(23) Weierstrass の定理に関する一注意

所員　　魚返　正

1。閉区間 $[a, b]$ で連続な函数 $f(x)$ は多項式により一様に近似出来ることを主張する Weierstrass の定理の証明は色々あるが最も初等的なものは Bernstein の多項式を用いるゆはば確率論的な証明であろう[1]。
$t = \dfrac{x-a}{b-a}$ によって $[a, b]$ を $[0, 1]$ にうつすことが出来るから初めから $[0, 1]$ で連続な函数 $f(t)$ を考へる。

Weierstrass の定理（Bernstein）

$f(t)$ に対する Bernstein の多項式

$$P_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} t^{\nu}(1-t)^{n-\nu}$$

は $n \to \infty$ とき　$0 \leqq t \leqq 1$ で一様に

$$P_n(t) \longrightarrow f(t)。$$

さてこの $P_n(t)$ は二項分布に従ふ確率変数の連続函数の平均値と考へられる。又 t は二項分布の平均値である。
Bernstein は次に述べる確率論的考へから此の多項式を考へたのであろう。

2。定理　$\{X_n(t)\}$ を t を parameter とする確率変数列とし、次の條件をみたすとする。

1) 例へば 高木貞治著解析概論 P 328.

(イ) $t_1 \leqq X_n \leqq t_2$ （この仮定はなくともよいが説明の簡単のため設けておく）。

(ロ)

$$E(X_n(t)) = t.$$

(ハ)

$$\sigma(X_n(t)) \xrightarrow{\text{一様}} 0 \quad (n \to \infty) \quad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

（E, σ は夫々平均値及び標準偏差を表はす）

しかるとき $t_1 \leqq t \leqq t_2$ で連続な任意の函数 $f(t)$ に対して $n \to \infty$ のとき $t_1 \leqq t \leqq t_2$ で一様に

$$E[f(X_n(t))] \to f(t)$$

証明。

$f(t)$ の一様連続性から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|t' - t''| < \delta$ なる t', t'' に対して

(1) $$|f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

なるように $\delta > 0$ をとる。又

(2) $$|f(t)| < M$$

とす。

仮定(ハ)から，$n > N(\varepsilon)$，及び $t_1 \leqq t \leqq t_2$ に対して

(3) $$\sigma^2(X_n(t)) < \frac{\delta^2 \varepsilon}{4M}$$

が成立するように $N(\varepsilon)$ ととる。

X_n の分布函数を $F_n(x)$ とし

$$f(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, d\,F_n(x)$$

に注意して

$$E[f(X_n(t))] - f(t) = \int_{t_1}^{t_2} (f(x) - f(t))\, dF_n(x)$$

$$|E[f(X_n(t))] - f(t)| \leqq \int_{t_1}^{t_2} |f(x) - f(t)|\, dF_n(x)$$

$$\leqq \int_{\Lambda} (|f(x)| + |f(t)|)\, dF_n(x) + \int_{|x-t|<\delta} |f(x) - f(t)|\, dF_n(x)$$

$$\Lambda = (|x-t| \geqq \delta)$$

(1) (2) から

$$\leqq 2M\, Pr(|X_n - t| \geqq \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

TchebychEff の不等式から

$$\leqq 2M \frac{\sigma^2(X_n(t))}{\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$n > N(\varepsilon)$ のときは (3) から

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (\qquad)$$

る。 さて $\{y_n\}$ を 1, 0 を夫々確率 t, 1−t でとる確率変数列とし

$$X_n(t) = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$$

とおけば

$$E(X_n(t)) = t \qquad \sigma^2(X_n(t)) = \frac{t(1-t)}{n}$$

$$0 \leqq X_n \leqq 1$$

となり定理の仮定をみたす。故に

$$E[f(X_n(t))] = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r}$$

は一様に $f(t)$ に収斂する。 以　上