言ふべきである。尚一般に個体の或集合が他の個体の集合の要素であるとか言ふ事を考へるのも意味のないことであるし、同じ論理的段階に属して居ない物を一つの集合にまとめて此を記号化するのも記号を記号としての役をなさない様な方法で使つてゐるのである」(数理哲学序説 平野智治氏訳 210頁：――は私)

と睨み合せてみるとき唯なる概念の形式的濫用に言及して(内容の論理を無視した)ゐる点に於て実によい思惑を示して居り此処に於ける、ラッセルの矛盾を排除しようとしてゐる考へ方は今の場合にも全く好適なものであらう。

「手は何処までも実践的たると共に知的直観的である。我々の身体は何処までも自己表現的であるのである。然らざれば身体と言ふものはない。我々身体的把握は、我々の作業の言語的表現からであると云はれる。物理的知識と云ふ如

きものも、手の行為的直観に基礎附けられねばならない」と西田先生は哲学論文集第七生命(23〜24頁)に於て述べられてゐる。

物理的知識と言ふ言葉を「偶然の一表現たるKollektiv理論及び其に依つて得られる偶然に関する知識」又は「偶然に基底を置く確率論及び其の思考によつて得られる知識」によつて置き換へてもよい様に思はれる。

然し此のKollektivの理論が唯一絶対であると言ふのではない。此の外手の行為的直観に基礎をもつ偶然の更によい表現が当然期待せられるであらう。(かくして現実をよく映して居り應用・問題解決と内的必然性もつ自然科学とならう)。特にBernoulliの定理(大数の法則)はMisesの理論に於てもlimitの問題に関して釈然とせぬ所があり、此処(確率に於けるlimitの問題)を究明するところに理論が建立せられるものと信じてゐる。

§ Measure 理論よりするKollektivの存在

Measure理論によつて公理論的に確率論を展開するKolmogoroff的立場に立つてKollektivの存在の証明がされて居る。Doob の Note on probability, Halmosの Invariants of certain stochastic transformation: the mathematical theory of gambling systems, Feller の Über die Existenz von sog. Kollektiveven に見られるのであるがHalmos; に就ては樋口順四郎氏「Kollektivの存在に就て」(位相数学)に其の紹介があるから此処では Doob, Feller のに就て述べて見よう"

例によつて定義よりのべる。

なほ Mises-Wald の Kollektiv と此の理論の Kollektiv とは本質的に全く異つたものであり同日に論ずるのは滑稽の事であり峻別を要するので記号も亦変化させておかう。

π : 標識空間

Φ : π の部分集合よりつくられ π を含むところの Borel 集合族.

$P_r\{\alpha\}$: Φ 上で定義され Kolmogoroff の公理 I－VI を満足する集合函数 (Measure) とする但し $\alpha \subset \Phi$, $P_r\{\pi\} = 1$

$\{f_n\}$: Wald の定義にしたがう Stellenauswahl の空間的表現 (今後簡単のため単に Stellenauswahl と云ふ).

A : 一つの Stellenauswahl。

$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots$: 標識系列

$P\{P_1, P_2, P_3 \cdots\cdots\}$ に A をほどこせば $P^*\{P_{\nu_1}, P_{\nu_2} \cdots\cdots\}$ を得る $a_n(\alpha; P, A)$: $\alpha \subset \Phi$ に対して $P_{\nu_i} \subset \alpha$ なるごとき $i \leqq n$ をみたす index の数

此の時 P_{ν_i} の系列が中絶するか又は凡ての α (Φ に対して) $\lim a_n(\alpha; P, A)/n = P_r\{\alpha\}$ が成立するとき P なる標識系列は Stellenauswahl A に対して regular と言ふ

次に $P\{P_1, P_2 \cdots\cdots\}$ なる標識系列を可附番次元空間の一点として即ち $\Pi = \pi \times \pi \times \pi \times \cdots\cdots$ なる積空間中の一点と考へ此に次の様な Measure を定義することが出来る。即ち此の時 Π 中で Kolmogoroff の公理 I－VI をみたしさらに (イ) $\alpha_i \in \pi$ $i = 1, 2, \cdots\cdots$ ならば $\prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i \in \Pi$

(ロ) $P_r\left\{\prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i\right\} = \prod_{i=1}^{\infty} P_r\{\alpha_i\}$

をみたす measure $P_r\{\}$ を定義することが出来る.

此の様に考へてゐるとき $P\{P_1, P_2, \ldots\}$ に関して $a_n(\alpha; P; I)/n = P_r\{\alpha\}$（但しIは identity とする）はΠ中の measure 0 の集合を除いて成立することは Borel の大数強法則より明らかである。此処に於て次の様な場合を得てゐる。

Πの殆どすべての点は任意の然し一定のΠ上で可測な Stellenauswahl $A = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ に対して regular である。

註1 Doob が Stellenauswahl に関してΠ上の殆どすべての点に於て $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(P) = 1$ を要求して居り部分系列の中絶することを避けてゐるが結果は同様である。

註2 可測な Stellenauswahl A とは $f_n(P_1 \cdots P_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) がΠ上で可測函数であるとの意味である。

註3 可附番個の Stellenauswahl に対してもΠ中の殆どすべての点が regular なることは明らかである。

此の証明をみるに Stellenauswahl は行為の集合としてでなく一つの任意の指定された固定的表現としての Stellenauswahl が用ひられて居り予め定められた単なる0,1の系列（0は選出せず、1は選出する）として Stellenauswahl を考へる事も許されてあるのである。しかし Stellenauswahl を斯く考へ斯く論理を一般的にすゝめる時当然他の代償が支払はれねばならない。此は積空間に於ける殆どすべての点（measure 0 を除いたすべての点集合）に於て regular が成立すると言ふ事である。此が何を意味するか Kollektiv の存在の証明になつてゐるかと言ふ問題は後述する。此の殆どすべてが言葉だけでは言語通念上心

理的に尤もであると思はれるにかゝはらず真の意味は如何なる相のものであるかは大いなる問題であらう

以上の様に表現せられたKollektivの存在證明をKollektivの存在問題の解決方向と考へるのは偶然の表現たるKollektiv理論の真意を解せぬものと言へる。此はMisesのKollektivとは関係のない一つのmeasure理論の結実に過ぎない。此を假りに形式的―Kollektiv或は"Kollektiv" in the light of measureと呼ばう。

註 Fellerは此の揚言はWaldのを含むでゐると云ふが此は大いなる誤解である。

§ 賭の観念を用ひてのKollektivの拡張

Misesは無規則性の別表現としてgambling System不可能原理と言ふものを考へてゐる。VilleはMartingaleの思想を用ひて此の線に沿ひKollektivを賭の立場より相対化して――Kollektivの存在がWaldによってStellenauswahlに対してexplicitに相対化された様に―― ゐるのである。然し理論の構成はmeasure理論的であるから注意を要する。

Martingaleとは何か

簡単の為に標識は0, 1のみよりなると考へる。

標識系列卽ち事象は $m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots$ ($m_i = 0$ 又は 1) によってあらはされる。

甲なる人が次の様な規則で賭金を自由にかへてよいと約束して還分に賭を挑むとしよう。

規則 イ、甲が $\{m_i = 1\}$ に対して入を賭けれるとするときもし実際に $\{m_i = 1\}$ がおこるとき λ/p を受けとる
$\{m_i = 0\}$ に対して入を賭けるとするとき

もし実際に$\{m_i=0\}$がおこるときλ/q $(q=1-p)$をうけとる。
$(1>p, q>0)$

㈣此を下の様に運用する。

甲は賭を始めるまへに1に等しい金をもつてゐるとする
そして$(n-1)$回賭をやつた後でS_{n-1}なる金をもつてゐたとする、此の時次の$m_n=0$又は1に金を賭けるときS_{n-1}の全部又は一部のみを出せるに過ぎない(或は賭なくでもよい)ものと考へる。此を数学的に表現すれば次の様な$\lambda_n(m_1 \cdots m_{n-1})$, $\mu_n(m_1 \cdots m_{n-1})$によつて表現せられることになる。

甲は $\lambda_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})S_{n-1}$ を $m_n=1$ に
$\mu_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})S_{n-1}$ を $m_n=0$ に 賭ける
ことが出来る、但し$\lambda_{n-1} \geqq 0$, $\mu_{n-1} \geqq 0$, $\lambda_{n-1}+\mu_{n-1} \leqq 1$
$n=1, 2, 3 \cdots\cdots$

S_{n-1}は当然$m_1 \cdots\cdots m_{n-1}$の函数である、假定により
$S_0=1$、λ_0, μ_0は常数と考へる。
此を考へるならば次の式を得る

$$\begin{cases} S_n=\lambda_{n-1}S_{n-1}/p+S_{n-1}(1-\lambda_{n-1}-\mu_{n-1}) \text{；} m_n=1 \text{ が出た時} \\ S_n=\mu_{n-1}S_{n-1}/q+S_{n-1}(1-\lambda_{n-1}-\mu_{n-1}) \text{；} m_n=0 \text{ が出た時} \end{cases}$$

$S_0=1$を知れば順次にS_nは求まる

$$\begin{cases} S_n(m_1 \cdots m_{n-1}, 1)=\lambda_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})S_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})/p+ \\ \qquad S_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})(1-\lambda_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})-\mu_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})) \\ S_n(m_1 \cdots m_{n-1}, 0)=\mu_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})S_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})/q+S_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1}) \\ \qquad (1-\lambda_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})-\mu(m_1 \cdots m_{n-1})) \end{cases}$$

此から

$$\underline{S_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1})=pS_n(m_1 \cdots m_{n-1}, 1)+qS_n(m_1 \cdots m_{n-1}, 0)}$$

を得る

逆に此が成立するとき上述した如きλ_n, μ_nを求めることが出来る。したがつて$\{S_n\}$を知ることは甲の賭を知ることになるのである

今　$T_n(m_1 \cdots m_n) = p^{\nu} q^{n-\nu} S_n(m_1 \cdots m_n)$

ここに $\nu = \sum_{i=1}^{n} m_i$

とおくと

$T_0 = 1$, $T_n \geqq 0$　$T_{n-1}(m_1 \cdots m_{n-1}) = T_n(m_1 \cdots m_{n-1}, 1) + T_n(m_1 \cdots m_{n-1}, 0)$

を得る

此の様なT_n 即ちS_nによつて定義せられる賭をmartingaleと云ふ

㈧ 甲がTによつて定義せられた賭をやるとき限りなく利益を得ることはない場合がある

此は $\displaystyle\sup_{n=1,2,3} S_n(m_1 \cdots m_n) < \infty$ によつてあらはされる。

本論に移る

Misesは賭金の事に就ては別考慮することなくStellenauswahl丈を考へてゐるのであるが今Villeは賭金の分配を更に考へに入れて理論を立てゝゐるのである。

又定義を少しのべやう。

$m_1, m_2, \cdots (m_i = 0$ 又は $1)$ とする。そして

$\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{m_n}{2^n} + \cdots\cdots$ なる和を考へる。

$\{m_i\}$によつてつくられる0.1系列は上の和によつて$[0, 1]$なるinterval中の一点としてTransformせられる。　　今$[0, 1]$をとり此よりつくられたるすべてのBorel集合上で定義されたnorm.

negative で completely additive な集合函数――例へば $1>p>0$ とし $[0,1]$ を二等分し $[0,\frac{1}{2}]$ に $q=1-p$ を與へ $[\frac{1}{2},1]$ に p をあたへる　又此の各区間を二等分し同様のことを繰返し今 $p^{\alpha}q^{\beta}$ をあたへられた区間を得るとき此を更に二等分して左半分に $p^{\alpha}q^{\beta+1}$ 右半分に $p^{\alpha+1}q^{\beta}$ を与へてゆく。此の様にして $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ の様な区間上で定義された集合函数（重み）を得る。上の集合函数は $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ なる区間では此処にのべた重みをもたせる事が出来る――を考へ此を p-measure と呼ぶ。$[0,1]$ 中のある集合Aの p-measure は実に各 m_i が 1 を生ずる確率*（measure 理論上の言葉にしたがふ）p をもつとするとき，其の transform された点がAに属する様な總ての $\{m_i\}$ なる 0,1 の系列の集合の示す確率となってゐるのである。

さて次に $H(T;p)$ を定義しよう。

$1>p>0$ として $\{m_i\}$ に対して martingale を行ふのである。即ち前述㊁の関係をみたす T_n, S_n $(n=1,2,\cdots)$ を取出すのである。此の時 $\sup_{n=1,2,3,\cdots} S_n(m_1,\cdots m_n)<\infty$ を満足する様な標識系列 $\{m_i\}$ の集合或は上の Transfomation により transform された $[0,1]$ 間の点集合を $H(T;p)$ と呼ぶ。

以上の言語、論理を用ひて Ville は gambling System 不可能原理を次の様にのべてゐる。

T如何に関せず集合 $H(T;p)$は p-measure 1をもつ

言ひかへてみれば上述の Martingale をやつて無限に得をすることの出来ぬ様な 0,1 よりなる標識系列――当然1の

の生ずる確率*は p となつてゐる――は存在しその p-measure は1であると言ふ事になる。或は1の生ずる確率* p をもつ0,1の標識系列の殆どすべてに対して上述のmartingaleをやつても無限に得をすることは出来ないと裏返してもよい。(此がRegellosigkeitの條件であると述べてゐる)確かに此の定理は相対化されて面白いのであるがmeasure理論をつかつてある以上前と同様Regellosigkeitの立場よりみるとき疑問とする所が多い。

§ Stellenauswahl に関しての一拡張。(measure理論的)

現在迄はStellenauswahlを個別的に考へたのであるが当然の拡張としてStellenauswahlの固定的表現にmeasureを入れPositive measureのStellenauswahlに対するKollektivの存在は如何になるかが考へられる。今此に対する揚言をつくつて証明してみよう。

標識の空間を π とし $\Pi = \pi \times \pi \times \cdots\cdots$ なる積空間を考へ此の中で前述の様なmeasureをもちこむ。此に関する記号及び記述は全部そのまゝにあてはまるものとする。

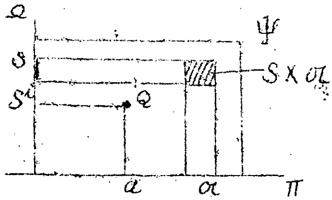
次にStellenauswahlを定義するのである。今 $(0,1)$ 間の実数を二進法でかきあらはし; 0 1 1 1 0 0 1 0 1 ------ 0,の出る番号は選出せぬ番号、1の出る番号は選出する番号と了解するならば此は一つのStellenauswahlをなしてゐる。此の様にして定義された各種のStellenauswahlの集合のmeasureは $(0,1)$ 上で定義されたルベッグ-measureをもつものとしよう。然しBorelのNombres normauxの考へによれば、ルベッグ-measure 0をのぞいて1又は0が出る頻度が $\frac{1}{2}$ となるのである。此では面白くない。したがつて今 P な

る系列をΠ中の一点と定義したと同様の考に沿つて次の様に定義してみよう。Λを0、1 よりなる標識空間とする。$P_r^s\{0\}=q$, $P_r^s\{1\}=p$ はΛ上で定義された——但し $p+q=1$ $1>p>1,\ 1>q>0$——集合函数(*measure*)とする此の時 $\Omega=\Lambda\times\Lambda\times\cdots\cdots$ なる無限積空間中の一点として *Stellenauswahl* を表すことが出来る。
Ω 中の *measure* は前述と同様に定義出来るから Ω 中の殆どすべての点は1の出る頻度 p をもつ。

記号であらはしてみよう。一つの *Stellenauswahl* を S^i とする $S^i=\{a_{r_1}^{(i)}, a_{r_2}^{(i)}\cdots\cdots a_{r_j}^{(i)}\cdots\cdots\}$ $a_{r_j}^{(i)}=1$ 又は 0。標識系列 p より S^i によつて部分系列をつくることを $S^i(p)$ とかく。$S^i(p)=\{p_{r_1}, p_{r_2}\cdots\cdots\}$ である。

次に $\Psi=\Omega\times\Pi$ なる積空間を考へ此処に於ける *measure* (*Kolmogoroff* の公理を満足する)を定義する。$\Omega\supset S$, $\Pi\supset R$ のとき

$$m(S\times R)=P_r^s\{S\}\cdot P_r\{R\}$$ であるとする即ち Ω と Π とは独立であると考へるのである(Ω 及び Π 中の各要素も独立であることは前述の如く明らかである)



Ψ 中の一点 Q は a なる標識に対して S^i なる *Stellenauswahl* を施すこと而してほどこされて生じた標識系列を意味するものとする。したがつて独立の意味は *Stellenauswahl* を決めることはそれをほどこすべき標識系列の集合を *measure* 上の意味で限定することはない、厳密でなく言へば *Stellenauswahl* はどの標識系列にも全く同等にほどこし

得ると言ふ事になる（此は当然の假定と思はれる）

今Ψ中の一点Qをとる　$a=\{a_1, a_2 \cdots\cdots\}$とすれば　$S^i(a)=\{a_{\nu_1}, a_{\nu_2} \cdots\}=\{Q_1, Q_2, \cdots\}=Q$である。$a_1, a_2, \cdots a_n$中　αくΨ　を示すものの数をn_Aとする時

$\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p_A$　が存在し且つ又$Q_1, Q_2, \cdots Q_n$の中αくΨを示すものの数をn'_Aとするとき$\lim_{n\to\infty}\frac{n'_A}{n}=p_A$が成立するとき即ち

αなる標識を示すものの極限値がa及びQに対して存在し共に等しい場合QをΨ中の<u>不変点（invariant point）</u>と名づける。

此処に次の揚言をうる。

〔揚言〕　<u>Ψ空間の点は殆どすべて不変点である</u>

言ひかへてみるならばΨ空間から上述の意味でのmeasure 0をのぞけば不変点である即ちある標識系列にあるStellenauswahlをほどこしたときαくΨなる標識を示すものの頻度の極限値が不変である様なものは上述の様に表現すればΨ空間でmeasure 1をもつ。

此を証明してみよう。此のため先づ有名なLemmaを二つ挙げる

「Lemma 1」　Borel - Cantelli

$E_1, E_2, \cdots\cdots$ある事象の系列とする

今　$P_r\{E_n\}=\beta_n$　で定義されたβ_nの和

$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$　が収斂すればE_i $(i=1,2,\cdots\cdots)$の無限回おこることを示す　事象のmeasureは0

に等しい

「Lemma 2」 $X_1, X_2, X_3 \cdots\cdots$ は Random variable (measure 理論で言ふところのものであるが Probability の代りに measure と言ふ言葉をつかふものとする) の系列である。X 一つの random variable とする

$\sum_n P_r\{|X_n - X| \geqq \frac{1}{r}\}$ が凡ての $r > 0$ に対して収斂すれば

X_n は presque certainement に X へ収斂する。

(用語は measure 理論の意味に解されたい)

〔説明〕 E : X_n の X へ収斂せぬ事象をあらはすとする。$E(r, n)$: $|X_n - X| \geqq \frac{1}{r}$ の成立する様な事象をあらはす。

$E(r)$: $E(r, n)$ の無限回おこる事象をあらはす、かうすれば E は $E(r)$ の少くも一つがおこるところの事象と考へられる。

$$E \subset \sum_r E(r)$$

したがって $P_r\{E\} \leqq \sum_r P_r\{E(r)\}$

しかし仮定によって $\sum_n P_r\{|X_n - X| \geqq \frac{1}{r}\}$ が収斂するから Lemma 1 によって $|X_n - X| \geqq \frac{1}{r}$ 即ち $E(r, n)$ の無限回おこる事つまり $E(r)$ の measure は 0 となる したがって $P_r\{E\} = 0$

[揚言の証明] 前§で述べた揚言の証明に Feller の用ひた考へ方に沿つてやつてみよう

Ω 中の点で最初の n 項中 ω_k (主に属して居る

index の数が丁度 k 個である様な点集合を $E(k,n)$ であらはす.

(イ) 此の時 まず

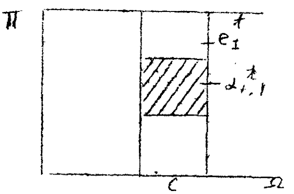
$$m(E(k,n)) \leqq \binom{n}{k}\left(P_r\{\alpha\}\right)^{k}\left(1-P_r\{\alpha\}\right)^{n-k}$$ なる事を

示さねばならない

帰納法で確める

(I) まず $n=1$

e_1^t ： t 番目のものが始めて選ばれる如き Π 中の点集合とする.



t 番目のものが始めて 1 になる様な $0,1$ 系列 $S_{t,1}$

$m(e_1^t)=1\cdot P_r^S\{S_{t,1}\}<1$

$\alpha_{1,1}^t$ ； e_1^t 中 $P_k\subset\alpha$ なるごとき集合とする。

$m\{\alpha_{1,1}^t\}=P_r^S\{S_{t,1}\}\cdot P_r\{\alpha\}<P_r\{\alpha\}$

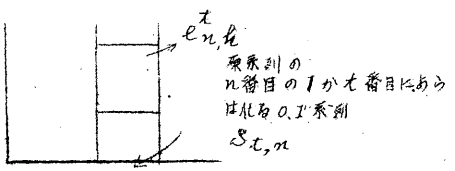
さて $E(1,1)=\sum_t \alpha_{1,1}^t$

しかも $\alpha_{1,1}^t$ は共通点をもたぬから $m\{E(1,1)\}=m\left\{\sum_t \alpha_{1,1}^t\right\}=\sum_t m\{\alpha_{1,1}^t\}$

$$=\sum_t P_r^S\{S_{t,1}\}\cdot P_r\{\alpha\}\leqq P_r\{\alpha\}$$

同様に $m\{E(0,1)\}\leqq 1-P_r\{\alpha\}$ 　故によい。

(II) $e_{n,k}^t$ ： t 番目のものが n 回目に選ばれしかも其の前に選ばれた $n-1$ 個の中丁度 k 個のものが α に属してゐる様な点集合



n,k を固定すれば t に関して共通点をもたぬ。明らかに $\sum_t e_{n,k}^t\subset E(k,n-1)$ が成立する。

右辺は($n-1$)個の系列中 $\mathfrak{a}$ を示すものの数がk個ある集合を示して居るからである。

$\alpha^{t}_{n,k}$: n回目に選ばれたものが $\mathfrak{a}$ を示す様な $e^{t}_{n,k}$ の部分集合

$\bar{\alpha}^{t}_{n,k}$: n回目に選ばれたものが $\mathfrak{a}$ を示さぬ様な $e^{t}_{n,k}$ の部分集合

$$m\{\alpha^{t}_{n,k}\} = m\{e^{t}_{n,k}\} \cdot Pr\{\mathfrak{a}\}$$

$$m\{\bar{\alpha}^{t}_{n,k}\} = m\{e^{t}_{n,k}\} \cdot (1-Pr\{\mathfrak{a}\})$$

又 $E(k,n) = \sum_t \alpha^{t}_{n,k-1} + \sum_t \bar{\alpha}^{t}_{n,k}$ と考へられるから

$$m\{E(k,n)\} = m\left(\sum_t \alpha^{t}_{n,k-1}\right) + m\left(\sum_t \bar{\alpha}^{t}_{n,k}\right)$$

$$= \sum_t m\left(\alpha^{t}_{n,k-1}\right) + \sum_t m\left(\bar{\alpha}^{t}_{n,k}\right)$$

$$= Pr\{\mathfrak{a}\}\, m\left(\sum_t e^{t}_{n,k-1}\right) + (1-Pr\{\mathfrak{a}\})\, m\left(\sum e^{t}_{n,k}\right)$$

$$\leqq Pr\{\mathfrak{a}\}\, m\{E(k-1,n-1)\} + (1-Pr\{\mathfrak{a}\})\, m\{E(k,n-1)\}$$

しかるに $m\{E(k-1,n-1)\} \leqq \binom{n-1}{k-1} Pr\{\mathfrak{a}\}^{k-1}(1-Pr\{\mathfrak{a}\})^{n-k}$

$$m\{E(k,n-1)\} \leqq \binom{n-1}{k} Pr\{\mathfrak{a}\}^{k}(1-Pr\{\mathfrak{a}\})^{n-k-1}$$

が成立つてゐると假定してあるから

$$\leqq \left\{\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right\} Pr\{\mathfrak{a}\}^{k}(1-Pr\{\mathfrak{a}\})^{n-k}$$

かくして $m\{E(k,n)\} \leqq \binom{n}{k} Pr\{\mathfrak{a}\}^{k}(1-Pr\{\mathfrak{a}\})^{n-k}$

を得る

回 $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \sum_{\left|\frac{k}{n}-Pr\{\mathfrak{a}\}\right|>\varepsilon} m\{E(k,n)\}$ を考へる

此は $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \sum_{\left|\frac{k}{n}-Pr\{\mathfrak{a}\}\right|>\varepsilon} \binom{n}{k} Pr\{\mathfrak{a}\}^{k}(1-Pr\{\mathfrak{a}\})^{n-k}$

で抑へられるが n を十分大にするとき

$$\sum_{|\frac{k}{n}-P\{\alpha\}|>\varepsilon}' \binom{n}{k} P\{\alpha\}^k (1-P\{\alpha\})^{n-k}$$ は Laplace の

定理によつて

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{2P\{\alpha\}(1-P\{\alpha\})}}}^{\infty} e^{-x^2} dx$$ に近づく事が知られてゐる

此は n が十分大のとき

$$\frac{\sqrt{2P\{\alpha\}(1-P\{\alpha\})}}{\sqrt{n}\,\varepsilon}\, e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2P\{\alpha\}(1-P\{\alpha\})}}$$ と

同一の order をもつ、したがつて $\varepsilon>0$ とするとき

$$\sum_{n=N}^{\infty} \sum' \binom{n}{k} P\{\alpha\}^k (1-P\{\alpha\})^{n-k} \sim \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\sqrt{2P\{\alpha\}(1-P\{\alpha\})}}{\sqrt{n}\,\varepsilon} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2P\{\alpha\}(1-P\{\alpha\})}}$$

であるから明らかに右辺は収斂する

したがつて

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left[\sum_{|\frac{k}{n}-P\{\alpha\}|>\varepsilon} m\{E(k,n)\} \right]$$ は収斂する故に

[Lemma 2] によれば $\frac{k}{n}$ → Presque certainement $= P\{\alpha\}$ に収斂する。即ち正空間中の measure 0 をのぞけば $\frac{k}{n}$ は $P\{\alpha\}$ に収斂する。

即ち正空間中の点は殆どすべて不変点である。

此を measure-Kollektiv 或は "Kollektiv soaked in measure" と呼ぶ。

以上の揚言は果して何を意味するものであるか存在の意味があるかの問題に就ては後述する。

　此は measure 理論の一微笑であると云ふのが

私の積りである，

〔註〕Ψ空間を定義した時独立の強い要求をしたのであったが証明の技巧上証明そのものを全く変化せずにすますことは更によわい独立の條件でおきかへても出来るのであるが此では揚言の真の意を混迷におとし入れるので強い條件にしたのである。此の様な事は形式的なことで言はんとする本質は此で十分と思はれる。…

此のよわい條件を考に入れての此の揚言に相当するものは伊藤清氏著「確率論の基礎」58頁§27無規則性の証明に見られる様である.

Ville は measure 理論の観点に立って次の様な揚言を得てある．0,1よりなる標識系列を考へる．此の中で K(γ; p) を可附番個の Stellenauswahl の系γに対して 1の頻度の極限値 p(1 > p > 0) をもつ Kollektiv と言ふことにする．さうすると p-measure 0 の性質をもつ Kollektiv K(γ; p) は必ず存在する とのべられるのである．こゝに p-measure 0 の性質とは「例へば各自然数に対して $m_1, \cdots, m_n$ なる標識系列中1のおこる頻度が常に p よりも大である」と言ふ様な性質である．（頻度が必ず上から p へ近づくと云ふ性質．此の性質をもつものが p-measure 0 をもつことは大数則の様に簡単に証明できる）　此の揚言は全く何の努力もなく Ψ空間中 measure 0 の性質をもつ不変点は必ず存在すると拡張出来る．measure 0 の性質とは Π空間中の measure 0 をもつ部分集合のあらはす性質と考へられるからである。

§ Measure 理論より見たるKollektivの存在場合に対する批判

(4) 以上Measure理論の立場（標識空間よりつくられたσ系上のcomplete additiveなmeasureをmeasureとする）に於てはmeasure 0を除いて存在すると言ふ場合が得られてゐる。此は何を意味してゐるのであらうか。

以上の思考によつて定義せられたmeasureをもつ空間を考へるならば其処に一つの或は有限個（又は可附番個、此は要請として直観的に認められる）のもの（点）を指定する時此はmeasure 0をもつてゐるのである。我々がこれこれと指定（個別的に或は取り出して）するとき此の時此はmeasure 0をもつてしまふのである。measure 0を除いてと言ふ事は我々の取り出したもの、指定したもの（身体的に）はみなmeasure 0の中に入つてしまつてゐると考へてもよいと言ふ事を含んでゐるのである。又measure 0を除いて存在するから此のKollektivをKとして実在のものとして（行為的に直観できるものとして）考へ運用することは可能であらうか。Kと指定すること，Kと言ふものを定めること —— Kとすると言ふ時此を操作(operate)する意志をもち、行為的にoperateすることを目的としてゐるのである事を考へるならば —— measure 0の中に入つてゐると考へても差支へないのである 以上measure 0を除いて存在するから此をKとすると言ふ事を積極的に肯定することは出来ない。Measure 0を除いて存在するから此をKとすると言はむとするならば此処に良かれ悪かれ「可能である」と言ふ公理を置かなければなら

ない。――置いたとするとき此の意味は了解し得ないが――measure 0を除いて存在すると言ふ揚言は「但しその存在するKollektivを個物として取り出してそであると指定することは出来ない」と言ふ　但し書きを明らかに含むである――　取り出したもの、働きかけられたものはmeasure 0の中に入ってゐると考へられるから但し書きは妥当である――と思はれる以上此の但し書きの主張を積極的に要求することは許容せられるであらう。

今翻って考へてみるに、これこれと指定した実在のKollektivを運用する所にKollektivによる確率理論は成立するのである。（かくてこそ確率論が手につかめるものとして成立しKollektivの真の意味があきらかになるのである。）measure 0を除いての揚言は上述の但し書きを含むであるが故に此の理論によって存在を主張されたKollektivであらうとも此を指定することは出来ずKollektivの理論を建立することは不可能になってしまふ。此の意味の存在は肉体をもたぬ形式的論理的存在ではあらうが身体をもつKollektiv理論の立場に立つとき存在とは言ひ得るであらうか。自然科学たるべき確率理論（前§選出行為に就て参照）の基礎は以上の形式的存在を以て　存在するものとして基礎づけることは許されない。然し今更めて立場をかへ使用されてゐるKollektivの言葉に眩惑せられることなく突込むで考へてみよう。私は此のmeasure理論の立場に立つものゝ其の説明がrandom variable――此がMisesの言ふ一つのKollektivに相当する――を基礎においた大数の法則――此の大数の法則の実在的意味はKollektivが存在し　しかも猶其の立場より考へられて始めて首肯

し得られるものである。——によつてゐるのであるからKollektivの存在に関する何物をも語つてゐないのであると考へる。証明しようとしてゐることが異つてゐるのでありKollektivの名を冠し得ぬものを此の理論は証明してゐるのに過ぎない。たとへ、0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 ・・・と言ふ様な0、1の標識系列であらうとも一には試行によつて唯生じたるものを観測した結果の記述であり、他には0及び1をもつrandom variableの実現標識として
の系列をあらはしてあると考へられるのであり　其の意味する所は全くことなつてゐるのである。——後者はKollektivのVerbindung（結合）によつて誘導されたKollektivの唯一つの標識をあらはしてゐるものと考へてよい。Randon variableに相当すべきKollektivの存在証明にRandom vaiableの存在を認め此よりつくられた大数法則を用ふると言ふことがおかしいのである。観測結果としての唯なる0.1の系列たるKollektivとKollektivの結合によつて誘導されたKollektivの一つの標識をあらはしてゐる0.1の系列と混同してはならない。後者はKollektivではないのである。——　0.1の系列はともに標識系列には違ひないが内的意味が異つてゐる。重ねて言ふならば、Measure理論でKollektivであると存在を主張してゐるものは後者の意味のものであり、決してKollektivではないのである。measure理論はKollektivの存在（無規則性）の証明をなしてゐないのである。Measure理論よりKollektivの存在を又は無規則性の証明をなし得たとすることは上述の混同を犯してゐるものと考へられる。Measureの道具は存在の問題にはとりつけるものではなからう

此の種の混同は Cantelli が Kollektiv の第一條件と大数の法則とに関して犯したと同種のものであらう。

以上によつてみるに(イ)の最初にのべた抗議は Kollektiv の言葉に眩惑せられた抗議に見えるであらうが従令唯考へられた標識系列を機械的に見て其に就て云々することを認めたとしても如上の抗議を受けるであらうと言ふ立場をとつて同様に Measure 理論による理論を批判したのである。Wald の Kollektiv の存在証明に於ては構成的、行為的に標識系列を建立じて行きながら所期の要請(條件)が其処に満されてゆくのが見えてくる意味に於て其の存在が直観せられるのである。かくて始めて Kollektiv の存在が言へ Kollektiv 理論の基礎たりうるのであらう。

〔註〕 Random variable 等を述べたが、前§で measure と言つたものは通常 Probability と言はれてゐるものであり、唯此の言葉の交換によつて(measure → Probability)通常理論の用語と対比して戴きたい。

㋺ measure (Kolmogoroff の公理にしたがつふ "Wahrscheinlichkeit") 0は何と解釈すべきものであらうか。此は直接的には頻度の極限値0とは解釈できない。

今直接的に解釈できたとしよう。

$$
(1)\left\{\begin{array}{l} m(A_1) = 0 \text{----} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_{A1}}{n} = 0 \\ m(A_2) = 0 \text{----} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_{A2}}{n} = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right\}(2)
$$

$A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ とすれば $m(A) = 0$ となる

然しながら A_1, A_2, ------ なる標識のみを示す、

標識系列 $'m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots$ は

当然考へられ各標識 A_i に就て (2) を満足してある様にすることは出来る、此に於てAを示すものの頻度 $\frac{n_A}{n}$ をつくれば明らかに $\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = 1$ である。$m(A)=0$ と比較するときは此は矛盾であり measure 0 は 頻度による解釈を許容せぬことにならう。

(ハ) 形式的 Kollektive, Measure-Kollektiv は Kollektiv と関係のない一つの measure 理論の枠内のものに過ぎず Mises-Wald の Kollektiv = 確率論とは関係のないものである。。 （統計数理研究所に於て）

[補] 64 頁 13行目米印に挿入

更に例を挙げて言へば 金貨を投げて丁半を観ると言ふ試行を行ふものとする。丁半の各確率が夫々 $\frac{1}{2}$ と言ふキツパリした奇麗な数字そのものに意味があるのでなく試行回数 n を十分大にした時丁半が略々 $\frac{n}{2}$ 回丈現れる即ち丁半の相対頻度が略々 $\frac{1}{2}$ に等しくなつて居る（又なつて行く）事に確率の意味があるのである。limit たる数字其のものに意味があるのでなく（結局の数字其の儘は convention としての価値しか持たぬ）相対頻度が近づくのが了解されてくる所に意味があるのであり此が limit を持つと言ふ要請の真意であると解さるべきである。