(47) 正規回歸の理論及び其の應用に就て

統計数理研究所　　小川潤次郎

はしがき

S.S. Wilks, Mathematical Statistics, 1943 p. 157 第VIII章に正規回歸の理論（Normal Regression Theory）として次の如き結果がある[1]。

y_ν, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n$ は夫々母平均 $\sum_{p=1}^{k} a_p x_{\nu p}$, $\nu = 1, \cdots\cdots, n$ 母分散が共通な σ^2 である正規母集團から抽出された任意標本とする。$a_1, \cdots\cdots, a_k$ の最尤推定値を夫々 $\hat{a}_1, \cdots\cdots, \hat{a}_k$ とするとき，$a^*_{pq} = \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu p} x_{\nu q}$, $a_{op} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu x_{\nu p}$, $p, q = 1, 2, \cdots\cdots, k$ は母平均が 0，分散行列 $\left(\frac{a^*_{pq}}{\sigma^2}\right)^{-1}$ なる k－変数正規分布をなし，又

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(y_\nu - \sum_{p=1}^{k}\hat{a}_p x_{\nu p}\right)^2$$

は $\hat{a}_p - a_p$, $p = 1, 2, \cdots\cdots, k$ と目統計的に独立であつて，自由度 $n-k$ の χ^2－分布をする。

又更に，上の場合に a_p の間に $r\ (\leqq k)$ 個の一次独立な一次関係式

$$g_{j1}a_1 + g_{j2}a_2 + \cdots\cdots + g_{jk}a_k = 0,$$
$$j = 1, 2, \cdots\cdots r$$

があるとき，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ の最尤推定値を夫々 $\hat{a}^*_1, \hat{a}^*_2, \cdots\cdots, \hat{a}^*_k$ とすれば，$\hat{a}^*_p - a_p$, $p = 1, 2, \cdots\cdots, k$ は $(k-r)$

変数正規分布に従ひ，又

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(y_\nu - \sum_{p=1}^{k} a_p{}^* x_{\nu p}\right)^2$$

は自由度（$n-k+r$）の χ^2－分布をなし，$\hat{a}_p^* - a_p^*$，$p=1,\cdots\cdots,k$ とは統計的には独立である。

ところで，Wilks の教科書にある證明を見ると，此等の統計量の間の独立性の證明に有名な Cochran の定理を用ひるのであるが，その證明の代数的核心をよく把握して見ると，この独立性の證明には必ずしも Cochran の定理は必要でないと思はれる。

筆者の研究の目的は，正規回帰理論の代数的な構造を摘出し，此の考へ方を應用して多変数正規分布に於ける諸種の統計量の分布を統一的に求めることにあるのであるが，本稿では，Wilks の一般化分散（generalized variance）及び Hotelling の一般化された Student 比 T（generalized Student ratio）の分布を求めることに就いて述べよう。

§1．代数的な問題

先づ最初には，次の様な全く代数的な問題を考察する。

三つの行列

$$\mathbb{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ \mathbb{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix},\ \mathbb{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

$(k<n)$

の内 $\mathbb{X}$ の階数は k とする。今 $\mathbb{y}$ 及び $\mathbb{X}$ が與へられたとき，$\eta = \mathbb{y} - \mathbb{X}\mathbb{a}$ の絶対値の平方

$$|\eta|^2 = (\mathbb{y} - \mathbb{X}\mathbb{a})'(\mathbb{y} - \mathbb{X}\mathbb{a})$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu - a_1 x_{\nu 1} - a_2 x_{\nu 2} \cdots\cdots - a_k x_{\nu k})^2 \tag{2}$$

を最小ならしめる如く $\mathbb{a}$ を定めることを考へよう。今その如きベクトルを $\hat{\mathbb{a}}$ で表せば，その成分 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots\cdots, \hat{a}_k$ は次の聯立一次方程式から定められるであらう。

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu p} (y_\nu - \hat{a}_1 x_{\nu 1} - \hat{a}_2 x_{\nu 2} \quad - \hat{a}_k x_{\nu k}) = 0 \qquad p = 1, 2, \cdots, k \tag{3}$$

或は書き直して

$$\hat{a}_1 \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu p} x_{\nu 1} + \hat{a}_2 \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu p} x_{\nu 2} + \cdots\cdots + \hat{a}_k \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu p} x_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu x_{\nu p} \qquad p = 1, 2, \cdots k \tag{4}$$

左辺の係数の作る行列は $\mathbb{X}'\mathbb{X}$ であつて，Wilks の記号を用ひるならば

$$\mathbb{X}'\,\mathbb{X} = (a^*_{pq}) \qquad p, q = 1, 2, \cdots\cdots k \tag{5}$$

である。今二次形式

$$\sum_{p,q=1}^{k} a^*_{pq} \xi_p \xi_q \tag{6}$$

を考へると

$$\sum_{p,q=1}^{k} a^*_{pq} \xi_p \xi_q = \sum_{p,q=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu p} x_{\nu q} \xi_p \xi_q$$

$$=\sum_{v=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}x_{vp}\xi_p\sum_{q=1}^{k}x_{vq}\xi_q$$

$$=\sum_{v=1}^{n}(x_{v1}\xi_1+x_{v2}\xi_2+\quad+x_{vk}\xi_k)^2>0 \quad (7)$$

となつて，二次形式 $\sum_{p,q=1}^{k}a^*_{pq}\xi_p\xi_q$ は正値二次形式であるから

$$|\mathbb{X}'\mathbb{X}|=|a^*_{pq}|\neq 0 \quad (8)$$

依つて，(4)の解をベクトル記号で書くと

$$\hat{\mathbb{a}}=(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{y} \quad (9)$$

となる。

以上の代数的な操作を幾何的に解釈すれば次のやうになる。

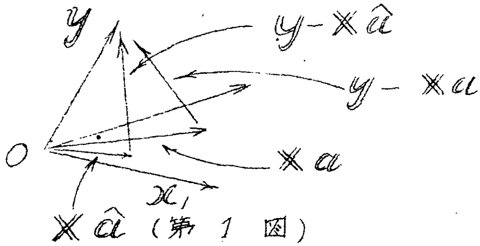
即ち，今ベクトル

$$\mathbb{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},\quad \mathbb{X}_v=\begin{bmatrix}x_{1v}\\x_{2v}\\\vdots\\x_{nv}\end{bmatrix},\ v=1,2,\cdots,k \quad (10)$$

を n 次元ユークリッド空間の点のある定つた直交坐標系 $\mathbb{e}^0_1,\mathbb{e}^0_2,\cdots,\mathbb{e}^0_n$ に対する坐標，或は又原点から，その点に向って引かれたベクトルと考へることが出来る。[2]

$\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,\cdots\mathbb{X}_k$ は一次独立であるから，それは k 次元の部分空間を張る。(2)式を最小ならしめる如く $\hat{\mathbb{a}}$ を定めることは，その成分が(3)を満足する如く $\hat{\mathbb{a}}$ を定めることであつて，(3)式は $\mathbb{y}-\mathbb{X}\hat{\mathbb{a}}$ と云ふベクトルが、

$x_1, x_2, \cdots x_k$ と直交することを示す。換言すればベクトル y の終点から k 次元部分空間 ($x_1, x_2 \cdots x_k$ の張る) へ垂線を下すことである。従ってベクトル $y-\mathbf{X}\hat{a}$ はこの部分空間に垂直な ($n-k$) 次元空間にあることになる。



(第 1 図)

そこで，若し坐標軸を適当に回転して初めの k 個の軸が k 次元部分空間の内にあり，残りの ($n-k$) 個の軸はそれに垂直な ($n-k$) 次元空間の内にある様にすることが出来る。

然るときには

$$\eta \equiv y-\mathbf{X}a = y-\mathbf{X}\hat{a}+\mathbf{X}(\hat{a}-a) \tag{11}$$

として

$$\mathbf{X}(\hat{a}-a) = \zeta_1 e_1 + \cdots\cdots + \zeta_k e_k \tag{12}$$

$$y-\mathbf{X}\hat{a} = \zeta_{k+1} e_{k+1} + \cdots\cdots + \zeta_n e_n \tag{13}$$

ところで，原の坐標系に関して

$$\eta = \eta_1 e_1^0 + \eta_2 e_2^0 + \cdots\cdots + \eta_n e_n^0 \tag{14}$$

として，坐標系の間の変換を

$$e_\nu^0 = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu\nu} e_\mu . \tag{15}$$

で與へれば，直交軸の間の変換であるから行列

$$C = (C_{\mu\nu}) \tag{16}$$

は直交行列である。

(11)(12)(13)(14)(15)を用ひて

$$\mathfrak{y} = \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu e_\nu^0 = \sum_{\mu\nu=1}^{n} \eta_\nu C_{\mu\nu} e_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} \zeta_\mu e_\mu$$

から

$$\zeta = C\,\mathfrak{y} \tag{17}$$

ところで、$\hat{\mathfrak{a}}$ は垂線の足へ原点から引いたベクトルを $\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots\cdots, \mathfrak{x}_k$ を坐標軸として表わしたものと考へられるから、新しい坐標系に関して

$$e_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} k_{\mu\nu} \mathfrak{x}_\mu, \quad \nu = 1, 2, \cdots\cdots, k \tag{18}$$

とすれば,(12)より

$$X(\hat{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) = \sum_{\nu=1}^{k} \zeta_\nu e_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} \left(\sum_{\nu=1}^{k} k_{\mu\nu} \zeta_\nu\right) \mathfrak{x}_\mu \tag{19}$$

であるから

$$\hat{a}_p - a_p = \sum_{\nu=1}^{k} k_{p\nu} \zeta_\nu \quad p = 1, \cdots\cdots\cdots, k \tag{20}$$

又は

$$\zeta^{(1)} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_k \end{pmatrix} \tag{21}$$

として、行列記号を用ひると

$$\hat{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a} = K \zeta^{(1)} \tag{22}$$

(13)より

$$q \equiv (\mathfrak{y} - X\hat{\mathfrak{a}})'(\mathfrak{y} - X\hat{\mathfrak{a}}) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(y_\nu - \sum_{p=1}^{k} a_p x_{\nu p}\right)^2$$

$$= \zeta_{k+1}^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \zeta_n^2 \tag{23}$$

となる。

次に(2)を最小ならしめるとき，$a_1, a_2, \cdots\cdots a_k$ に r 個の一次独立な線形條件のある場合を考へよう。

$$g_{j1}a_1+g_{j2}a_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+g_{jk}a_k=0 \qquad (24)$$

$$j=1,2,\cdots\cdots r\ (r\leqq k)$$

このときは，Lagrange の multiplier $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r$ を用ひて

$$\Phi\equiv\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu-a_1x_{\nu1}\cdots\cdots-a_kx_{\nu k})^2+2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(g_{j1}a_1+\cdots+g_{jk}a_k) \qquad (25)$$

とおいて，これを a_p, $p=1,2,\cdots,k$ で偏微分して

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_p}=-2\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu p}(y_\nu-a_1x_{\nu1}\cdots-a_kx_{\nu k})+2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j g_{jp}$$

$$p=1,2,\cdots\cdots,k \qquad (26)$$

となるから、(24)なる r 個の線形條件の下に，(2)を最小ならしめる $\boldsymbol{a}$ の値 $\hat{\boldsymbol{a}}^*$ は，その成分が次の聯立一次方程式の解となる。

$$\hat{a}_1^*\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu p}x_{\nu1}+\cdots\cdots+\hat{a}_k^*\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu p}x_{\nu k}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu x_{\nu p}+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j g_{jp} \qquad (27)$$

$$p=1,2,\cdots\cdots k$$

以上の操作を幾何学的に解釋すれば，次の如くなる。前に述べた如く，n 次元ユークリッド空間内で $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots \mathfrak{X}_k$ の張る k 次元部分空間を考へて，特に $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots \mathfrak{X}_k$ をその部分空間の坐標軸に取れば，(24)は r 個の，その内の何れの二つも一致しない超平面を表はす。この r 個の超平面の交りである $(k-r)$ 次元部分空間に、

ベクトル $\mathfrak{y}$ の終点から垂線を下し、原点から，この垂線の足に引いたベクトルが $\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{a}}^*$ となる。

従って $\mathfrak{y}-\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{a}}^*$ なるベクトルはこの（$k-r$）次元部分空間に垂直な（$n-k+r$）次元部分空間のベクトルである。そこで前に用ひた坐標系 $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_k, \cdots \mathfrak{e}_n$ の内最初の（$k-r$）個は，この（$k-r$）次元の部分空間内にあるやうにすることが出来る。

$$\eta \equiv \mathfrak{y}-\mathfrak{X}\mathfrak{a}=\mathfrak{y}-\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{a}}^*+\mathfrak{X}(\hat{\mathfrak{a}}^*-\mathfrak{a}) \tag{28}$$

と書き直せば

$$\mathfrak{X}(\hat{\mathfrak{a}}^*-\mathfrak{a})=\zeta_1\mathfrak{e}_1+\cdots\cdots+\zeta_{k-r}\mathfrak{e}_{k-r} \tag{29}$$

$$\mathfrak{y}-\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{a}}^*=\zeta_{k-r+1}\mathfrak{e}_{k-r+1}+\cdots\cdots+\zeta_n\mathfrak{e}_n \tag{30}$$

とすれば

$$\zeta = C\eta$$

となることは前と同じ、こゝで

$$\mathfrak{e}_\nu=\sum_{\mu=1}^{k} k^*_{\mu\nu}\mathfrak{x}_\mu,\quad \nu=1,2,\cdots\cdots k-r \tag{31}$$

とすれば

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(\hat{\mathfrak{a}}^*-\mathfrak{a}) &= \sum_{p=1}^{k}(\hat{a}^*_p-a_p)\mathfrak{x}_p \\ &= \sum_{p=1}^{k-r}\zeta_p\mathfrak{e}_p=\sum_{\mu=1}^{k}\Big(\sum_{\nu=1}^{k-r}k^*_{\mu\nu}\zeta_\nu\Big)\mathfrak{x}_\mu\end{aligned} \tag{32}$$

であるから

$$\hat{\mathfrak{a}}^*-\mathfrak{a}=K^*\zeta^{*(1)} \tag{33}$$

又（30）から

$$\begin{aligned}q^* &= (\mathfrak{y}-\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{a}}^*)'(\mathfrak{y}-\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{a}}^*) \\ &= \zeta^2_{k-r+1}+\cdots\cdots\cdots+\zeta^2_n\end{aligned} \tag{34}$$

となる。

以上が正規回帰理論の代数的な骨組である。

§2 正規回帰理論

S.S. Wilks に従つて問題を述べると、次のやうになる。(3) 後節と記号の統一を圖る為に Wilks とは若干記号を変更する。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-a_1x_1-\cdots-a_kx_k)^2} dy \tag{35}$$

なる正規母集團を考へて，$x_1, x_2, \cdots\cdots x_k$ に $x_{\nu 1}, x_{\nu 2}\cdots x_{\nu k}$ なる値を與へたときの，y の標本値を y_ν とする。
但しこのとき，k 個のベクトール

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}, \quad p=1,2,\cdots,k \tag{36}$$

は一次独立とする。

このとき標本値からの $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の最尤推定値を夫々 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots \hat{a}_k$ とすれば

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{37}$$

である。或は又

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{X} \tag{38}$$

を用ひて，(37) を書き直せば

$$\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\eta} \tag{39}$$

前節の結果を用ひれば，$\boldsymbol{\eta}$ に適当な直交変換 C を施して

$$\zeta = C\eta \tag{40}$$

とするとき

$$\hat{a} - a = K\zeta^{(1)} \tag{41}$$

となり，又

$$q \equiv (y - X\hat{a})'(y - X\hat{a})$$
$$= \zeta_{k+1}^2 + \text{-----} + \zeta_n^2 \tag{42}$$

とすることが出來る。

ところで，$\eta_1, \eta_2, ----, \eta_n$ は毋平均 0，毋分散 σ^2 の互に独立な正規分布に従ふのであるから，（40）に於て C が直交行列であることから $\zeta_1, ----, \zeta_n$ に関しても同様である。依つて $\hat{a} - a$ と q とは独立であつて

$$q = \sigma^2 \chi_{n-k}^2 \tag{43}$$

である。

又（39）から明かな如く $\hat{a} - a$ は毋平均 0，分数行列 $\sigma^2(X'X)^{-1}$ の k 変数正規分布をなす。

次に r 個の一次独立な線形條件式があるときには，

$$\eta \equiv y - Xa = y - X\hat{a}^* + X(\hat{a}^* - a) \tag{44}$$

と書き直せば，前と同一の直交変換 C に依つて

$$\zeta = C\eta \tag{45}$$

とすれば

$$\hat{a}^* - a = K^*\zeta^{*(1)} \tag{46}$$

但し K^* は $k.(k-r)$ 行列で

$$\zeta^{*(1)} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{k-r} \end{bmatrix} \tag{47}$$

である。又

$$q^* \equiv (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}^*)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}^*)$$

$$= \zeta_{k-r+1}^2 + \cdots\cdots + \zeta_k^2 + \zeta_{k+1}^2 + \cdots + \zeta_n^2 \qquad (48)$$

となる。従って，(24) と云ふ條件の下では

$$q^* - q = \sigma^2 \chi_r^2 \qquad (49)$$

となる。

以上が，正規回歸理論の主要な結果であるが，これを用ひて，次のやうな假說の檢定の問題を考へて見よう。

(35) なる母集團に於て，檢定すべき假說は (24) であるとする。このとき最大尤度比を作る際に，k 次元部分空間を Ω，$(k-r)$ 次元の部分空間を ω とする。Wilks に倣って尤度函數を $P(O_n; a_1, \cdots\cdots a_k, \sigma^2)$ で表せば，最大尤度比λは

$$\lambda = \frac{\max_\omega P(O_n; a_1, \cdots; a_k, \sigma^2)}{\max_\Omega P(O_n; a_1, \cdots, a_k, \sigma^2)} \qquad (50)$$

となる。これを計算すれば，(4) 次の如くなる。

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (51)$$

但しこゝに

$$\hat{\sigma}_\Omega^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \sum_{p=1}^{k}\hat{a}_p x_{\nu p})^2 \equiv \frac{1}{n} q$$

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \sum_{p=1}^{k}\hat{a}_p^* x_{\nu p}) \equiv \frac{1}{n} q^* \qquad (52)$$

従って

$$\lambda = \left(\frac{q}{q^*}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{q}{q + (q^* - q)}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (53)$$

検定すべき假設(24)が真であると云ふ條件の下では

$$g = \sigma^2 \chi^2_{n-k}, \quad g^* - g = \sigma^2 \chi^2_r \tag{54}$$

は互に stochastic に独立であるから

$$\frac{g}{g + (g^* - g)} = \frac{\chi^2_{n-k}}{\chi^2_{n-k} + \chi^2_r} \equiv \lambda_{n-k,r} \tag{55}$$

とおくと、$\lambda_{n-k,r}$ なる確率変数は

$$\frac{1}{B\left(\frac{n-k}{2}, \frac{r}{2}\right)} x^{\frac{n-k}{2}-1} (1-x)^{\frac{r}{2}-1} \tag{56}$$

なる密度函数をもつ。

通常は $\lambda_{n-k,r}$ の分布を求めずに，λ は $\dfrac{g^*-g}{g} \equiv \dfrac{\chi^2_r}{\chi^2_{n-k}}$ の単調減少函数であることから $\dfrac{\chi^2_r}{\chi^2_{n-k}}$ の分布を用ひる。それには $\dfrac{n-k}{r}\dfrac{\chi^2_r}{\chi^2_{n-k}}$ が自由度 r, $n-k$ のF分布をすることから

$$\frac{\chi^2_r}{\chi^2_{n-k}} = \frac{r}{n-k} F_{r,n-k}$$

となることを用ひる。(5)

本稿では，後節に利用する為に $\lambda_{\mu,\nu}$ を導入しておく。

(56) の証明

$$\lambda_{\mu,\nu} = \frac{\chi^2_\mu}{\chi^2_\mu + \chi^2_\nu} = \frac{1}{1 + \frac{\chi^2_\nu}{\chi^2_\mu}} \tag{57}$$

$F \equiv \dfrac{\mu \chi^2_\nu}{\nu \chi^2_\mu}$ は自由度 ν, μ のF分布であるから，その密度函数は

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} F^{\frac{\nu}{2}-1} \left(1 + \frac{\nu}{\mu}F\right)^{-\frac{\nu+\mu}{2}} dF \tag{58}$$

こゝで
$$F \equiv \frac{\mu}{\nu}\frac{\chi_\nu^2}{\chi_\mu^2} = \frac{\mu}{\nu}\left(\frac{1}{\lambda_{\mu,\nu}} - 1\right) \tag{59}$$

なる変数変換をすれば
$$dF = -\frac{\mu}{\nu}\frac{1}{\lambda_{\mu,\nu}^2}\,d\lambda_{\mu,\nu} \tag{60}$$
$$F^{\frac{\nu}{2}-1} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}-1}(1-\lambda_{\mu,\nu})^{\frac{\nu}{2}-1}\lambda_{\mu,\nu}^{-\frac{\nu}{2}+1} \tag{61}$$
$$\left(1+\frac{\nu}{\mu}F\right)^{-\frac{\nu+\mu}{2}} = \lambda_{\mu,\nu}^{\frac{\nu+\mu}{2}} \tag{62}$$

であるから，(58) に代入して
$$\frac{1}{B\left(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}-1}(1-\lambda_{\mu,\nu})^{\frac{\nu}{2}-1}\lambda_{\mu,\nu}^{-\frac{\nu}{2}+1}\cdots$$
$$\cdots\lambda_{\mu,\nu}^{\frac{\nu+\mu}{2}}\frac{\mu}{\nu}\lambda_{\mu,\nu}^{-2}\,d\lambda_{\mu\nu}$$
$$= \frac{1}{B\left(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\lambda_{\mu,\nu}^{\frac{\mu}{2}-1}(1-\lambda_{\mu,\nu})^{\frac{\nu}{2}-1}\,d\lambda_{\mu,\nu} \tag{63}$$

となる。

この $\lambda_{\mu,\nu}$ なる確率変数に関しては次の関係式が成立する。$\lambda_{\mu-k,k}$ と $\lambda_{\mu,\nu}$ とが互に Stochastic に独立なら
$$\lambda_{\mu-k,\nu+k} = \lambda_{\mu-k,k}\,\lambda_{\mu,\nu} \tag{64}$$

証　明。$\lambda_{\mu-k,k}$ と $\lambda_{\mu,\nu}$ との同時分布を作ると
$$\frac{1}{B\left(\frac{\mu-k}{2},\frac{k}{2}\right)B\left(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right)}x^{\frac{\mu-k}{2}-1}(1-x)^{\frac{k}{2}-1}y^{\frac{\mu}{2}-1}(1-y)^{\frac{\nu}{2}-1}\,dx\,dy \tag{65}$$

$xy=\lambda$ とおくと

$$y=x^{-1}\lambda,\quad dx\,dy=x^{-1}dy\,d\lambda \tag{66}$$

であるから、(66) を (65) に代入して

$$\frac{1}{B(\frac{\mu-k}{2},\frac{k}{2})B(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2})}x^{-\frac{\nu+k}{2}}(1-x)^{\frac{k}{2}-1}(x-\lambda)^{\frac{\nu}{2}-1}dx\,\lambda^{\frac{\mu}{2}-1}d\lambda \tag{67}$$

こゝで

$$\frac{x}{x-1}=\frac{Z}{1-\lambda} \tag{68}$$

なる変数の変換を施すと

$$x=\frac{-\lambda Z}{1-\lambda-Z}\equiv-\lambda Zp^{-1},\quad p\equiv1-\lambda-Z \tag{69}$$

$$1-x\equiv(1-\lambda)(1-Z)p^{-1} \tag{70}$$

$$x-\lambda\equiv-\lambda(1-\lambda)p^{-1} \tag{71}$$

$$dx\equiv-\lambda(1-\lambda)p^{-2}dZ \tag{72}$$

(69)〜(72) を (67) に代入して，Zで積分すれば

$$\frac{1}{B(\frac{\mu-k}{2},\frac{k}{2})B(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2})}(-1)^{-\frac{k}{2}}\lambda^{\frac{\mu-k}{2}-1}(1-\lambda)^{\frac{k+\nu}{2}-1}d\lambda\int_0^1 Z^{-\frac{\nu+k}{2}}(1-Z)^{\frac{k}{2}-1}dZ \tag{73}$$

これをZで積分するのであるが，$Z=\zeta^{-1}$とすれば，

$$\int_0^1 Z^{-\frac{\nu+k}{2}}(1-Z)^{\frac{k}{2}-1}dZ$$
$$=(-1)^{\frac{k}{2}}\int_0^1\zeta^{\frac{\nu}{2}-1}(1-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta=(-1)^{\frac{k}{2}}B(\tfrac{\nu}{2},\tfrac{k}{2}) \tag{74}$$

これを (73) に代入して，求むる $\lambda_{\mu-k,k}\cdot\lambda_{\mu,\nu}$ の分布は

$$\frac{B(\frac{\nu}{2},\frac{k}{2})}{B(\frac{\mu-k}{2},\frac{k}{2})B(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2})}\lambda^{\frac{\mu-k}{2}-1}(1-\lambda)^{\frac{k+\nu}{2}-1}d\lambda$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{\mu-k}{2}, \frac{k+\nu}{2}\right)} \lambda^{\frac{\mu-k}{2}-1} (1-\lambda)^{\frac{\nu+k}{2}-1} d\lambda \qquad (75)$$

これで證明出來た。(64)の関係式は後節で用ひる。

§3 多変数正規分布へ正規回帰の理論を応用すること

母平均 $m_1, m_2, \text{------}, m_k$ 母集團の分散行列

$$\Lambda = (l_{ij}) \qquad i,j = 1, 2, \text{-----}, k$$

その逆行列を $\Lambda^{-1} = (l^{ij})$, 行列式を $\Lambda = |l_{ij}|$ とする。k 変数の正規母集團

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} l^{ij}(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_k \qquad (76)$$

を考へる。S. S. Wilks, Mathematical Statistics, 1943, p. 63 に從つて、

$$y_i = \xi_i - m_i, \quad i = 1, 2, \text{-----}, k \qquad (77)$$

$$Z_1 = y_1 + \frac{1}{l^{11}} \sum_{j=2}^{k} l^{1j} y_j \qquad (78)$$

$$l^{ij(1)} = l^{ij} - \frac{l^{i1} l^{1j}}{l^{11}}, \quad i, j = 2, \text{----} k \qquad (79)$$

とおくと, (76) は

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[l^{11} Z_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} l^{ij(1)} y_i y_j\right]} dZ_1 dy_2 \text{---} dy_k \qquad (80)$$

となり，更に

$$Z_2 = y_2 + \frac{1}{l^{22(1)}} \sum_{j=3}^{k} l^{2j(1)} y_j \qquad (81)$$

－－－－－－－－－－－

$$Z_k = y_k \qquad (82)$$

$$l^{ij(2)} = l^{ij(1)} - \frac{l^{2i(1)} l^{2j(1)}}{l^{22(1)}} \qquad (83)$$

とおくと，

$$\frac{1}{\Lambda} = l^{11} l^{22(1)} \cdots\cdots l^{kk(k-1)} \qquad (85)$$

であって，原の分布は

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(l^{11} Z_1^2 + l^{22(1)} Z_2^2 + \cdots + l^{kk(k-1)} Z_k^2\right)} dZ_1 dZ_2 \cdots dZ_k \qquad (86)$$

となる。

(78) 式を書き直して

$$\xi_1 - \beta_{12} \xi_2 - \cdots\cdots - \beta_{1k} \xi_k - \alpha_1 = Z_1 \qquad (87)$$

とかくと，Z_1 は $\xi_2, \cdots\cdots, \xi_k$ とは stochastic に独立であって

$$平均\ E(Z_1) = 0,\ 分散\ D(Z_1) \equiv \sigma_{1\cdot 2 \cdots k} = \frac{1}{l^{11}} = \frac{\Lambda}{\Lambda_{11}} \qquad (88)$$

なる正規分布をなす確率変数である。

こゝで $\xi_2, \xi_3, \cdots\cdots \xi_k$ を固定したときの，ξ_1 の條件附確率を考へると，Z_1 は $\xi_2, \cdots\cdots \xi_k$ と stochastic に独立であるから，その分布は変らない。そこで (87) は此の條件付確率に於ける ξ_1 の $\xi_2, \cdots\cdots \xi_k$ への回帰方程式と考へる

ことが出来るであらう。

この母集團から取られた大きさnの任意標本を

$$\mathbb{X}=\left\{\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nk} \end{matrix}\right\} \tag{89}$$

とする。（87）式をξ_1の$\xi_2,\cdots\cdots,\xi_k$への回帰方程式と考へて，（89）なる標本値から$\beta_{12},\cdots\cdots,\beta_{1k}$，$\alpha_1$の最尤推定値を

$$\hat{\beta}_{12},\cdots\cdots\cdots,\hat{\beta}_{1k},\ \hat{\alpha}_1 \tag{90}$$

とすると，それは先づ

$$\hat{\alpha}_1=\bar{x}_1-\beta_{12}\bar{x}_2-\cdots\cdots\cdots-\beta_{1k}\bar{x}_k \tag{91}$$

これを代入して

$$\sum_{\nu=1}^{k}\left[(x_{\nu1}-\bar{x}_1)-\beta_{12}(x_{\nu2}-\bar{x}_2)\cdots\cdots\beta_{1k}(x_{\nu k}-\bar{x}_k)\right]^2 \tag{92}$$

を最小ならしめる$\hat{\beta}_{12},\cdots\cdots\cdots,\hat{\beta}_{1k}$を定めればよい。

従って§§1,2に用ひた方法で

$$a_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{\nu i}-\bar{x}_i)(x_{\nu j}-\bar{x}_j) \tag{93}$$

とすれば，$\hat{\beta}_{12}$-------,$\hat{\beta}_{1k}$は聯立一次方程式

$$\sum_{\nu=1}^{n}(x_{\nu p}-\bar{x}_p)\left[(x_{\nu1}-\bar{x}_1)-\hat{\beta}_{12}(x_{\nu2}-\bar{x}_2)\cdots\hat{\beta}_{1k}(x_{\nu k}-\bar{x}_k)\right]=0$$

$$p=2,\cdots,k \tag{94}$$

の解であるから，書直して

$$a_{22}\hat{\beta}_{12}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{2k}\hat{\beta}_{1k}=a_{21}$$

$$a_{k2}\hat{\beta}_{12}+\cdots\cdots\cdots+a_{kk}\hat{\beta}_{1k}=a_{k1} \qquad (95)$$

そこで、今

$$A=|a_{pq}|,\quad p.q=1,2,\cdots\cdots,k \qquad (96)$$

とおいて，(95)を解くと

$$\hat{\beta}_{1q}=-\frac{A_{1q}}{A_{11}},\quad q=2,\cdots\cdots k \qquad (97)$$

従つて，この値を入れて，(92)の最小値 $q_{1\cdot2\cdots\cdots k}$ を求めると

$$\begin{aligned} q_{1\cdot2,\cdots\cdots k} &\equiv \sum_{\nu=1}^{n}\left[x_{\nu1}-\bar{x}_1-\hat{\beta}_{12}(x_{\nu2}-\bar{x}_\nu)-\cdots-\hat{\beta}_{1k}(x_{\nu k}-\bar{x}_k)\right]^2 \\ &= a_{11}-2\hat{\beta}_{12}a_{12}-\cdots-2\hat{\beta}_{1k}a_{1k}+\sum_{p,q=2}^{k}\hat{\beta}_{1p}\hat{\beta}_{1q}a_{pq} \\ &= \frac{A}{A_{11}} \end{aligned} \qquad (98)$$

となる。

母平均 $m_1=m_2=\cdots\cdots=m_k=0$ のときは，回帰方程式(87)で $\alpha_1=0$ となるから，このときは

$$a_{ij}^*=\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu i}x_{\nu j} \qquad (99)$$

$$A^*=|a_{ij}^*| \qquad (100)$$

とすれば，残差平方和 $q^*_{1\cdot2\cdots\cdots k}$ は

$$q^*_{1\cdot2\cdots k}=\frac{A^*}{A^*_{11}} \qquad (101)$$

となる。

故に §2 の結果を用ひると

$$q_{1\cdot2\cdots\cdots k}=\frac{A}{A_{11}}=\sigma_{1\cdot2\cdots k}^2\chi_{n-k}^2 \qquad (102)$$

$$q^{*}_{1\cdot 2\cdots\cdots k} = \frac{A^{*}}{A^{*}_{11}} \doteqdot \sigma^{2}_{1\cdot 2\cdots\cdots k}\chi^{2}_{n-k+1} \qquad (103)$$

であつて，$q_{1\cdot 2\cdots k}$ 及び $q^{*}_{1\cdot 2\cdots k}$ は $x_{12},\cdots\cdots x_{n2}$ $x_{13}\cdots\cdots x_{nk}$ とは stochastic に独立であることが分る。

§ 4. Wilks の一般化分散A.及び Hotelling の一般化された Student 比 T^2 の分布を求めること.

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n}(x_{\nu i}-\bar{x}_i)(x_{\nu j}-\bar{x}_j), \quad i,j=1,2,\cdots,k$$

から作られた行列式 A を Wilks に従つて(7)一般化された分散と云ふことにする。次に此の統計量の分布を求めることを問題としよう。

$$A_{(p\cdots k)} = \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pp+1}\cdots\cdots & a_{pk} \\ a_{p+1p} & a_{p+1p+1}\cdots\cdots & a_{p+1k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{kp} & a_{kp+1}\cdots\cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (104)$$

なる記号を用ひることにすれば，(102)と全く同様に考へて，ξ_p の $\xi_{p+1},\cdots\cdots\xi_k$ への回帰を考へることに依つて

$$\frac{A_{(p\cdots\cdots k)}}{A_{(p+1,\cdots\cdots k)}} = q_{p\cdot p+1\cdots\cdots k} \quad (p=1,2,\cdots,k-1) \qquad (105)$$

$$A_{(k)} \doteqdot a_{kk} = q_k \qquad (106)$$

となる。故に

$$A = \frac{A}{A_{(2\cdots k)}} \cdot \frac{A_{(2\cdots k)}}{A_{(3\cdots k)}} \cdots\cdots \frac{A_{(k-1,k)}}{A_{(k)}} \cdot A_{(k)}$$

$$= g_{1\cdot 2\cdots k} \cdot g_{2\cdot 3\cdots k} \cdots\cdots g_{k-1,k} \cdot g_k \qquad (107)$$

ところで $g_{1\cdot 2\cdots k}$ は，$x_{12}, \cdots\cdots, x_{nk}$ と stochastic に独立であつて，互に又 stochastic に独立な変数，$\eta_1, \cdots\cdots \eta_n$ の二次形式であるから，$g_{1\cdot 2\cdots k}$ は，$x_{12}, \cdots\cdots x_{nk}$ と stochastic に独立である。同様に $g_{2\cdot 3\cdots k}$ 以下についても考へて行くと，結局 nk 個の互に独立な変数

$$\eta_1, \cdots, \eta_n, \eta_1', \cdots\cdots, \eta_n', \cdots\cdots, \eta_1^{(k-1)} \cdots\cdots \eta_n^{(k-1)} \qquad (108)$$

があつて

$$g_{p,p+1\cdots k} \text{ は } \eta_1^{(p-1)}, \cdots\cdots, \eta_n^{(p-1)}$$

の二次形式であるから，(107)の右辺の因子はすべて互に stochastic に独立である。

従つて (107) より

$$A = \sigma_{1,2\cdots k}^2 \chi_{n-k}^2 \, \sigma_{2.3\cdots k} \chi_{n-k+1}^2 \cdots \sigma_k^2 \chi_{n-1}^2 \qquad (109)$$

又

$$\sigma_{1\cdot 2\cdots k}^2 = \frac{1}{l^{11}}$$

$$\sigma_{2,3\cdots k}^2 = \frac{1}{l^{22(1)}} \qquad (110)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{l^{kk(k-1)}}$$

であるから，(85) より

$$\sigma^2_{1,2\cdots k}\cdot\sigma^2_{2,3\cdots k}\cdots\cdots\sigma_k^2=\Lambda \qquad (111)$$

故にAの分布は

$$A=\Lambda\,\chi^2_{n-k}\,\chi^2_{n-k+1}\cdots\cdots\chi^2_{n-1} \qquad (112)$$

となる。

今，χ^2 を自由度 f の χ^2 分布をする確率変数とすれば，$\log\chi^2$ の積率母函数 $\phi(\theta)$ は。

$$\phi(\theta)=E(e^{\theta\log\chi^2})=E(\chi^{2\theta})$$

$$=2^\theta\frac{\Gamma(\frac{f}{2}+\theta)}{\Gamma(\frac{f}{2})} \qquad (113)$$

となるから，$\log A$ の積率母函数は直に書下せて

$$\Psi(\theta)=\log\Lambda+2^\theta\left(\frac{\Gamma(\frac{n-k}{2}+\theta)}{\Gamma(\frac{n-k}{2})}+\frac{\Gamma(\frac{n-k+1}{2}+\theta)}{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}+\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+\theta)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\right) \qquad (114)$$

となる。

Hotellingの一般化されたStudent比 T^2 とは

$$1+\frac{T^2}{n-1}=\frac{A^*}{A} \qquad (115)$$

で定義される統計量のことである。

前に述べたことから

$$\frac{A}{A^*}=\frac{g_{1,2\cdots k}}{g^*_{1,2\cdots k}}\cdot\frac{g_{2,3\cdots k}}{g^*_{2,3\cdots k}}\cdots\cdots\frac{g_k}{g^*_k} \qquad (116)$$

であるから，これを書換へて

$$\frac{A}{A^*}=\frac{g_{1,2\cdots k}}{g_{1,2\cdots k}+(g^*_{1,2\cdots k}-g_{1,2\cdots k})}\;\frac{g_{2,3\cdots k}}{g_{2,3\cdots k}+(g^*_{2,3\cdots k}-g_{2,3\cdots k})}\cdots\frac{g_k}{g_k+(g^*_k-g_k)} \tag{117}$$

再び書直して

$$\frac{A}{A^*}=\frac{\chi^2_{n-k}}{\chi^2_{n-k}+\chi^2_1}\;\frac{\chi^2_{n-k+1}}{\chi^2_{n-k+1}+\chi^2_1}\cdots\cdots\frac{\chi^2_{n-1}}{\chi^2_{n-1}+\chi^2_1} \tag{118}$$

$$=\lambda_{n-k\cdot 1}\,\lambda_{n-k+1,1}\cdots\cdots\lambda_{n-1\cdot 1} \tag{119}$$

§ 2 の (64) 式を用ひて終りからやつて行くと

$$\lambda_{n-2\cdot 1}\cdot\lambda_{n-1\cdot 1}=\lambda_{n-2\cdot 2}$$

$$\lambda_{n-3,1}\,\lambda_{n-2,2}=\lambda_{n-3,3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n-k\,1}\cdot\lambda_{n-k+1,k-1}=\lambda_{n-k,k}$$

となつて

$$\frac{A}{A^*}=\lambda_{n-k,k} \tag{120}$$

これから、T^2 の分布は出る。そしてそれは F－分布と本質的には一致することが分る。

(1948. 3. 25)

本稿 §1 は、坂本平八氏が全く同じことをやつて居られる。それは統計数理研究第2巻第1号に出る。

註

(1) S.S. Wilks, Mathematical Statistics 1943. p.162

(2) 此処では、ベクトルは、すべて其初点は原点であるものと考へておく。

(3) S.S. Wilks, Mathematical Statistics p.571

(4) S.S. Wilks 〃 p.167

(5) S.S. Wilks 〃 p.170

(6) $\mathbf{\Lambda}$ は行列を，Λ はその行列式を示す。

(7) S.S. Wilks, Certain generâli' ations in the analysis of variance, Biometrika. Vol. 24., (1932)