Green's Funktion と Harmonic measure について。

所員　　綿迫　　正

1. 1933年の A. Beurling の Thèse の中にある単一連結領域についての Green の函数及び harmonic measure (masse angulaire) に関する定理を述べる。此の定理は与へられた要素（領域、内点、境界点の集合等）で定まる。幾何學的量でこの函数や measure を決定式は評價するのである

ここでは常に二つ以上の境界点を持つ単一連結領域 D のみを考へる。z_0 を D の点とするとき z_0 を極に持つ D に関する Green の函数を $G(z, z_0, D)$ とすると

$$G(z, z_0, D) = G(z^*, z_0^*, D^*)$$

である。ここに D を D^* に等角に寫像したとき z 及び z_0 は夫々 z^* z_0^* にうつるとする。このとき triple (z, z_0, D) と (z^*, z_0^*, D^*) は homologue といふことにする

γ を持つて D の到達可能な境界点 z_C（C は z_0 を定義する D 内の連續曲線）の集合とし

$$\zeta = F(z)$$

を D を単位円内に等角に寫像する函数とする。C はこの寫像で $|\zeta| = 1$ 上の一点 ζ' に終る曲線 c にうつされる。ζ を z_C の homologue といふ。この意味で γ は $\zeta = F(z)$ により $|\zeta| = 1$ 上の点集合 E にうつされる。

E が Lebesgue の意味で mesurable でその mesure が正で 2π より小なるとき γ を partie frontière 又 E が $|\zeta| = 1$ 上の arc となるとき γ を arc frontière といふことにする

今 γ を partie frontière とし poisson 積分で定義される調和函数

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} \, d\theta,$$

$re^{i\varphi} = \zeta$　　　　を考へる

Fatou の定理により Stolz の道に沿つて ζ が $|\zeta| = 1$ 上の点に近づくとき $\omega(\zeta)$ は E の上では 1 その余集合では 0 に近づく。(mesure 0 を除き)

(続き)

そこで

$$\omega(z,\gamma,D)=\omega(F(z))$$

と定義すれば $\omega(z,\gamma,D)$ は D で 0 と 1 との間の値を取る調和函数で広い意味で γ の上で 1、他の D の frontière で 0 である。Poisson 積分の性質から $\omega(z,\gamma,D)$ は写像に用ひた特別の $F(z)$ に依存しない。$\omega(z,\gamma,D)$ は Green の函数同様に

$$\omega(z,\gamma,D)=\omega(z^*,\gamma^*,D^*)$$

が成立する。ここで (z,γ,D) (z^*,γ^*,D^*) を夫々 $(0,\Xi,\alpha)$ にうつす二つの写像函数が存在するとする。このとき (z,γ,D) と (z^*,γ^*,D^*) は

hom homul ~~[illegible]~~

homologue といふことにする。この $\omega(z,\gamma,D)$ を D に関する γ の z に於ける masse angulaire とよぶ。

2. 幾何學的な三つの要素 (z,γ,D) を T であらはす。こゝに D は單一連結領域、z は D の点、γ は或條件をみたす D の点集合とする。今 (z,γ,D) (z^*,γ^*,D^*) に homologue といふことが定義されてゐるとする。例へば等角写象を基にして定義する。$T(z,\gamma,D)$ に対し一つの実数値 $w(T)$ を対應させ且つ T と T^* が homologue のとき

$$w(T)=w(T^*)$$

になるやうに出来たとする。このとき w は等角写象で invariant といふことにする。更に $w(T)$ は Green の函数や masse angul-aire のやうに特別の T 以外には実際にその値をきめることが出来ないとする。このとき $w(T)$ の決定或は評價が問題である。そのために T の計量的性質のみによる且つ実際的に計算できる幾何學的量 $l(T)$ を導入する。一般に $l(T)$ は等角写象で invariant ではないが

$$\lambda(T)=\sup l(T^*)$$

(T^* は T の homologue を動く) を考へると之は明に等角写像で invariant である。もし $l(T)$ を適当にとり T と T^* が non-homologue のとき $\lambda(T)\neq\lambda(T^*)$ なるやうに出来たとすれば任意の λ に対する $\lambda=\lambda(T)$ なる T はすべて

homologue 従って $w(T)$ は unique な値 $w=\Psi(\lambda)$ をとる
即ち

$$w(T)=\Psi(\lambda(T))。$$

もし Ψ が連續函數なら実際に計算できる $\lambda(T)$ の近似値 $l(T^*)$ を用ひ $\Psi(l(T^*))$ で $w(T)$ が近似出来る又 Ψ が非減加函數なら

$$w(T)\leqq\Psi(l(T))$$

即ち $w(T)$ の majorante を得る

3。 次に l, λ に関係して具体的な問題を考へよう。今 Z、Z_0 を D の二点として $Z Z_0$ を D 内で結ぶ長さのある曲線の長サの下限を $\rho(Z.Z_0,D)$ で表はすえは1般に D に依存し

$$\rho(Z,Z_0,D)\geqq|Z-Z_0|$$

である D の面積を πR^2_D とし

$$l(Z.Z_0,D)=\frac{\rho(Z.Z_0 D)}{R_D}$$

とおき ($R_D=+\infty$ のときは l は 0) 次に

$$\lambda(Z.Z_0,D)=\sup l(Z^*,Z_0^*\ D^*)$$

を D の中の Z と Z_0 の distance extrémale とよぶ。ここで $(Z^*\ Z_0^*,D^*)$ は (Z,Z_0,D) と homologue のもの全部をうごく
この $\lambda(Z^*,Z_0^*,D^*)$ は明らかに等角寫像で invariant である
λ と G に関して次の定理が成立する

Théorème I D を單一連結領域, $Z\ Z_0$ を D の二点とすれば

$$e^{-2G}+e^{-\lambda^2}=1 \quad 即ち \quad G=-\frac{1}{2}\log(1-e^{-\lambda^2})$$

ここに $G=G(Z.Z_0,D)$ $\lambda=\lambda(Z.Z_0,D)$ である

この定理により 2. に於ける Ψ が決定され又 G を計算出来る l を用ひて上から評價できる

masse angulaire に對しても theorem I と同様な定理が成立する

まづ Z、 Z_0 を D の到達可能の境界点 ζ と Z_C の集合とする さて

$$\rho(Z,Z_C D)=\lim_{\zeta\to Z_C} \rho(Z.Z_0 D)$$

(211)

$$\rho'(z,\gamma,D) = \inf_{z_e \text{ sur } \gamma} \rho(z, z_e, D)$$

$$l(z,\gamma,D) = \frac{\rho'(z,\gamma,D)}{R_D}$$

$$\lambda(z,\gamma,D) = \sup l(z^*, \gamma^*, D^*)$$

を次々に定義するこゝに(z^*, γ^*, D^*)は(z,γ,D)に homologue なもの全部をうごし。この$\lambda(z,\gamma,D)$と masse angulaire $\omega(z,\gamma,D)$に関して次の定理が成立する

Théorème II　Dを単一連結領域 γをpartie frontière zをDの点とすれば

$$\omega \leq e^{-\lambda^2+1}$$

こゝに　$\omega = \omega(z,\gamma,D)$　　$\lambda = \lambda(z,\gamma,D)$

又γが arc frontière であれば

$$\omega > \frac{2}{\pi} e^{-\lambda^2}。$$

この定理ではωは わからぬが 応用上重要なものはωの評価である