不規則外力ニヨル強制振動

宇野 利雄(城大理工)

強制外力$F(t)$ガ働ク場合ノ振動ノ方程式

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+(n^2+p^2)x=F(t)$$

ニ於テ,外力$F(t)$ハ殆ド週期的デハアルガソノ週期ニ若干ノ動搖ガアリ,平均ノ値ノ前後ニ正規分布ヲナス場合ヲ考ヘル。$F(t)$ガ完全ニ週期的デアレバ$F(t)=Ae^{ikt}$ノ如ク置クコトガ出来ルガ,上記ノ様ナ場合ハ外力ヲ記述スル時間ノ「あゆみ」ニブラウン運動型不規則性ガ加ハルモノト考ヘ

$$(2)\quad F(t)=A\exp\{ik(t+\xi(t))\}$$

トスレバヨイ。茲ニ$\xi(t)$ハブラウン運動ヲ記述スル彷徨函数,即チブラウン運動ヲスル点ガ時tニ於テ示メル位置ノ坐標ニ外ナラナイ。而シテコレノ特徴ハ$\xi(t)$ガξ_tト$\xi_t+d\xi_t$トノ間ニアリ,同時ニ$S>t$ナルSニツキ$\xi(S)$ガξ_sト$\xi_s+d\xi_s$トノ間ニアル確率ガ二次元正規分布

$$(3)\quad \exp\left\{-\frac{\xi_t^2}{2\sigma^2 t}-\frac{(\xi_s-\xi_t)^2}{2\sigma^2(S-t)}\right\}d\xi_t\,d\xi_s$$

ニヨツテ与ヘラレル事デアル。茲ニσ^2ハ常数デアリ,(3)ヨリ計算シテ$\{\xi(S)-\xi(t)\}^2$ノ期望値ガ$S-t$ニ比例スル事ガ分ルガ,ソノ際ノ比例ノ係数ヲ示ス。即チ

$$(4)\quad E\left[\{\xi(S)-\xi(t)\}^2\right]=\sigma^2(S-t)$$

デアル。従ッテ又最初ニ述ベタ週期ノ動揺性ニ於テ，ソノ標準偏差ガ $\frac{2\pi\sigma}{k}$ トナルガ如キ常数デアル。

(1)ノ解ハ

$$x=\frac{1}{p}\int_0^t F(u)e^{-n(t-u)}\sin p(t-u)\,du$$

ニヨッテ与ヘラレルガ，コレノ「スペクトル」ヲ下記ノ如キ方法デ計算シテ見ル。即チマヅ x ノ自己相関 $x(t)\overline{x(t+S)}$ ヲ作リ，次ニコレノ期望値ヲ求メル。

$$(5)\quad E\{x(t)\overline{x(t+S)}\}=\frac{1}{p^2}\int_0^t du\int_0^{t+S}E\{F(u)\overline{F(v)}\}\cdot e^{-n(2t+S-u-v)}\sin p(t-u)\sin p(t+S-v)\,du\,dv$$

コレヲ計算シテ更ニソノ平均値

$$(6)\quad \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T E\{x(t)\overline{x(t+S)}\}\,dt=\varphi(S)$$

ヲ取リ，然ル後 $\varphi(S)$ ノフーリエ変換

$$(7)\quad S(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(S)e^{iS\nu}\,dS$$

ヲ求ムレバ $S(\nu)d\nu$ ガ振動数 ν ニ対スル「スペクトル」ノ密度ヲ示ス。

一々ノ計算ハ煩雑ニナルノデ省略スルガ(3)ト(2)トカラ得ラレル

$$(8)\quad E\{F(u)\overline{F(v)}\}=\exp\left\{-iK(u-v)-\frac{\sigma^2K^2}{2}|u-v|\right\}$$

ヲ(5)ニ代入シテ計算ヲ遂行スレバ，結局

$$(9)\quad S(\nu)=A^2\sigma^2K^2/2\{n^2+(p-\nu)^2\}\{n^2+(p+\nu)^2\}\left\{\frac{\sigma^4K^4}{4}+(K-\nu)^2\right\}$$

ガ得ラレル。但シ $\sigma=0$ ノトキハ $\int_{-\infty}^{\nu}dS(\nu)$ ガ

$\nu = k$ ニ於テノミ跳躍ヲ有スル隋数函数トナル。(9) ニツイテ若干ノ解釈ヲ試ミル。σ, n 等ガ小デアリ、P 及ビ $k \pm P$ ニ比シ省略シ得ル量デアルトスレバ $\nu = K$ ノ附近デハ (9) ハ大略

$$(10)\quad S(K) \doteqdot \frac{2A^2}{(P^2-K^2)^2\sigma^2K^2}$$

$\nu = \pm P$ ノ附近デハ

$$(11)\quad S(\pm P) \doteqdot \frac{A^2}{4P^2(K\mp P)^2}\,\frac{\sigma^2K^2}{2n^2}$$

トナリ、且ソレゾレガホボ $S(\nu)$ ノ極大ノ位置ヲ与ヘル。(10)ト(11)トヲ比較スルニ σ ガ n ニ比シ小ナルトキハ $S(\pm P)$ ハ $S(K)$ ニ比シ小（特ニ $\sigma = 0$ トナレバ前者ハ皆無）、σ ガ n ニ比シ大ナルトキハソノ反対ニナル。

即チ週期ニ絶対ニ動揺ガ無ケレバ外力ト同一週期ノ振動ノミガアラハレ、固有振動ハ励起サレナイガ、コレニ動揺ガアレバ固有振動ガ励起サレ、且ソノ動揺ノ大ナル程大キク現レル事ガ分ル。

統計數理研究所消息

4月7日　日曜日、晴　日本数学会発起人会
　　　　に河田，小川所員出席。

4月11日　木曜日　曇
　　　　午后1時より公開講演，
　　　　兼任所員 佐藤良一郎　J. Neyman：
　　　　Basic Ideas and Some Recent Results of the Theory of Testing Statistical Hypotheses に就て

4月12日　金曜日　晴
　　　　午后1時より公開講演
　　　　前日の続き

4月26日，金曜日　曇
　　　　午后2時より所員国沢清典，談話
　　　　On a remark cerning A. Kolmogo[illegible] law of iterated logarithm.

4月27日，土曜日，晴
　　　　午后1時より講究會
　　　　所員 河田龍夫；函数のFourier-Stiel[illegible]積分による表示（II）
　　　　助手 田中祐輔；Tamarkin, Hille, "Remarks on a known examp[illegible] of a monotion continuous function の紹介。