㊱ 偶然量の系列の階差の自己相関について

東大.一工.応数 森口繁一

1. 偶然量の系列. 同じ分布法則に従う偶然量の系列:

$$S:\ \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots \quad (1)$$

を考える、簡単のため $E(x_n)=0$ とし、また $E(x_n^2)=\sigma^2$ と書く。(すべての n について同じ).

$n \neq m$ なるとき $\rho_{n,m}=E(x_n x_m)/\sigma^2$ を系列 S の「自己相関係数」と呼ぼう、そしてすべての (n,m) の組合について $\rho_{n,m}=0$ なる系列を「無相関系列」と呼ぼう、

2. 第1階差の系列. 系列 $\{x_n\}$ が無相関系列なるとき、その第1階差 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ の作る系列の自己相関をしらべて見よう。

まず Δx_n がすべて同じ分布法則に従うことは明らかである、しかも $E(\Delta x_n)=E(x_{n+1})-E(x_n)=0$ である、それから $E((\Delta x_n)^2)$ は次ぎのように計算される:

$$E((\Delta x_n)^2)=E((x_{n+1}-x_n)^2)=E(x_{n+1}^2+x_n^2-2x_{n+1}x_n)$$
$$=2\sigma^2 \quad (2)$$

さらにまた

$$E(\Delta x_{n+1}\cdot\Delta x_n)=E((x_{n+2}-x_{n+1})(x_{n+1}-x_n))=$$
$$-E(x_{n+1}^2)=-\sigma^2 \quad (3)$$

そして $|n-m|\geq 2$ なるときは Δx_n と Δx_m とは、番号の共通な x を含まないので $E(\Delta x_n\cdot\Delta x_m)=0$.

以上をまとめると、無相関系列の第1階差の系列の自

己相関係数は、次ぎの通り：

$$\rho_{n,n+1}=-\frac{1}{2},\ \rho_{n,m}=0,\ (|n-m|\geq 2)\ \cdots\cdots(4)$$

3. 第r階差の系列. 次ぎに一般に第r階差 $(r\geq 1)$ の系列について同様の計算を試みよう、第r階差は：

$$\Delta^r x_n = x_{n+r}-\binom{r}{1}x_{n+r-1}+\binom{r}{2}x_{n+r-2}-\cdots\pm x_n\ \cdots(5)$$

であるから、$E(\Delta^r x_n)$ は勿論 0、それから

$$E((\Delta^r x_n)^2)=\left(\sigma^2+\binom{r}{1}^2\sigma^2+\binom{r}{2}^2\sigma^2+\cdots+\sigma^2\right]$$

$$=\binom{2r}{r}\sigma^2\ \cdots\cdots(6)$$

さらにまた

$$E(\Delta^r x_{n+1}\cdot\Delta^r x_n)=\left(-\binom{r}{1}\sigma^2-\binom{r}{1}\binom{r}{2}\sigma^2-\binom{r}{2}\binom{r}{3}\sigma^2\cdots\cdots\right.$$
$$\left.-\binom{r}{r-1}\sigma^2\right]=-\binom{2r}{r-1}\sigma^2\ \cdots\cdots(7)$$

同様に、

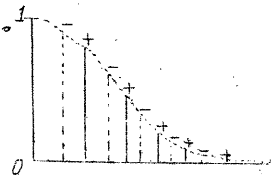
$$E(\Delta^r x_{n+2}\cdot\Delta^r x_n)=+\binom{2r}{r-2}\sigma^2,\ E(\Delta^r x_{n+3}\cdot\Delta^r x_n)$$
$$=-\binom{2r}{r-3}\sigma^2,\ \cdots\cdots,$$
$$E(\Delta^r x_{n+r}\cdot\Delta^r x_n)=(-)^r\sigma^2,\ E(\Delta^r x_m\cdot\Delta^r x_n)=0;$$
$$(|m-n|\geq r+1)\ \cdots\cdots(8)$$

従って自己相関係数は、

$$\rho_{n,n+1}=-\binom{2r}{r-1}\Big/\binom{2r}{r}=-\frac{r}{r+1},\ \rho_{n,n+2}=+\binom{2r}{r-2}$$
$$\Big/\binom{2r}{r}=+\frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)},$$
$$\rho_{n,n+3}=-\binom{2r}{r-3}\Big/\binom{2r}{r}=-\frac{r(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)},\ \cdots\cdots,$$
$$\rho_{n,n+r}=(-1)^r\Big/\binom{2r}{r},\ \rho_{n,m}=0,\ (|n-m|\geq r+1)\ \cdots\cdots(9)$$

4. 吟味. これによって見れば、$\{\Delta^r x_n\}$ の系列において、相続く2要素の間には $-r/(r+1)$ なる負の

相関がある。rが大きいときは、かなり強い負の相関である。それから間に1ツおいた——2ツ目の——要素の間の相関は、$+r(r-1)/(r+1)(r+2)$, すなわち上のものに次ぐ程度の正の相関である。3ツ目の要素の間の相関は、これより少し弱い負の相関というように進んで、離れるにつれて相関は弱まり、rコ以上の要素を間にはさむ2要素の相関は完全に0である。



以上を図示すれば大体右のようになるであらう。左端は単位の長さを示す棒で、次ぎの棒が$\rho_{n,n+1}$を、その次ぎが$\rho_{n,n+2}$を示す。以下同様、符号はカワルガワル－＋－＋－……となり、長さは2項式分布のヒストグラムと同じである（rが大きいときは大体正規分布に近いとも見られる）。

5. 応用、 もとの系列$\{x_n\}$が、例えば4捨5入の誤差である場合、第r階差$\Delta^r x_n$がどんな性質の系列を作るかゞ、上の所論によつて明らかとなる。解析的に定義される数列が4捨5入の誤差を含む近似値の表として与えられたとき、それから階差表を作つて行くと、階数rが大となるにつれて、真の値の階差は一般に絶対値が減少するに反し、誤差の階差は上の法則に従つて分散$E((\Delta^r x_n)^2)$が急激に増加し、ツイに真の値の階差が誤差の階差に埋もれてしまう、これはすでによく知られていることであるが、そのとき上の自己相関の性質を知つていれば、判断の助けになると思う（実際家はそういう

カンをもつているらしい！）

次ぎに例えば佐藤良一郎氏の方法（昭和22年10月29日，統計数理研究所「談話会」で発表）によって系列の解析と外挿とを行うとき、階差を何階までに止めるべきか、また外挿の際の誤差はどんな式で評価するか、という問題に対して、上の所論は大切な基礎を与えるであろう，すなわち偶然量の系列から、その階差の系列を導くときには、1回ごとに自己相関が強くなる、ある系列から、積集（もつと一般には重みをかけた積集）によって作られた系列の性質は、もとの系列に自己相関のないときとあるときとでは大いにちがいがある、それ故佐藤氏の方法では、階差の分布法則が正規であるかどうかをしらべるほかに、階差の系列の自己相関をしらべることが絶対に必要であると思う。そうすれば何階までとつても原理上結果は同じになるであろうと想像される。

（22－11－3（月））

㊲ 本社ニ於ケル女子社員勤續年数ノ統計

二見　　隆
伴　　次郎

周知ノ如ク本社ニオケル女子社員ノ入退社ハ極メテ頻繁デアル。而モ本店ニツイテ見ルトキ女子社員ハ六百人以上ニ達シ本店従業員ノ $\frac{2}{3}$ ヲ占メテヰル。從ツテ女子社員ガドレ程ノ期間在職スルカト云フコトハ、会社ノ経理面上カラモ、能率面上カラモ等閑ニ附セラレナイ問題デ