(41) 或る調査法に就て

水野 坦

調査法に於て精度と費用は常に注目しなければならない大きなFactorである。最近M. H. Hansen, W. N. Hurwitz は"The Problem of Nonresponse in Sample Surveys"で有力な方法を提唱した

其の方法の本質的な点は"調査方法に二通りあり、一は経済的なるも対象全部には適用し得ない。"と言ふ所である。然し彼等も断ってゐる如く、その一部に可能な調査方法の正確性を假定してゐる。

Nonresponse の方法は甚だ有力であるが現実には部分的な調査も全く正確と言ふわけには行かない事が多い以下述るものは不正確を含むものであれ、又単に相関するものであれ、対象の一部に斯るものに関する経済的な調査が可能なる時の調査法を與へるものである。

調査対象の数をNその中$100P$%に関しては経済的な甲調査が可能なりとし $L=PN$ $M=N(1-P)=QN$ とする。調査すべき量をXとし甲調査は量Yに関して行はれるものとする。XとYとの間には単に相関することを假定する。勿論対象は夫々大きさL.Mの二つに分離して與へられてゐるのではない。

Xの總計を次式に依り推計する。

$$(1) \quad T = \frac{N}{n}\left\{ l\,\overline{Y}\,\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} + m\,\overline{X}' \right\}.$$

此所に、n は甲調査の為の標本数、l は現実に甲調査の可能なりし標本数，$m = n - l$，$\tilde{Y}$ は l 個からの Y の標本平均、$\bar{X}$，$\bar{Y}$ は夫々 l からとられた Size $\frac{l}{\lambda}$ なる第二次調査に依る XY の標本平均とする。

$\bar{X}'$。は調査不能なりし m，よりとられた Size $\frac{m}{\mu}$ なる第二次調査標本平均とする。

然る時 T の平均は近似的に母集團平均に一致し、その平均平方誤差 V^2 は次式で與へられる。

$$V^2 \doteqdot (\nu - 1)N\sigma^2 + \nu(\lambda - 1)L\sigma_r^2\tilde{Y}^2 + \nu(\mu - 1)M\sigma_n^2 \tag{2}$$

但し、ν は甲調査の為の抽出巾、σ^2、は X に関する母集團分散，σ_r^2 は $\frac{X}{Y}$ の母集團分散、σ_n^2 は甲調査不能なる M 個に関する X の母集團分散、$\tilde{Y}$ は Y の母集團平均を表はす。

簡単の為に、以下の様におく

$$\sigma_r^2\tilde{Y}^2 = \alpha^2\sigma^2$$
$$\sigma_n^2 = \beta^2\sigma^2$$

然る時平均として與へられた費用 NA で最大の精度を得べき ν,λ,μ は以下の如く與へられる。

$$\nu = \frac{\varepsilon + Pa\alpha + Qb\beta}{\varepsilon A} \tag{3}$$
$$\lambda = \frac{\varepsilon a}{\alpha}$$
$$\mu = \frac{\varepsilon b}{\beta}$$

但し $\varepsilon^2 = 1 - P\alpha^2 - Q\beta^2$

a^2, b^2 は夫々 X_i , X_i' を得る為の相対的費用

今様に対象が層に別れてゐる時 i 層に関して、総て suffix i を附けて表せば

(5) $V^2 = \sum_i N_i \sigma_i^2 \left\{ (\nu_i - 1) + \nu_i (\lambda_i - 1) P_i \alpha_i^2 + \nu_i (\mu_i - 1) Q_i \beta_i^2 \right\}$

(6) $$\nu_i = \frac{1}{\sigma_i \varepsilon_i} \cdot \frac{\sum_i N_i \sigma_i \tau_i}{A}$$

$$\lambda_i = \frac{\varepsilon_i a_i}{\alpha_i}$$

$$\mu_i = \frac{\varepsilon_i b_i}{\beta_i}$$

此所に $\tau_i = \varepsilon_i + P_i \alpha_i a_i + Q_i \beta_i b_i$

明な如く以上の結果は Nonresponse 及び ratio 法を特別な場合として含む。

尚之に必要な計算図表が丸山文行君の手に依つて作られてある。印刷の都合上載せ得ないが利用されたい方は麹町研究室へ来られたい。

註

数式導出の筋道を簡単に記す

$$V^2 = E(T - \tilde{T})^2 = \frac{N^2}{n^2} \Big[E\left\{ (l \tilde{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\bar{Y}}} - E(l \tilde{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\bar{Y}}}) \right\}^2$$

$$+ E\left\{ m\bar{X}' - m\tilde{\bar{X}} \right\}^2 + E\left\{ m\tilde{\bar{X}} - E(m\tilde{\bar{X}}) \right\}^2$$

$$+ 2E\left\{ (l \tilde{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\bar{Y}}}) - E(l \tilde{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\bar{Y}}}) \right\} \left\{ m\bar{X}' - m\tilde{\bar{X}} \right\}^2$$

$$+ 2E\left\{ (l \tilde{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\bar{Y}}}) - E(l \tilde{\bar{Y}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{\bar{Y}}}) \right\} \left\{ m\tilde{\bar{X}} - E(m\tilde{\bar{X}}) \right\}$$

$$+ 2E\left\{ m\bar{X}' - m\tilde{\bar{X}} \right\} \left\{ m\tilde{\bar{X}} - E(m\tilde{\bar{X}}) \right\} \Big]$$

（括弧内第四、第六項は0である）

$$= \frac{N^2}{n^2}\left\{E_0+E_1+E_2+2E_3\right\}$$

又

$$E_0 \fallingdotseq E\left(l\tilde{\tilde{Y}}\cdot\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}-\frac{Ln}{N}\tilde{X}\right)^2$$

$$=E\left\{\frac{l^2\tilde{\tilde{Y}}^2(\bar{X}-\tilde{\tilde{X}})^2}{\bar{Y}^2}\right\}+\left\{\frac{l^2\tilde{\tilde{Y}}^2(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})^2}{\bar{Y}^2}\right\}$$

$$+E\left\{\frac{l^2\tilde{X}^2(\tilde{\tilde{Y}}-\bar{Y})}{\bar{Y}^2}\right\}+E\left\{l-\frac{Ln}{N}\right\}^2\tilde{X}^2$$

$$+2E\,\frac{l^2\tilde{\tilde{Y}}(\bar{X}-\tilde{\tilde{X}})(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})}{\bar{Y}^2}+2E\,\frac{l^2\tilde{\tilde{Y}}\tilde{X}(\bar{X}-\tilde{\tilde{X}})(\tilde{\tilde{Y}}-\bar{Y})}{\bar{Y}^2}$$

$$+2E\,\frac{l\tilde{\tilde{Y}}(\bar{X}-\tilde{\tilde{X}})(l-\frac{Ln}{N})\tilde{X}}{\bar{Y}}+2E\,\frac{l^2\tilde{\tilde{Y}}\tilde{X}(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})(\tilde{\tilde{Y}}-\bar{Y})}{\bar{Y}^2}$$

$$+2E\,\frac{l\tilde{\tilde{Y}}(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})(l-\frac{Ln}{N})\tilde{X}}{\bar{Y}}+2E\,\frac{l\tilde{X}(\tilde{\tilde{Y}}-\bar{Y})(l-\frac{Ln}{N})\tilde{X}}{\bar{Y}}$$

（然るに第五、第七、第八、第十項は近似的に0、第九項は0である。）

$$=E_4+E_5+E_6+E_7-2E_8$$

$$E_1=(\mu-1)\frac{M}{M-1}\cdot\sigma^2_{X'}\;Em\binom{M}{m}$$

$$=\nu(\mu-1)\frac{M^2}{M-1}\sigma^2_{X'}$$

$$E_2=E\left(m\tilde{\tilde{X}}'-\frac{Mn}{N}\tilde{X}'\right)^2=\frac{M(N-n)}{N(N-1)}n\sigma^2_{X'}+\frac{LM(N-n)n}{N^2(N-1)}\tilde{X}'^2$$

$$E_3=E\left\{\left\{l\cdot\tilde{\tilde{Y}}\cdot\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}-E\left(l\cdot\tilde{\tilde{Y}}\cdot\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\right)\right\}\left\{\binom{M}{m}\left(m-\frac{Mn}{N}\tilde{X}'\right\}\right\}\right.$$

$$=E\left\{\binom{L}{l}\left(l-\frac{Ln}{N}\right)\tilde{X}\right\}\left\{\binom{M}{m}\left(m-\frac{Mn}{N}\right)\tilde{X}'\right\}$$

$$=-\frac{LMn(N-n)}{N^2(N-1)}\tilde{X}\tilde{X}'$$

$$E_4 \doteqdot E\left\{\ell^2(\bar{X}-\tilde{\bar{X}})\right\} = (\lambda-1)E\frac{\ell}{\ell-1}\sum^{\ell}\left(X_i-\frac{\Sigma X_i}{\ell}\right)^2$$

$$= (\lambda-1)\frac{L}{L-1}\sigma_X^2 E\left\{\ell\left(\tfrac{1}{\ell}\right)\right\} = \nu(\lambda-1)\frac{L^2}{L-1}\sigma_X^2$$

$$E_5 \doteqdot E\left\{\Sigma^{\ell}X_i - E(\Sigma^{\ell}X_i)\right\}^2 - E\left\{E(\Sigma^{\ell}X_i)-\ell\tilde{X}\right\}^2$$

$$= \frac{L(N-n)n}{N(N-1)}\sigma_X^2$$

$$E_6 \doteqdot (\lambda-1)\frac{\tilde{X}^2}{\tilde{Y}^2}E\left\{\frac{\ell}{(\ell-1)}\Sigma\left(Y_i-\frac{\Sigma Y_i}{\ell}\right)^2\right\}$$

$$= \nu(\lambda-1)\frac{L^2}{L-1}\frac{\tilde{X}^2}{\tilde{Y}^2}\sigma_Y^2$$

$$E_7 = \frac{LM(N-n)n}{N^2(N-1)}$$

$$E_8 \doteqdot (\lambda-1)\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}}E\left\{\frac{\ell}{\ell-1}\sum_{i=1}^{\ell}(X_i-\tilde{\bar{X}})(Y_i-\tilde{\bar{Y}})\right\}$$

$$= (\lambda-1)\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}}\frac{L}{L-1}\rho\sigma_X\sigma_Y E(\ell)$$

(ρ はX, Yの間の相関係数)

$$= \nu(\lambda-1)\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}}\cdot\frac{L^2}{L-1}\rho\sigma_X\sigma_Y$$

$$\therefore V^2 = \nu\frac{N-n}{N-1}(L\sigma_X^2 + M\sigma_{X'}^2)$$

$$+ \frac{(N-n)}{N-1}\cdot\frac{LM}{n}(\tilde{X}^2 - 2\tilde{X}\tilde{X}' + \tilde{X}'^2)$$

$$+ \nu(\lambda-1)\frac{L^2}{L-1}(V_X^2 - 2\rho V_X V_Y + V_Y^2)\tilde{X}^2$$

Vは変異係数

$$+ \nu(\mu-1)\frac{M^2}{M-1}\sigma_{X'}^2$$

$$= \nu\frac{(N-n)}{N-1}N\sigma^2 + \nu(\lambda-1)\frac{L^2}{L-1}(V_X^2-2\rho V_X V_Y+V_Y^2)\tilde{X}^2$$

$$+ \nu(\mu-1)\frac{M^2}{M-1}\sigma_{X'}^2$$

$(V_X^2 - 2\rho V_X V_Y + V_Y^2)(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}})^2 = \sigma_Y^2$　と置く

$\sigma_{x'}^2 = \sigma_n^2$

$$\therefore V^2 \fallingdotseq (\nu-1)\frac{N^2}{N-1}\sigma^2 + \nu(\lambda-1)\frac{L^2}{L-1}\sigma_Y^2\tilde{Y}^2 + \nu(\mu-1)\frac{M^2}{M-1}\sigma_n^2$$

N, L, M に比し、ｆが小なら

$$V^2 \fallingdotseq (\nu-1)N\sigma^2 + \nu(\lambda-1)L\sigma_Y^2\tilde{Y}^2 + \nu(\mu-1)M\sigma_n^2$$

標本数決定は

$$NA = E\left(n + \frac{l}{\lambda}\cdot a^2 + \frac{m}{\mu}b^2\right)$$

なる條件下 V^2 を min ならしめればよい

層化されてゐる時も總て全く同樣である。

以　上