大標本論の数学的基礎に就いて

北川 敏男

目次

§1. まへがき

一般に或る單位体の有限集合若しくは無限集合よりれ適の單位体を抽出し，これに依つて元の集合に関しての何等かの手掛り(智識)を得ようとする場合，かゝるれ箇が單位体の1組を標本(試料，見本)と云ふ。委しくは大きさnの標本と云ふ。これに対して元の集合を母集團と云ふ。標本の，大きさnが100以下程度の(尤も此の数に嚴密な區劃はつけられないが)をきは，小標本と云ひ，然らざるものを大標本と云ふ。尤も大標本と云ひ，小標本と云つてもその区別は，或る一定の数まりの大小によつて判定し得るものではない。統計量の標本分布に於いて，試料の大きさnを無限大にした極限分布を，所要の精密度に於いて，大きさnの場合の標本分布の近似として使用して差支へない時，大きさnの標本を大標本と稱する。従つて云ふのが正しい表現で大標本と云はなければならないことは云

ふまでもない。少数例（小試料）を活用すべきことであつて、近代数理統計学の目標であり、又その点にこそ斯学の最近発達の効果がハッキリ認められるのであるが、大標本論も亦、場合に依りて有効な近似式として充分の存在理由がある。ところで大標本論に於ける基本的諸公式の導来方法等を、従来の文献に就いて調べて見ると、その基礎が明瞭でないものが多い。又標本の大きさ如何に係らず成立すべき公式を恰も大標本の場合にのみ成立つ如き記述もあって、明快と云へないものが多い。

そこで、私は本論文に於いて、確率変
数をハッキリ表面に建てて事に依り用ひ
又一致統計量並びにその要を換を少なり
る事に依りそれらの箇所いと多思ふ。
と一事も平均自つ明確にじたて変量分新法
間同一の方法を応用して、変量ずること
に於ける変量変換が方法を論
にする。

§2. 準 備

2.1. 組別分布と組別頻数． 今茲に n 箇の箇所を考へ、これに対して第1番から第 n 番迄の番号をつけて区別することにする。今思考上の便宜のため、一球をとつて来て、これら n 箇の箇所に向つて投ずるといふ試行を考へる。その結果必ず、n 箇の箇所の何れか1つに納まるとするのであるが、それが何の箇所になるかは決定論的に確

定されたものでなく，確率論的に云へるに過ぎないとし，第k番目の箇所に納る確率をp_kとする。勿論$p_1+p_2+\cdots+p_m=1$である。かゝる試行がn回，相互に独立に行はれたとする。

この事を確率変数に依って表現するには，次の如くすれば宜しからう。$X_k^{(i)}$ $(i=1,2,3,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots\cdots,m)$なる$nm$箇の確率変数があるとし，次の3つの事項を仮定する。

(i) 第i回目の試行結果が第j番箇所に納まれば$X_j^{(i)}$は1，他の箇所に納れば$X_j^{(i)}$は0とする。而して$X_j^{(i)}=1$となる確率は，iに無関係に常にp_jに等しいとする。

(ii) $i\neq l$の場合には，k,jの如何に係らず，$X_k^{(i)}$と$X_j^{(l)}$とは相互に独立である。

(iii) $X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\cdots+X_m^{(i)}=1$ $(i=1,2,\cdots,n)$

この様なmn箇の確率変数系を用ひるとき

$$Y_j=\sum_{i=1}^{n}X_j^{(i)}\qquad(j=1,2,\cdots\cdots,m)$$

はn回の独立試行のうち第j番箇所に入るべき箇数を表はす。

従って，或る組別頻数分布並びにこれに附随する組別積率を問題にする場合は，上記の確率変数系を用ひて

$$u_{g,n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}x_j^{g}Y_j$$

と置けば，これが原点に関するg次の積率である。但し，$x_1,x_2,\cdots,x_m$は夫々$1,2,\cdots,m$番目の組を代表する一定の数である。

補題 1.

(1°) $E\{Y_j\}=np_j$

(2°) $E\{(X_j^{(i)}-p_j)^2\}\equiv\sigma^2\{X_j^{(i)}\}=p_j(1-p_j)$

(3°) $E\{X_j^{(i)}X_l^{(i)}\}=0$ 　(但し$j\neq l$とす)

(4°) $E\{Y_j Y_l\} = -n p_j p_l$ (但し $j \neq l$ とす)

證明： (1°), (2°) 自明。 (3°)を示すには

$$Pr\{X_j^{(i)}=0,\ X_l^{(i)}=0\} = 1 - p_i - p_j$$

$$Pr\{X_j^{(i)}=1,\ X_l^{(i)}=0\} = Pr\{X_j^{(i)}=1\} = p_j$$

$$Pr\{X_j^{(i)}=0,\ X_l^{(i)}=1\} = Pr\{X_l^{(i)}=1\} = p_l$$

$$Pr\{X_j^{(i)}=1,\ X_l^{(i)}=1\} = 0$$

なるが故に

$$E\{X_j^{(i)} X_l^{(i)}\} = 0(1-p_i-p_j) + 1\cdot 0\, p_i + 1\cdot 0\, p_j + 1\times 0 = 0$$

(4°)を示すには

$$E\{Y_j Y_l\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_j^{(i)} - p_j)\sum_{k=1}^{n}(X_l^{(k)} - p_l)\right\}$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} E\{(X_j^{(i)} - p_j)(X_l^{(k)} - p_l)\}$$

$i \neq k$ の場合には (ii)に依って獨立性から

$$E\{(X_j^{(i)} - p_j)(X_l^{(k)} - p_l)\} = E\{X_j^{(i)} - p_j\}E\{(X_l^{(k)} - p_l)\}$$

$$= 0$$

從って

$$E\{Y_j Y_l\} = \sum_{i=1}^{n} E\{(X_j^{(i)} - p_j)(X_l^{(i)} - p_l)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(E\{X_j^{(i)} X_l^{(i)}\} - p_j E\{X_l^{(i)}\}\right.$$

$$\left. - p_l E\{X_j^{(i)}\} + p_l p_j\right)$$

$$= -n\, p_l\, p_j \quad ((3°)\text{參照})$$

定理 1.

(1°) $\sigma^2_{u'_{g,n}} \equiv E\{(u'_{g,n} - E\{u'_{g,n}\})^2\}$

$$= n(u'_{2g} - (u'_g)^2)$$

(2°) $E\{(u'_{g,n} - E\{u'_{g,n}\})(u'_{r,n} - E\{u'_{r,n}\})\}$

$$= n(u'_{g+r} - u'_g u'_r)$$

(3°) $E\{(u'_{g,n} - E\{u'_{g,n}\})(Y_j - n p_j)\}$

$$= n p_j (x_j^g - u'_g)$$

但し

$$u'_s = \sum_{j=1}^{m} x_j^s p_j \qquad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

証明： (2°)に於いて $r = g$ とすれば(1°)が得られる。従って(2°)のみ示せば宜しい。

$$E\{(u'_{g,n} - E\{u'_{g,n}\})(u'_{r,n} - E\{u'_{r,n}\})\}$$

$$= \sum_{l,j=1}^{n} x_l^r x_j^g E\{(Y_j - n p_j)(Y_l - n p_l)\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} x_j^{r+g} E\{(Y_j - n p_j)^2\}$$

$$= -n \sum_{\substack{l,j=1 \\ l \neq j}}^{n} x_l^r x_j^g p_j p_l + n \sum_{j=1}^{n} x_j^{r+g} p_j (1 - p_j) \quad \text{[補題1]}$$

$$= u'_{g+r} - u'_g u'_r$$

(3°)の證明も同様である。

補題1及び定理1は、nの値の如何に係らず、成立する式であることに注意する必要がある。

2.2. 一致統計量の諸性質 n箇の測定値$x_1, x_2, \dots, x_n$より成る標本に対して、その1價可測函数$T_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$を考へ、これを以って或る團常数の函数$g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$を推定するとき、統計量$T_n$を$g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$の推定量と云ふ。

定義 1. 統計量の系列$\{T_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$が次の2性質を満足するとき、これを一致推定

/ formulate 化。

(197)

定量列と云ふ。

(i) 各T_nは同一の$g(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$の推定量である。

(ii) 次の如き一定数σが存在する。所与の任意の実数α, βに対して

$$\Pr\left\{g(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) - \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}} < T_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) < g(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) + \frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2/2}\,dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

逆から

例へば、母集団分布を$f(x, \theta)$となし

$$g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, \theta)\, dx \qquad (平均値)$$

$$\sigma^2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - g(\theta))^2 f(x, \theta)\, dx \qquad (標準偏差)$$

学ぶこと

が存在すれば、$f(x, \theta)$に適当な條件があれば、

(α) $\quad T_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(β) $\quad T_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

は夫々$g(\theta)$, $\sigma^2(\theta)$に対する一致推定量列である。

以下便宜上　$a = g(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$と置けば

$$T_n = a + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\xi_n$$

$\{\xi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$は、$n \to \infty$のとき、平均値0、標準偏差1の正規分布に法則収斂する。その事実を標記的に

$$T_n = a \oplus \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

と記することと規約する。

補題. $f(x)$を可測函数とし、或る点aの近傍に於いて2階迄連續微分可能とし、$f'(a) \neq 0$とする。$\{\xi_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots)$は(　)を満足するとし、

$\{f(T_n)\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は確率変数列として存在するものとする。然る時には、

(1°) $f(T_n) = f(a) + \dfrac{|f'(a)|}{\sqrt{n}}\sigma$

(2°) $f(T_n) = f(a) + \dfrac{f'(a)\sigma}{\sqrt{n}}\xi_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\zeta_n$

但し茲に ζ_n は次の性質を有する：任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} Pr.\{|\zeta_n|>\varepsilon\}=0$$

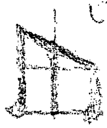
証明：$\alpha>0$ 及び $\beta>0$ を任意に与へられたものとする。假定に依り、$\varepsilon>0$ を充分小さくとれば、$a-\varepsilon \leqq x \leqq a+\varepsilon$ にて、$f'(x)>0$ と考へ得る。他方 n を充分大きくとって、$\alpha\sigma/\sqrt{n}<\varepsilon$, $\beta\sigma/\sqrt{n}<\varepsilon$ ならしめ得る。さて假定に依り

$$Pr.\left\{a-\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}} \leqq T_n \leqq a+\frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

? ↑ :

$$= Pr.\left\{f\left(a-\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leqq f(T_n) \leqq f\left(a+\frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$= Pr.\left\{f(a)-\frac{\alpha\sigma f'(a)}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqq f(T_n) \leqq f(a)+\frac{\beta\sigma f'(a)}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$



これより(1°)が得られる。

(2°)を証明するには(1°)に依

$$f(T_n) = f(a) + \frac{f'(a)\sigma}{\sqrt{n}}\eta_n$$

と書けることが分かる。

一般に確率変数 X が、$\gamma \leqq X < \delta$ なる関係を決定する集合を $(\gamma \leqq X < \delta)$ と書くことにする。然るとき、任意の実数 γ, δ $(\gamma<\delta)$ に対して

$$(\gamma \leqq \xi_n < \delta) = \left(a+\frac{\sigma\gamma}{\sqrt{n}} \leqq a+\frac{\sigma\xi_n}{\sqrt{n}} < a+\frac{\sigma\delta}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left\{a+\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{n}}\leqq X_n<a+\frac{\alpha\delta}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$=\left\{f\left(a+\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{n}}\right)\leqq f(X_n)<f\left(a+\frac{\alpha\delta}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$=\left\{f(a)+\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{n}}f'(a)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leqq f(a)+\frac{f'(a)\alpha}{\sqrt{n}}\eta_n<f(a)+\frac{\alpha\delta}{\sqrt{n}}f'(a)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$=\left\{\gamma+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leqq\eta_n<\delta+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

これより(2)を得る。

次に一致推定量列を2箇以上考へる必要上，定義(1°)に並行して，次の定義を導入する。

定義2. 統計量の2系列$\{T_n\}$及び$\{S_n\}$が次の2性質を有するとき，これを2次元一致推定量列と云ふ。

(i) $\{T_n\}$及び$\{S_n\}$は夫々，常数a，bの一致推定量列である。

(ii) 次の如き一定数$\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$，rが存在する即ち所与の任意の正数α，β，γ，δに対して

$$\Pr\left\{a-\frac{\alpha\alpha_1}{\sqrt{n}}<T_n<a+\frac{\beta\alpha_1}{\sqrt{n}},\ b-\frac{\gamma\alpha_2}{\sqrt{n}}<S_n<b+\frac{\delta\alpha_2}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(u^2-2ruv+v^2)}du\,dv+o\left(\right.$$

而して，これを標記的に

$$(T_n,S_n)=(a,b)\oplus\frac{1}{\sqrt{n}}\{\alpha_1,\alpha_2,r\}$$

補題3. 定義2の性質を有する2次元一致推定量列$\{T_n\}$，$\{S_n\}$に対して

(1°) $T_n+S_n=(a+b)\oplus\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\alpha_1^2+2r\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2}$

(2°) $T_nS_n=ab\oplus\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{b^2\alpha_1^2+2abr\alpha_1\alpha_2+a^2\alpha_2^2}$

證明：

$$T_n=a+\frac{\alpha_1}{\sqrt{n}}\xi_n$$

$$S_n = b + \frac{\alpha_2}{\sqrt{n}}\eta_n$$

と置けば

$$T_n + S_n = (a+b) + \frac{1}{\sqrt{n}}(\alpha_1\xi_n + \alpha_2\eta_n)$$

$$T_n S_n = ab + \frac{1}{\sqrt{n}}(b\alpha_1\xi_n + a\alpha_2\eta_n) + \frac{\alpha_1\alpha_2\xi_n\eta_n}{n}$$

之式並に正規分布に関する定理に依り，$1/\sqrt{n}$ の係数項に於ける分布は容易に求められる。

補題4. $\{T_n\}$ $\{S_n\}$ は定義2の性質を有する2次の一致推定量列とし，$f(t)$, $g(t)$ は可測函数とし，夫々 a, b の近傍に於いて，2階迄連續微分可能とし，$f'(a)\neq 0$, $g'(b)\neq 0$ とし，且つ $\{f(T_n)\}$, $\{g(S_n)\}$ は確率変数列として存在するものとする。然るときには

$$f(T_n)\,g(S_n) = f(a)\,g(b) \oplus \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha$$

茲に

$$\alpha^2 = g(b)^2 f'(a)^2\alpha_1^2 + f(a)^2 g'(b)^2\alpha_2^2 + 2\gamma f(a)f'(a)g(b)g'(b)\alpha_1\alpha_2$$

證明. 補題2 (2°) 及び補題3 (2°) より得られる。

§3. 基本諸定理の導来

3.1. 大標本論に於ける統計量の標準誤差

§2 で述べた如く，$x_1, x_2, \cdots, x_m$ なる m 個の値をとる頻数を夫々 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ とする。以下積率等に関して次の如く定義する。

(1°) 標本平均値 $H_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_j Y_j = u_{1,n}$

(2°) 標本平均値の周りの q 次の標本積率 $u_{q,n} \equiv \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(x_j - H_n)^q Y_j$

これに対して

(1°') 母集團平均値 $u_1 \equiv h_0 = \sum_{j=1}^{m} x_j p_j$

(2°') 母集團平均値の周りの q 次の母集團積率 $u_q \equiv \sum_{j=1}^{m}(x_j - h_0)^q p_j$

〔I〕 標本平均値の周りの積率

定理3. 母集團平均値 $h_0=0$ の場合には.

(1°) $\sigma^2_{u_{q,n}} \equiv E\{(u_{q,n}-E\{u_{q,n}\})^2\}$

$$=\frac{1}{n}(u_{2q}-u_q^2+q^2u_2u_{q-1}^2-2qu_{q-1}u_{q+1})+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(2°) $\sigma_{u'_{q,n}}\sigma_{u_{r,n}}\gamma_{u'_{q,n}u_{r,n}}=\frac{1}{n}(u_{q+r}-u_qu_r-ru_{q+1}u_{r-1})+o\left(\frac{1}{n}\right)$

(3°) $\sigma_{u_{q,n}}\sigma_{u_{r,n}}\gamma_{u_{q,n}u_{r,n}}$

$$=\frac{1}{n}\{u_{q+r}-u_qu_r+qru_2u_{q-1}u_{r-1}-ru_{q+1}u_{r-1}-qu_{q-1}u_{r+1}\}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

證明. (1°)及び(2°)に就いて示さう。(3°)は(1°)と全く平行に出來よう。

(1°)に就いて。

$$nu_{q,n}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q}(-1)^kH_n^k\binom{q}{k}x_j^{q-k}Y_j$$

$$=\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{q}{k}\sum_{j=1}^{m}x_j^{q-k}Y_jH_n^k$$

$$=n\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{q}{k}u'^{k}_{1,n}u'_{q-k,n}$$

然るに, $\{u'_{1,n}\}$, $\{u'_{q,n}\}$ に関しては, 前述の如く, 夫々一致統計量列として(　)の如き関係がある故, 補題1に依り

$$u'^{k}_{1,n}=h_0^k+\frac{kh_0^{k-1}}{\sqrt{n}}\xi_1+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$u'_{q-k,n}=u'_{q-k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{q-k}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

從って

$$u'^{k}_{1,n}u'_{q-k,n}=h_0^ku'_{q-k}+\frac{kh_0^{k-1}u'_{q-k}}{\sqrt{n}}\xi_1+\frac{h_0^k}{\sqrt{n}}\xi_{q-k}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

これを代入して整頓すれば

$$u_{g,n}=\sum_{k=0}^{g}(-1)^k\binom{g}{k}h_0^k u'_{g-k}+\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{g}(-1)^k\binom{g}{k}k\,h_0^{k-1}u'_{g-k}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{g}(-1)^k\binom{g}{k}h_0^k\xi_{g-k}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{g}(-1)^k\binom{g}{k}h_0^k u'_{g-k}$$

$$+\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}\left(-g\,u'_{g-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_g$$

$$+\frac{h_0}{\sqrt{n}}\left\{2\binom{g}{2}u'_{g-2}\xi_1-g\,h_0\xi_{g-1}+\cdots\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

假定に依り $h_0=0$ であるから

$$E\{u_{g,n}\}=u'_g=u_g$$

$$\sigma^2_{u_{g,n}}=\frac{1}{n}\left\{g^2u'^2_{g-1}\sigma^2_{\xi_1}+\sigma^2_{\xi_g}-2u'_{g-1}g\,\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_g}r_{\xi_1\xi_g}\right\}$$

$$+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

然るに定理1に依り

$$\sigma^2_{\xi_1}=u'_2-u'^2_1$$

$$\sigma^2_{\xi_g}=u'_{2g}-u'^2_g$$

$$\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_g}r_{\xi_1\xi_g}=u'_{1+g}-u'_1u'_g$$

これらを前式に代入し、$u'_1=h_0=0$ に注意すれば

(1°)式を得る。

(2°)に就いて。定理1及(3°)に依り

$$r_j/n=p_j+\frac{\zeta_j}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

と置けば上述(1°)の ξ_k との間には次の関係がある。

$$E\{\xi_1\zeta_j\}=p_j(x_j-u'_1)$$

$$E\{\xi_k\zeta_j\}=p_j(x_j^k-u'_k)$$

これを用ひて(1°)と同様に証明し得る。

〔II〕主要統計量の標準誤差

次の如き統計量は通常極めて重要な役を演ずる

標本標準偏差 $s_n = \sqrt{u_{2,n}}$

標本変動係数 $v_n = 100\dfrac{s_n}{H_n}$

標本歪度 $\alpha_{3,n} = \dfrac{u_{3,n}}{u_{2,n}^3}$

標本尖度 $\alpha_{4,n} = \dfrac{u_{4,n}}{u_{2,n}^2}$

これらは、夫々、次の常数の一致推定量をなす。

母集團標準偏差 $\sigma = \sqrt{u_2}$

母集團変動係数 $V = 100\dfrac{h_0}{\sigma}$

母集團歪度 $\sqrt{\beta_1} = \dfrac{u_3}{u_2^3}$

母集團尖度 $\beta_2 = \dfrac{u_4}{u_2^2}$

定理 4。

(1°) $\sigma_{s_n} = \sqrt{\dfrac{u_4 - u_2^2}{4u_2 n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(2°) $\sigma_{v_n} = V\sqrt{\dfrac{\sigma^2_{u_{2,n}}}{4u_2^2} + \dfrac{\sigma^2_{H_n}}{h_0^2} - \dfrac{1}{u_2 h}\sigma_{u_{2,n}}\sigma_{H_n}r_{u_{2,n}H_n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(3°) 母集團平均値 $h_0 = 0$ とすれば

$$\sigma_{\alpha^2_{3,n}} = \frac{\beta_1}{n}\{4\beta_4 - 24\beta_2 + 36 + 9\beta_1\beta_2 - 12\beta_3 + 35\beta_1\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

4° 母集團平均値 $h_0 = 0$ とすれば

$$\sigma_{\alpha^2_{4,n}} = \frac{1}{n}\{\beta_6 - 4\beta_2\beta_4 + 4\beta_2^3 - \beta_2^2 + 16\beta_2\beta_1 - 8\beta_3 + 16\beta_1\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

但し

$$\beta_{2n+1} = \frac{u_3 u_{2n+3}}{u_2^{n+3}}$$

$$\beta_{2n} = \frac{u_{2n+2}}{u_2^{n+1}}$$

に依って定義する。

証明： (1°) に就いて。定理3の証明に依り

$$s_n^2 = u_{2,n} = u_2 + \frac{\zeta_2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

従って補題1に依り

$$s_n = \sqrt{u_2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta_2}{\sqrt{u_2}\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

依って

$$\sigma^2_{s_n} = \frac{\sigma^2_{\zeta_2}}{4u_2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{u_4 - u_2^2}{4u_2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(2°) に就いて。

$$H_n = h_0 + \frac{\zeta_1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

従って

$$v_n = \frac{s_n}{H_n} = \left\{\frac{1}{h_0} - \frac{\zeta_1}{h_0^2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left\{\sqrt{u_2} + \frac{\zeta_2}{2\sqrt{u_2}\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{u_2}}{h_0} - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\zeta_1\sqrt{u_2}}{h_0^2} - \frac{\zeta_2}{2h_0\sqrt{u_2}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

然るに

$$E\{\zeta_1^2\} = \sigma^2\{\zeta_1\} = u_2' - (u_1')^2 = n\sigma^2_{H_n}$$

$$E\{\zeta_2^2\} = \sigma^2\{\zeta_2\} = n\sigma^2_{s_n^2}$$

$$E\{\zeta_1\zeta_2\} = \sigma_{\zeta_1}\sigma_{\zeta_2} r_{\zeta_1,\zeta_2} = n\sigma_{H_n}\sigma_{u_{2,n}} r_{H_n,u_{2,n}}$$

に注意すれば

$$\frac{\sigma^2_{v_n}}{V^2} = \frac{1}{V^2}E\{(v_n - V)^2\}$$

$$= \frac{1}{V^2 n}\left(\frac{u_2}{h_0^4}E\{\zeta_1^2\} + \frac{1}{4h_0^2 u_2}E\{\zeta_2^2\} - \frac{1}{h_0^3}E\{\zeta_1\zeta_2\}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2_{u_{2,n}}}{4u_2^2} + \frac{\sigma^2_{H_n}}{h_0^2} - \frac{1}{u_2 h_0}\sigma_{u_{2,n}}\sigma_{H_n} r_{u_{2,n}H_n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(3°) に就いて。(1°) 及び (2°) と全く同様に出来る。即ち前定理から

$$u_{3,n} = u_3 + \frac{\zeta_3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$u_{2,n} = u_2 + \frac{\zeta_2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(205)

従って

$$u_{3,n}^2 = u_3^2 + \frac{2u_3 \zeta_3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$u_{2,n}^3 = u_2^3 + \frac{3u_2^2 \zeta_2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$1/u_{2,n}^3 = \frac{1}{u_2^3} - \frac{3u_2^2 \zeta_2}{u_2^6 \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

依って

$$\frac{u_{3,n}^2}{u_{2,n}^3} = \frac{u_3^2}{u_2^3} + \frac{2u_3 \zeta_3}{u_2^3 \sqrt{n}} - \frac{3u_3^2 \zeta_2}{u_2^4 \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

故に

$$E\left\{\frac{u_{3,n}^2}{u_{2,n}^3}\right\} = \frac{u_3^2}{u_2^3}$$

$$\sigma^2\left\{\frac{u_{3,n}^2}{u_{2,n}^3}\right\} = E\left\{\left(\frac{u_{3,n}^2}{u_{2,n}^3} - \frac{u_3^2}{u_2^3}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{4u_3^2}{u_2^6} E\{\zeta_3^2\} + \frac{9u_3^4}{u_2^8} E\{\zeta_2^2\} - \frac{12u_3^3}{u_2^7} E\{\zeta_3 \zeta_2\}\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

然るに

$$E\{\zeta_3^2\} = n\sigma^2_{u_{3,n}} = u_6 - u_3^2 - 6u_4 u_2 + 9u_2^3 + o(1)$$

$$E\{\zeta_2^2\} = n\sigma^2_{u_{2,n}} = u_4 - u_2^2 + 4u_2 u_1^2 - 4u_1 u_3 + o(1)$$

$$E\{\zeta_2 \zeta_3\} = n\, r_{u_{3,n}, u_{2,n}} \sigma_{u_{2,n}} \sigma_{u_{3,n}}$$

$$= u_5 - u_2 u_3 + 6u_2 u_2 u_1 - 2u_4 u_1 - 3u_2 u_3 + o(1)$$

假定に依り $u_1 = h_0 = 0$ なる事に注意すれば

$$n\lambda^2\left\{\frac{u_{3,n}^2}{u_{2,n}^3}\right\} = \frac{4u_3^2}{u_2^6}(u_6 - u_3^2 - 6u_4 u_2 + 9u_2^3) + \frac{9u_3^4}{u_2^8}(u_4 - u_2^2) - \frac{12u_3^3}{u_2^7}(u_5 - 4u_2 u_3)$$

右辺を $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ を以つて書き改めれば求める結果を得る。（つゞく）