㉔　算術平均と幾何平均と調和平均

二見　隆

よく知られてゐるように算術平均は幾何平均より大きく、幾何平均は調平均より大きい。詳しく言へばN個の正数x_iに関して不等式

(1) $$\frac{1}{N}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_N) \geq (x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_N)^{\frac{1}{N}}$$

が成立し、N個の1より大なる数x_iに関して不等式

(2) $$(x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_N)^{\frac{1}{N}} \geq \frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_N}\right)}$$

が成立する。本稿ではこれらの関係を確率変数の平均値に関する不等式に拡大して解析的の證明を試みて見よう。

常に正値をとる確率変数Xについて

(3) $$m X \geq e^{m \log X}$$

なる不等式が證明されれば、これは特別の場合として不等式(1)を含む。

(3)に於てXが確率$\frac{1}{N}$で$x_i\ (i=1,2,\cdots\cdots N)$をとる場合が(1)である。

又常に1より大なる値をとる確率変数Yについて

(4) $$e^{m \log Y} \geq \frac{1}{m\frac{1}{Y}}$$

が成立すれば、これはやはり特別の場合として不等式(2)を含む。そこで(3)及び(4)を我々の目標とする。但し(3)及び(4)に於ける平均値が存在する

場合のみを考へるのである。

補助定理1 —— 確率変数Zが平均値$\mathfrak{m}Z$を持てば

$$\mathfrak{m}e^Z \geq e^{\mathfrak{m}Z} \tag{5}$$

證明　(5)の両辺を$e^{\mathfrak{m}Z}$で割れば

$$1 \leq \frac{\mathfrak{m}e^Z}{e^{\mathfrak{m}Z}} = \mathfrak{m}\frac{e^Z}{e^{\mathfrak{m}Z}} = \mathfrak{m}e^{Z-\mathfrak{m}Z}$$

であるから平均値が0なる確率変数Zについて、$1 \leq \mathfrak{m}e^Z$を證明すれば充分である。所でTaylor展開によれば

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2 e^{\theta x}}{2} \quad (0 < \theta < 1)$$

であるから指定の確率変数Zについて

$$\mathfrak{m}e^Z = 1 + \mathfrak{m}Z + \mathfrak{m}\frac{Z^2 e^{\theta Z}}{2} = 1 + \mathfrak{m}\frac{Z^2 e^{\theta Z}}{2}$$

であるが$\frac{Z^2 e^{\theta Z}}{2}$は常に正なる確率変数であるから、結局$\mathfrak{m}e^Z \geq 1$を得る。

この補助定理1でZの代りに$\log X\ (X > 0)$なる確率変数を用ふると

$$\mathfrak{m}X = \mathfrak{m}e^{\log X} \geq e^{\mathfrak{m}\log X}$$

となり第一の目標(3)を得る。又補助定理1の證明中よりわかるように(3)に於て等號が成立するための必要充分條件はXが定数なることである。(1)で言へば等式が成立するための必要充分條件はx_iがすべて同じであることである。

補助定理2 —— 区間〔0.1〕の値のみをとる確

率変数をZとすれば

$$\log(1-mZ) \geq m\log(1-Z)$$

証明　mZ^m がすべてのnについて存在するから

$$\begin{cases}\log(1-mZ) = -\left(mZ+\frac{(mZ)^2}{2}+\frac{(mZ)^3}{3}+\cdots\right)\\ m\log(1-Z) = -\left(mZ+\frac{mZ^2}{2}+\frac{mZ^3}{3}+\cdots\right)\end{cases}$$

なる展開を得るが、一般の確率変数Xに関するよく知られた不等式

$$m|X| \leq (m|X|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (m|X|^3)^{\frac{1}{3}} \leq \cdots$$

によって、この両展開の対應項を比較すると常に上式の方が小さいから、負号を考慮すれば、結局

$$\log(1-mZ) \geq m\log(1-Z)$$

を得る。

この補助定理2でZの代りに確率変数$1-\frac{1}{Y}$($1\leq Y<\infty$)を代入すれば

$$\log\left(m\frac{1}{Y}\right) \geq m\log\frac{1}{Y}$$

$$\therefore\quad m\frac{1}{Y} = e^{\log(m\frac{1}{Y})} \geq e^{m\log\frac{1}{Y}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{m\frac{1}{Y}} \leq e^{-m\log\frac{1}{Y}} = e^{m\log Y}$$

即ち第二の目標(4)が得られた。又補助定理2より判かる様に(4)で等號が成立するための必要充分條件はYが定数なることである。(2)で言へば等式が成立するための必要充分條件はx_iがすべて同じであることである。

尚(3)に於てXを確率pで正数aを、$q=1-p$

で正数bをとる確率変数とすれば、よく知られた不等式

$$ap + bq \geq a^p \cdot b^q$$

が得られる。同様にして、この拡張

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n \geq a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}$$

（但し $a_i > 0$, $p_i > 0$, $\sum p_i = 1$）

も (3) に含まれる。