2.23~24

統計数理研究所

講究録

第二巻 第二十三号 第二十四号 合併号

昭和22年 3月 1日 発行

目次

論文紹介 10.

小川潤次郎：A.WALD TEST 第二篇
SEQUENTIAL TEST OF A SIMPLE OR COMPOSITE HYPOTHESIS AGAINST A SET OF ALTERNATIVES ———— 569

統計数理研究所
文京区 高田老松町 七六

A. WALD: SEQUENTIAL TEST 第二篇
の 紹 介

所員　小 川 潤次郎

第 二 篇

SEQUENTIAL TEST OF A SIMPLE OR COMPOSITE HYPOTHESIS AGAINST A SET OF ALTERNATIVES

本篇の紹介は逐字譯的にした方がよいと考へる。

第一篇に於ては唯一つの對立假説H_1を有する單純假説Hの檢定の問題を取扱つたが、本篇では無限に多くの對立假説がある場合の單純又は複合假説を檢定する問題を取扱ふ。茲に單純假説とは、それに依つて考へてゐる確率變數xの確率分布が一意的に定まるものであり、然らざるものを複合假説と云ふのである。

5 片側にのみ對立假説がある單純假説の檢定

5.1 一般的注意 確率變數Xの確率分布を$f(x, \theta)$, 但しθは未知常數とする。$\theta > \theta_0$なる制限のある場合に單純假説$\theta = \theta_0$を檢定しよう。而して第一種の過誤の確率が與へられるαに等しい如きsequential testが作り度いと云ふ場合を考へる。

此の場合には第二種の過誤の確率は最早ある一定値ではなくθの眞の値の函數となる。從つて、若し$f(x, \theta)$がx及びθの連續函數であつて、

θの眞値がθ_0に充分近いならば、第二種の過誤の確率は$1-\alpha$にいくらでも近くなるであらう。從つてαが小なる場合に若しθの眞値がθ_0に非常に近い値であるならば、第二種の過誤の確率は必然的に大となる。實際的な應用では大低の場合、θの眞値がθ_0に近い場合には、假說$\theta=\theta_0$を採擇することに依つて犯す過誤は大したことはないから、このやうなときは第二種の過誤の確率が高くともかまわない。然し$\theta_1>\theta_0$なるある値θ_1があつて、θの眞値がθ_1以上である場合に$\theta=\theta_0$なる假說を採擇することに依つて犯す第二種の過誤の確率はある與へられた正數β以下に抑へ度いと云ふ樣な値がある。

此の樣な場合には次の如くする。卽ち$\theta=\theta_0$なる假說の對立假說として$H_1: \theta=\theta_1$だけ唯一つを考へる。

第一種の過誤の確率がαで、第二種の過誤（θ_1がθの眞値なる場合に$\theta=\theta_0$を採擇する）の確率がβである*sequential test*を作る。而して若しこの*sequential test*が更にθの眞値がθ_1より大なる場合には第二種の過誤の確率がβ以下になるといふ性質を有するならば、このやうな*sequential test*は$\theta>\theta_0$なる*alternative*に對して假說$\theta=\theta_0$

を検定するのに充分である。

實際上出會ふ大部分の場合、例へば X が正規分布、二項分布、ポアッソン分布等を有する場合には、唯一つの對立假說 $\theta=\theta_1\ (\theta_1>\theta_0)$ を有する單純假說 $\theta=\theta_0$ に對する sequential probability ratio test はその第二種の過誤の確率は $\theta>\theta_0$ なる範圍では θ の單調減少函數であると云ふ性質を有する。從つてすべてこのやうな場合には、適當に取られた對立假說 $\theta=\theta_1$ に對して假說 $\theta=\theta_0$ を檢定するには sequential probability ratio test は滿足すべきものである。

θ の alternative values が $\theta<\theta_0$ である場合は $\theta>\theta_0$ である場合と全く類似であるから別に論ずる必要はない。

本節に述べる如き alternative $\theta<\theta_0$ に對する $\theta=\theta_0$ の檢定は、若し θ の眞値が $\leq\theta_0$ なる限り第一種の過誤の確率が $\leq\alpha$ である場合には alternative $\theta>\theta_0$ に對して複合假說 $\theta\leq\theta_0$ を檢定するにも用ひ得るのであつて、例へば X が正規分布、二項分布及びポアッソン分布の場合には、この如き條件が滿たされてゐるのである。

5.2 二項分布への應用, 5.2.1. 問題の提示

一つの観測値が二つの categories の内の何れか一方に分類されるときには二項分布が生ずる。例へば、工場製品の規格検査に於て、若し各検査されるる単位が良品と不良品の二つに分類されると云ふ様な場合である。一つの単位が與へられた categories に屬する確率を p とすると、通常 p の値は未知である。此處では p の値がある與へられた p' に對して $p>p'$ なる條件の下に $p=p'$ なる假説を檢定する問題を考へよう。

工場製品の規格検査は恐らく最も重要で且つ、この如き檢査の應用される最も廣い分野であるから、以下の議論ではこの規格検査の術語を用ひることゝしよう。勿論このことは此の檢定法が他の場合に適用出來ないと云ふことは意味しない。非常に多くの單位を含むだある一仕切を抽取り検査すると考へよう。この仕切に含まれる不良品の割合を p とせよ。然らはこの仕切から一單位が at random に抽取られたとき、それが不良品である確率は p である。若し n 個の單位が at random に抽取られたときには、その内に d 個不良品のある確率は

(5.1) $$\frac{n!}{d!(n-d)!}\,p^{d}(1-p)^{n-d} \qquad (d=0,1,\cdots,n)$$

であつて、この如き確率分布は二項分布と呼ばれる。

抽取検査の目的はその仕切が合格か不合格かを定めるにある。pの大きい値に對しては仕切を不合格としpの小なる値に對しては、その仕切を合格としたいことは明かである。從つてpのある特定の値p'を取つて、若し$p \leq p'$なら仕切は合格とし、又$p > p'$なら仕切を不合格とする。從つて$p \leq p'$なる假説に對して適當な抽取検査方式を作ることになる。

5.2.2 誤つた決定をなすことに對する許容危險

如何なる抽取検査といへども、正しい決定——$p \leq p'$のときはいつも仕切は合格とされ、

$p > p'$のときはいつも仕切が不合格とされる——がいつもなされると云ふことはないのであつて、必ず誤りが起る。全數検査をすればそれは正しい決定がなされるわけではあるが、この全數検査は不經濟であり又不可能である場合が多いので從つて検査個數を少くする爲に、むしろある程度の[illegible]適當な[illegible]である。從つて抽取り検査

方法は、許容さるべき危險が定められて後に始めて確定するのである。

若しpがその限界値p'に等しい場合には、仕切は合格であらうが、不合格であらうがかまわないが、若し$p<p'$なら仕切を合格とし度いが、これはpが小なる程益々合格し度いのである。同様に$p>p'$なら不合格とし度いのであつて、又pが大なる程益々不合格とし度いのである。この樣に、$p_0<p'$、$p_1>p'$なる二つの値p_0, p_1を取つて、$p\geq p_1$のとき仕切を合格させ、$p\leq p_0$のとき仕切を不合格とたら困ると云ふ値がある。

この如きpの二つの値p_0, p_1を定めるならば、吾吾の許容しようと云ふ危險は次の如くなる。$p\leq p_0$のとき仕切を不合格とする確率はある與へられたるα以下で、又$p\geq p_1$なるとき仕切を合格とする確率はある與へられたるβ以下である如く抽取り検査方式を立てる。即ち許容さるべき危險は四つの量p_0, p_1, α, βで定められることになり、その四量が定まつて始めて適當な抽取り検査方式が出來るのである。

§2.3. p_0, p_1, α, β が與へられた場合の sequential probability ratio test

假說 $p=p_0$ を H_0、假說 $p=p_1$ を H_1とする。H_0が眞なるとき H_1を採擇する（第一種の過誤）確率がαで、H_1が眞なるとき H_0を採擇する（第二種の過誤）確率がβなる sequential probability ratio test T を考へれば、$p\geq p_1$なるとき仕切を合格させる（H_0を採擇する）確率は$\leq\beta$で又、$p\leq p_0$なるとき仕切を不合格とする（H_1を採擇する）確率は$\leq\alpha$であるから、T は吾々の要求をすべて滿たしてゐる。

3.3 節の公式(3.8)、(3.9)、(3.10)に依つて sequential test T は次の如くなる。即ちmの各整數値に對して、m個の觀測値を取つたらば

$$(5.2)\qquad \frac{p_{1m}}{p_{0m}}=\frac{p_1^{d_m}(1-p_1)^{m-d_m}}{p_0^{d_m}(1-p_0)^{m-d_m}}\qquad (m=1,2,\cdots)$$

を計算する。但し d_mは最初のm個の檢査單位の中の不良品の數とする。そして若しも

$$(5.3)\qquad \frac{p_{1m}}{p_{0m}}\geq\frac{1-\beta}{\alpha}$$

なら仕切を不合格（H_1を採擇）とし、又若しも

$$(5.4)\qquad \frac{p_{1m}}{p_{0m}}\leq\frac{\beta}{1-\alpha}$$

なら仕切を合格とする。若しも又

$$(5.5)\qquad \frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{p_{0m}}{p_{1m}} < \frac{1-\beta}{\alpha}$$

ならば更にもう一つ標本を抽取つて検査する。實際上の計算には(5.3)、(5.4)、(5.5)を少し異つた形にする。(5.3)、(5.4)、(5.5)の對數を取れば次の如く變形出來る。

$$(5.6)\qquad d_m \geq \frac{\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}} + m\frac{\log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

$$(5.7)\qquad d_m \leq \frac{\log\frac{\beta}{1-\alpha}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}} + m\frac{\log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

$$(5.8)\qquad \frac{\log\frac{\beta}{1-\alpha}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}} + m\frac{\log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

$$< d_m < \frac{\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}} + m\frac{\log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

不等式(5.6)(5.7)(5.8)を用ひて、検査は次の如くする。各mに對してacceptance number

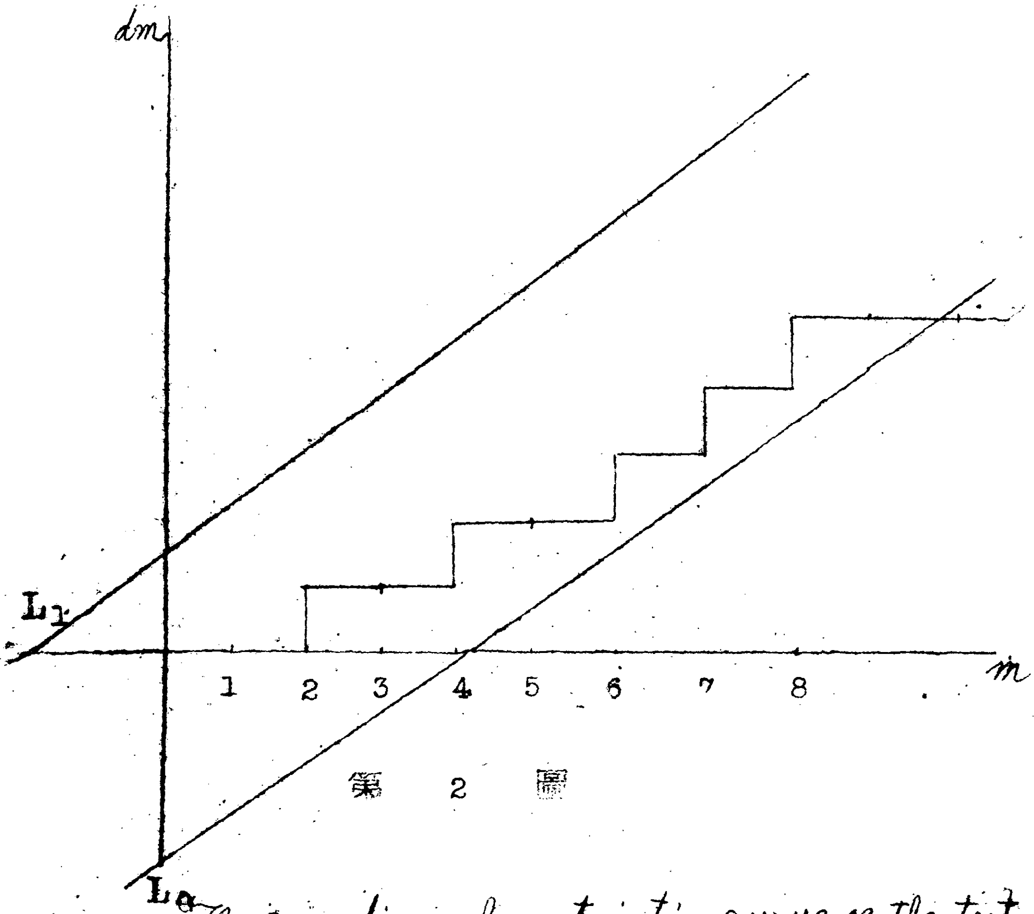
$$(5.9)\qquad A_m = \frac{\log\frac{\beta}{1-\alpha}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}} + m\frac{\log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

と rejectance number

(5.10) $$R_m = \frac{\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}} + m\frac{\log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_0}{1-p_1}}$$

を計算して、之をp_0, p_1, α, βの色々な値に對して表としておく。そして$A_m < d_m < R_m$なる限り抽取り検査を續けて、初めてd_mがA_mとR_mの間になくなつたときに抽取りを中止して、若し$d_m \leq A_m$なら仕切は合格, $d_m \geq R_m$なら仕切は不合格とする。

この検査は又下の第2圖の如くしてgraphicalにも出來るのである。検査數[illegible]横軸に目盛る。A_mはmの一次函數であるから點(m, A_m)は直線L_0上にあり、同様にして點(m, R_m)は直線L_1上にある。先づ平行線L_0、L_1を引いておいて、検査する毎に點(m, d_m)をplotして行く。そして點(m, d_m)がL_0、L_1の間にある限り抽取り検査を續けて(m, d_m)がL_0、L_1の間を始めて飛び出すとき抽取りを中止する。若し(m, d_m)がL_1の上又はその上方にあれば仕切は不合格、L_0の上又はその下方にあれば仕切は合格とする。

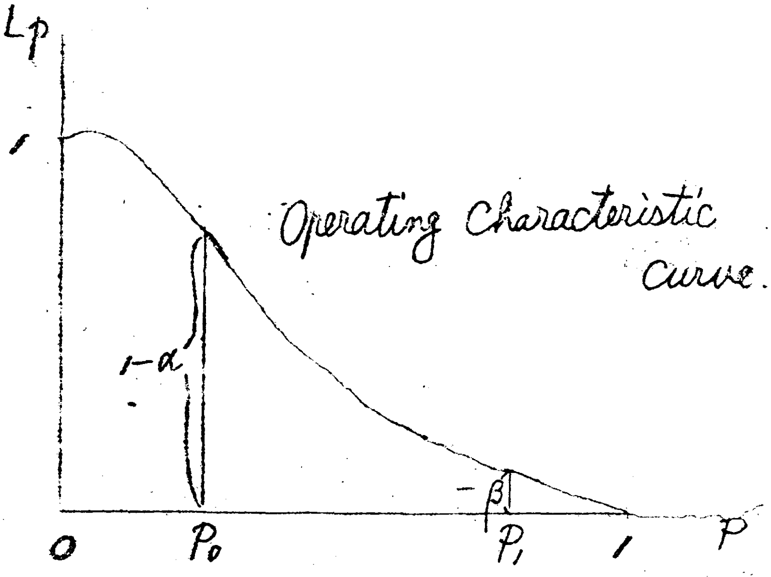


第 2 圖

5.2.4 The Operating Characteristic curve of the test.

5.2.3節で述べた如く(5.6)、(5.7)、(5.8)で定義される検査方式は、$p \geq p_1$のときはいつも仕切を合格とする確率$\leq \beta$,で又$p \leq p_0$のときはいつも仕切を不合格とする確率$\leq \alpha$であると云ふ要求を滿たす。これが検査方式の本質的な特徴を示してはいるのであるが、更に仕切中の不良品の割合がpのときに仕切が合格とされる確率L_pが知り度い。

L_pは劣質pの函數であつて、第3圖の如くなる此曲線L_pをOperating Characteristic curveと云ふ。pの變域は0から1であつて$p=0$なら$L_p=1$、$p=1$なら$L_p=0$である。pが増すに從つてL_pは減少する。又$L_{p_0}=1-\alpha$，$L_{p_1}=\beta$なることは既に分つてゐる。次に任意のpに對してL_pの計算法を示さう。



第 3 圖

實際上の問題では通常さうであるが、p_1がp_0とあまり離れてゐないときL_pは次式によつて良く近似される。

$$(5.11)\quad L_p \sim 1-\frac{1-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{h}}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h}-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{h}}=\frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h}-1}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h}-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{h}}$$

但しhは次の方程式の0ならざる根である。

$$(5.12)\quad p\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{h}+(1-p)\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{h}=1$$

Operating characteristic curve を描くには(5.12)をhについて解く必要はなく、次の如くすればよい。(5.12)からpをhの函數として表はして

$$(5.13)\quad p=\frac{1-\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{h}}{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{h}-\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{h}}$$

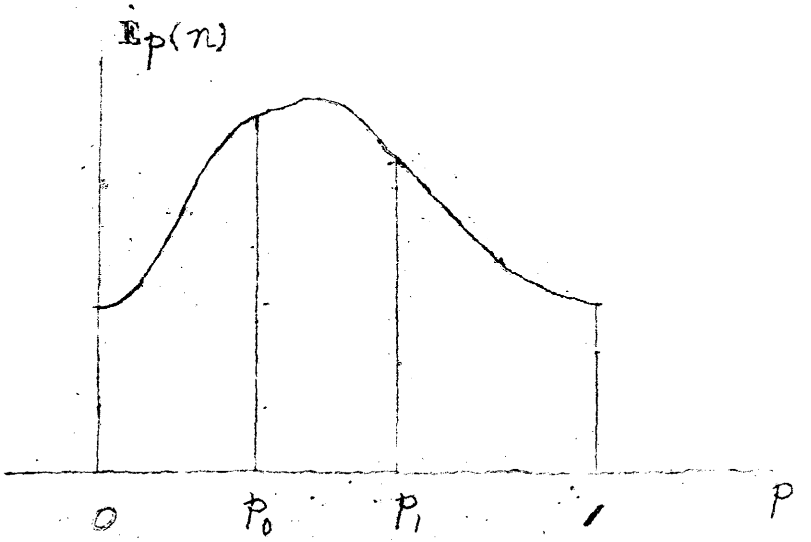
hに色々な値を與へて(5.13)及び(5.12)からp及びL_pを計算して點(p, L_p)をplotして行けばよい。

5.2.5. 平均検査個數

検査に要する検査個數の平均値を$E_p(n)$で表はす。明かに$E_p(n)$はpの函數である。(4.8)に従って$E_p(n)$の良い近似として

$$(5.14)\quad E_p(n)\sim\frac{L_p\log\frac{\beta}{1-\alpha}+(1-L_p)\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{p\log\frac{p_1}{p_0}+(1-p)\log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

但しE_pは(5.11)で与へられる。$E_p(n)$をpの函數として圖示すれば一般には第4圖の如くなる。普通最大値はp_0とp_1の間でとり、pが0からp_0まで増加する間曲線は増加し又pがp_1から1迄増加する間曲線は減少する。



第 4 圖

5.3 二つの二項分布の比較に對するSequential analysis

5.3.1 問題のFormulation

製造工程の有効性が製造された品物の中の有効單位の割合に依って測定される場合に、二つの製造工程の有効度を比較する問題を考へよう。若し一つの單位が或程度の望ましい性質、例へば或程度の歪に對して抵抗を持つ場合に、それは有効であると云ふことにする。今ある工程が用ひられたときの有効

品の割合をp_1、2なる工程が用ひられたときの有効品の割合をp_2とする。換言すればiなる工程に依り製造された一單位が有効である確率がp_i ($i=1,2$)と云ふことである。製造者はp_1, p_2の値を知らないで、現に用ひられてゐるのは1なる工程であるとしよう。若し$p_1 \geqq p_2$なら製造者は1なる工程を欲するであらうし、又$p_1 < p_2$で特にp_1がp_2より實質的に小ならば、製造者は工程を1から2へ取り替へ度いであらう。かくして假説$p_1 \geqq p_2$を alternative $p_1 < p_2$に對して検定する問題が生ずるのである。

もっと一般的な問題の立て方は次の如くである。二つの二項分布が與へられてゐて、第一の二項分布に對する一回の試行の成功の確率はp_1で、第二の二項分布に依るときの一回の試行の成功の確率はp_2とする。成功の記號は1、失敗の記號は0とする。今確率p_1, p_2は未知として、第一の二項分布でN_1回試行し、第二の二項分布でN_2回試行した。その結果に基いて$p_1 \geqq p_2$なる假説を検定する問題を考へよう。多くの實驗では$N_1 = N_2$のときが主として問題となるし又此の場合には數學的處理が簡單なので、以下では$N_1 = N_2 = N$

とする。

即ちN個の独立な試行の二系列の結果に基いて仮説 $p_1 \geq p_2$ を採擇するか棄却するかを決定せねばならぬのである。

5.3.2 古典的な方法　Nが大きい場合の古典的な處理法は次の如くである。S_1を第一のN回試行中の成功回數、S_2を第二のN回試行系列中の成功回數とし、$\bar{p} = \dfrac{S_1 + S_2}{2N}$, $\bar{q} = 1 - \bar{p}$とする。Nが大きいときには

$$(5.15) \qquad \frac{S_2 - S_1}{\sqrt{2N\bar{p}\,\bar{q}}}$$

は若し $p_1 = p_2$ ならば、平均値 0、分散 1 の正規分布をなす。今有意水準を α とし

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \alpha$$

で λ_α を定める。例へば $\alpha = .05$ なら $\lambda_\alpha = 1.64$ である。

$$2\int_0^{\lambda_\alpha} + 2\int_{\lambda_\alpha}^{\infty} = 1$$

$$\int_0^{\lambda_\alpha} = \frac{1}{2} - \int_{\lambda_\alpha}^{\infty} = 0.45$$

604

かく若し$p_1=p_2$ならば(5.15)がλ_α以上となる確率はαである。若し$p_1>p_2$ならば(5.15)がλ_αを越える確率はαより小となる。故に古典的な方法に依れば、(5.15)の値がλ_αを越えるとき假説$p_1\geqq p_2$は有意水準αで棄却されることになる。而し此方法は approximationを含むである。たとへNが大であっても(5.15)の分布は正確には normalでなく、又Nが小なるとき(5.15)の分布は正規分布と可成りはづれるので此方法は用ひられないのである。Nが小なる場合にR.A.Fisherは正確な方法を推唱したが、それは厄介な計算をしなければならないのである。

次の5.3.3節で正確な(近似を含まない)方法を示すが、これは計算上からは簡単である。而して更にこの方法は sequential analysisに好都合である。

5.3.3. 精密な方法。$a_1,\cdots\cdots,a_N$を第一群のN回の試行、$b_1,\cdots\cdots,b_N$を第二群のN回の試行とし、これらはその觀測された順序に並べられてあるとする。N個の對を考へる。

(5.16) $$(a_1,b_1),\cdots\cdots,(a_N,b_N)$$

此系列中(1.0)なる對の數t_1、(0.1)なる對の數t_2

とし(0.1)及び(1.0)なる對のみ考へる。aを第一の母集團からの觀測値, bを第二の母集團からの觀測値とすれば$(a, b) = (1.0)$である確率は$p_1(1-p_2)$, $(a, b) = (0.1)$である確率は$(1-p_1)p_2$である。從つて(a, b)が(1.0)か(0.1)であることを知つた上で、それが(0.1)に等しい確率は

(5.17) $$p = \frac{(1-p_1)p_2}{p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)}$$

であり。又それが(1.0)に等しい確率は

(5.18) $$1-p = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2}$$

である(1.0)及び(0.1)なる對のみを考へるならばt_2は一回の試行に於ける成功の確率がpである獨立な$t=t_1+t_2$回の試行中に於ける成功の回數と同じ分布をする。又$p_1=p_2$なら$p=\frac{1}{2}$, $p_1>p_2$なら$p<\frac{1}{2}$, $p_1<p_2$なら$p>\frac{1}{2}$であることはすぐ分る。從つて檢定さるべき假説$p_1 \geq p_2$は$p \leq \frac{1}{2}$なる假説と同値である。依つてt_2の觀測値に基いて$p \leq \frac{1}{2}$なる假説を檢定することに依つ原假説$p_1 \geq p_2$は檢定されるわけである。所でt_2の分布は$t=t_1+t_2$回の獨立試行に於ける成功の回數と同じであるか

ら、この検定は普通の方法で出來る。有意水準をαとすれば、t_2の臨界値Tは$p=\frac{1}{2}$のとき$t_2 \geq$ Tとなる確率はαとなる如く取ればよい。

$$\frac{t!}{t_2!(t-t_2)!}p^{t_2}(1-p)^{t-t_2}$$

$$=\frac{t!}{t_1!\,t_2!}p^{t_2}(1-p)^{t_1}$$

$$\sum_{t_2\geq T}\frac{t!}{t_1!\,t_2!}p^{t_2}(1-p)^{t_1}=\sum_{t_2\geq T}\frac{t!}{t_2!(t-t_2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left(p=\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-\sum_{t_2<T}\frac{t!}{t_2!(t-t_2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^t=\alpha$$

$t_2 \geq$ Tのときに限り假說$p\leq\frac{1}{2}$が棄却される。Tの値は二項分布の表から求めればよい。又Tの値が大であれば、t_2の分布略々正規分布となるからこのときはTの値は正規分布の表から求めればよい。

此處で此のやうなtestのefficiencyは古典的な方法に比較して如何と云ふ問題がある。t_1の値は系列$(a_1,\cdots,a_N)$及び$(b_1,\cdots,b_N)$の順序に關係し、この順序を特に取るべき理由はないのであるから、此方法が最もefficiencyなものである筈はない。然しNが大なるときはefficiencyのlossは古典的方法に比較して

negligibleであることが分つてゐる。

A. Wald. Sequentil Analysis of Statistical Data: Theory. A report submitted by the Statistical Research Group, Columbia University to the Applied Mathematics panel. National Defence Committee, Sept. 1943.

假說 $p_1 \geq p_2$ を檢定する方法は又 alternative が $p_2 > p_1$ である場合には假說 $p_1 = p_2$ の檢定法でもあることを注意しておく。

此方法を舊來の方法と比較すると簡單さと精密なこととの外に次の點で優つてゐるやうに思ふ。成功の確率が試行毎に變るとき、第一群の試行の第 i 番目に成功する確率 $p_1^{(i)}$、第二群の試行の第 i 番目に成功する確率を $p_2^{(i)}$ とする。而して $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}$ は全く未知のとき

$$p_1^{(1)} - p_2^{(1)} = \cdots\cdots = p_1^{(N)} - p_2^{(N)} = 0$$

なる假說を檢定することを考へる場合には、舊い方法は何等役に立たないが、吾々の方法では正しい取扱が可能である。

この樣な事情は例へば、二つの鐵砲の命中率が同じであるかどうかを檢定すると云ふ樣な場合に

生ずる。即ち實驗の途中で風とか、射手の氣性とか云ふ外的な條件に依つて命中の確率は變化するであらうが、射撃を交互に行ふとすれば、この影響は二つの鐵砲に同様に及ぶと考へられるから、若し二つの鐵砲が同じ程度に良いならば$P_1^{(i)}=P_2^{(i)}$ ($i=1,\cdots\cdots,N$) であると考へて良いであらう。

5.3.4. 假説$P_1\geq P_2$に對するsequential test

$P_1\geq P_2$なる假説を檢定する爲に適切なsequential testを作る爲には先づ誤れる決定をなす危險を如何なる程度に許容するかを定めなければならない。製造工程1のefficiencyは良品對不良品の比$k_1=\dfrac{P_1}{1-P_1}$で測られる。k_1が大なるに從つて工程1はよいefficiencyであると考へる。工程2の工程1に對する相對的な優越性は$k_2:k_1$で測られる。即ち

$$(5.19)\quad u=\frac{k_2}{k_1}=\frac{P_2(1-P_1)}{P_1(1-P_2)}$$

として$u=1$なら兩工程は同様に良く$u>1$なら工程2の方が良く$u<1$なら工程1の方が良いと云ふことになる。從つてuの二つの値u_0及u_1が次の如き意味で定められるであらう。uの眞の値が$\leq u_0$のとき工程1を棄てゝ工程2を採用することは

實際的に重大な過誤であり、又uの眞値が$\geqq u_1$のとき工程1を維持することも亦重大な損失を招く。$u_0<u<u_1$の場合には工程1,2はそれ程の差はないから製造者に取つては何れでもよいのである。

明かに、恒に$u_0<u_1$としておく。工程1から工程2へ移るとき費用がかゝり又種々の不便が伴ふと云ふ場合には$u_0=1$とするのが合理的であらう。このやうにu_0を取ることは、實際上は工程1が工程2に比較して劣つてゐないとき、工程1を棄却するのは非常に困ると云ふことを意味してゐる。反之、若し工程1から工程2へ移行することは別に大した不便もなく行はれるとき、二つの工程が同程度の効率即ち$u=1$であるならば、工程1を棄てゝ工程2を採用することは別段不都合はない。このやうな場合にはu_0を1より小さくとることが合理的である。

u_0及びu_1を選定した後には吾々が許容しようとする危險は次の形に云表はすのが合理的であらう。

$u\leqq u_0$のときに工程1を棄却する確率は豫め與へられたα以下であり、又$u\geqq u_1$のとき工程1を維持する確率は豫め與へられたβ以下にする。

このやうに許容さるべき危險はu_0, u_1, α及びβに依つて caracterize されるのであつて、此等四つの量が確定して始めてそれに適當な sequential test は次の如くして作られる。

(5.17) で與へた (0.1) なる對を得る確率はuの函數として次の如く書き表はされる。

$$(5.20)\ P = \frac{(1-P_1)P_2}{P_1(1-P_2)+P_2(1-P_1)} = \frac{\dfrac{(1-P_1)P_2}{P_1(1-P_2)}}{1+\dfrac{P_2(1-P_1)}{P_1(1-P_2)}} = \frac{u}{1+u}$$

假說H_0は$P = \dfrac{u_0}{1+u_0}$ 假說H_1は$P = \dfrac{u_1}{1+u_1}$ と指定する。從つて許容さるべき危險に對して、この要求を滿たす sequential test は對立假說H_1に對して歸無假說H_0を檢定する sequential probability ratio である。採擇數 (acceptance number) 及び棄却數 (rejectance number) は (5.9), (5.10) に於て

$$P_0 = \frac{u_0}{1+u_0},\ P_1 = \frac{u_1}{1+u_1},\ m = t = t_1 + t_2$$

とおけば得られる。

tの各値に對して採擇數A_tは

$$(5.21)\ A_t = \frac{\log\frac{\beta}{1-\alpha}}{\log u_1 - \log u_0} + t\,\frac{\log\frac{1+u_1}{1+u_0}}{\log u_1 - \log u_0}$$

となり、棄却數R_tは

$$(5.22)\quad R_t = \frac{\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\log u_1 - \log u_0} + t\,\frac{\log\frac{1+u_1}{1+u_0}}{\log u_1 - \log u_0}$$

となる。A_t, R_t ($t=1,2,\cdots$) は實驗を始める前に表にしておくのが良い。工程1と工程2から一つづつ對にして觀測値を取つて行つて、$A_t < t_2 < R_t$ なる限りこの操作を續ける。t_2が區間(R_t, A_t)を始めて飛び出すとき、この操作を終了する。而してそのとき

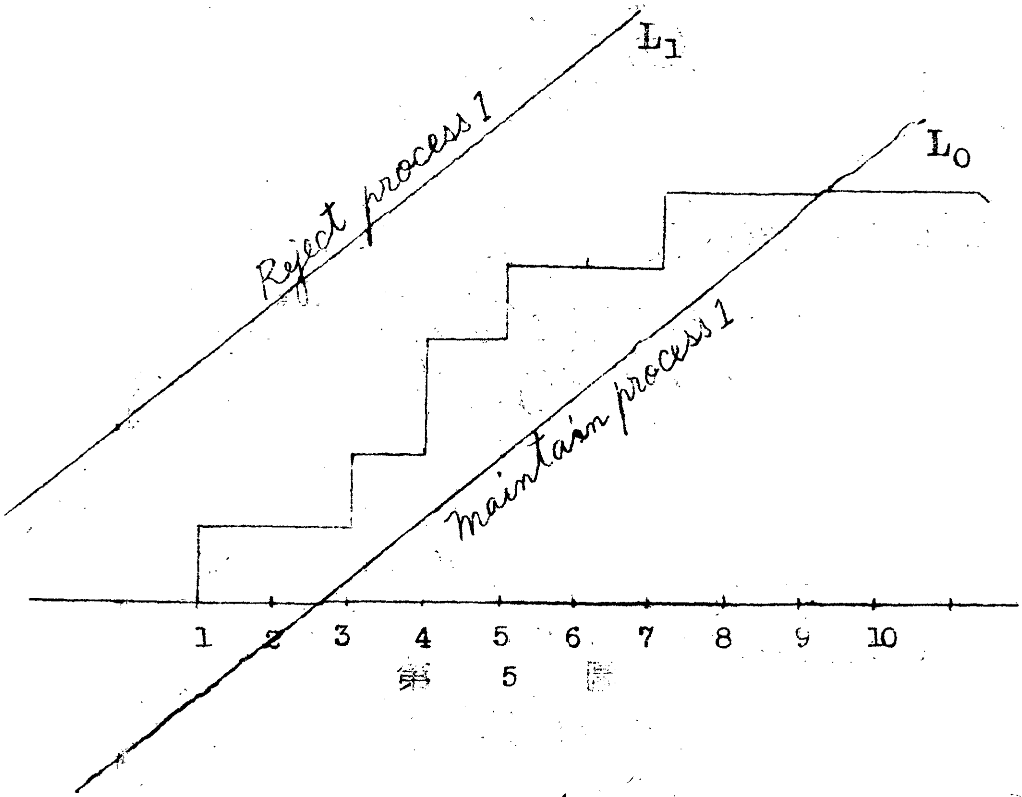
$t_2 \le A_t$ なら　工程1を維持し

$t_2 \ge R_t$ なら　工程1を棄却する

又此の test は graphical に第5圖に示す如く行ふことが出來る。對(0,1)及び(1,0)の總數を水平線にそつて目盛る。點(t, A_t)は直線L_0上にあり又點(t, R_t)はL_0に平行な直線L_1上にある。

從つて吾々は平行二直線L_0, L_1を引き、觀測値を取出す毎に點(t, t_2)をplottして行く。點(t, t_2)がL_0とL_1で圍まれたBandから始めて出るとき觀測を止める。而して此際點(t, t_2)がL_0の下部にあれば、工程1を維持し、若し點(t, t_2)がL_1の上部にあれば工程1を棄却するのである。

612



第 5 図

5.3.5. 此 Test の Operating characteristic curve

$u=\frac{k_2}{k_1}$ の任意の値に對して、工程1を維持する確率を L_u で表はせば、明かに L_u は u の函數であつて、この L_u が Operating characteristic curve と呼ばれるものである。此の operating characteristic curve は (5.11) 及び (5.13) に於て

$$p_1=\frac{u_1}{1+u_1},\quad p_0=\frac{u_0}{1+u_0}$$

とおいて得られ、その方程式は

$$(5.43)\qquad L_u \sim \frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^h-1}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^h-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h}$$

$$(5.24)\quad \frac{u}{1+u} = \frac{1-\left(\frac{1+u_0}{1+u_1}\right)^h}{\left(\frac{u_1(1+u_0)}{u_0(1+u_1)}\right)^h - \left(\frac{1+u_0}{1+u_1}\right)^h}$$

この二式から h を parameter と考へて h に色々な値を與へてそれに對應する u, L_u の値を計算して點(u, L_u) を plott すれば Operating characteristic curve を描くことが出來る。

5.3.6 此の test に必要な觀測値の數の平均。

$u=k_2/k_1$ の任意の値に對して必要な對 (01) 及び (10) の總數の平均値を $E_u(t)$ とすれば, $E_u(t)$ は (5.14) で

$$E_p(n)=E_u(t),\ L_p=L_u,\ P_1=\frac{u_1}{1+u_1},\ P_0=\frac{u_0}{1+u_0}$$

とおいて得られ

$$(5.25)\quad E_u(t) \sim \frac{L_u \log\frac{\beta}{1-\alpha} + (1-L_u)\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\frac{u}{1+u}\log\frac{u_1(1+u_0)}{u_0(1+u_1)} - \frac{1}{1+u}\log\frac{1+u_0}{1+u_1}}$$

對 (0.0), (1.1) をも含めた觀測値の總數の平均値を求めるには (5.25) 式の右邊を $P_1(1-P_2)+P_2(1-P_1)$ で割ればよい。

t の平均値の三倍の觀測値を取つても未だ決定

に達しえない場合(これは非常に稀なことであるが)に、そこで此の test を truncate しても誤った決定をなす確率は餘り影響されない(第一篇4.6參照)。

5.3.7. r 個づつの群にして觀測した場合。

應用に於ては各二項分布から夫々一つづつ觀測値を抽出する代りに、r 個づつの組になつた觀測値を取出すことがある。従つて各母集團から取られた一つづつの觀測値の對の代りに、r 個の觀測値の組の對が取られる譯である。觀測された順序に從つて記録するならば、此の r 個の觀測値の組の内の (0,1) 及び (1,0) なる對の數が分る。このときは各對に對して t_1 及び t_2 を計算することに依り5.3.4と同様に test を行ふことが出來る。r 個づつ纏めて觀測値を取ることによつて生ずる唯一つの影響は、一般的に云つてより多くの觀測値が必要となるので、従つて誤つた決定をなす確率を少しく小ならしめ得るのである。

併し觀測された順序が記録されてゐないときは t_1 及び t_2 の値を決定することが不可能である。このときは t_1 及び t_2 の代りに其等の或種の推定値を用

ひても、α, βにはさして影響しないことはA. Wald: Sequential Analysis Statistical Data に示してある由。t_1及びt_2の推定値は次の如くして得るのである。

第一の母集團から取られたr個の観測値の内成功の數をr_1、第二の母集團から取られたr個の観測値の内成功の數をr_2とするとき此對に對しては(1.0)の數を$r_1-\frac{r^1 r^2}{r}$で、又(0.1)の數を$r_2-\frac{r^1 r^2}{r}$でestimateする。從ってt_1の推定値は$r_1-\frac{r^1 r^2}{r}$を全groupsに亘って、又t_2は$r_2-\frac{r^1 r^2}{r}$を全groupsに亘って加へ合せればよい。

5.4 標準偏差が知られてゐる場合に正規分布の平均値のtestに對する應用

5.4.1 問題の形成。ある變量xが未知の平均値θ、既知の標準偏差σなる正規分布をするものとする。例へばxは或製造品の測定量であって全母集團に亘って標準偏差は分ってゐて一定のものとする。吾々が此處に考へようとする問題は未知の平均値θがある特定の値θ_0より小であると云ふ假説を檢定する問題である。此のやうな問題は屢々生産管理(quality control)に於て生ずるので

ある。ある製品の品質は x の平均値が大なる程高いとする。そのとき一定の値 θ' があつて $\theta<\theta'$ ならば其の製品は規格以下であると考へられ、$\theta\geq\theta'$ のとき規格に合ふものとする。所で θ は未知なのであるから、假說 $\theta<\theta'$ 卽ち製品が規格以下であると云ふ假說を檢定し度いのである。

生產管理は sequential test の應用分野として大切なので以下に於いては生產管理の術語を用ひて話を進めるが勿論それは此テストが生產管理以外に用ひられないことを意味するものではない。5.4 節で取扱はれる問題は次の如くである。x は製品のある測定さるべき性質とする。而して測量 x はある知られた標準偏差で正規分布をするものとする。製品が規格以下であると云ふ假說を檢定する抽出檢査方式を立てる。製品が規格以下であるとは x の平均値 θ がある特定の値 θ' より小なるときである。

5.4.2. 誤つた決定に對する許容さるべき危險

如何なる抽出檢査といへどもいつでも正しい決定が出來ると云ふことはなく、必ず誤りが起る。檢査個數が多くなるに從つて誤つた決定をなす危

険は小さくなるが、検査が余がかゝると又は破壊検査の場合には、誤ることに対しては或程度の危険を冒しても検査個数を少くすることが望ましいことがある。従つて適当な検査方式は許容さるべき危険の程度が定まつて初めて作られるわけである。

若し製品が限界値即ち$\theta=\theta'$のときは、それに対していづれの決定がなされようとさして問題にはならぬが、然し$\theta<\theta'$で、θがθ'より相当に小なるとき、この製品を規格品とすることは重大な誤差を起し、又θがθ'より相当に大なるとき、この製品を規格以下として不合格とすることも困ると云ふことがある。従つて生産者に取つてθの二つの値θ_0, θ_1（$\theta_0<\theta'<\theta_1$）が決つて$\theta\leq\theta_0$のときこれを規格とし、又$\theta\geq\theta_1$のときこれを規格以下とすることは重大な誤りとなる如き事情が生ずる。若し$\theta_0<\theta<\theta_1$のときは之を規格品としようと、又規格以下としようとさして今の場合問題にならぬ。

かくθ_0, θ_1が定められた上は、吾々の許容せんとする危険は次の如く述べられる。$\theta\leq\theta_0$であるとき、この製品を規格品とする確率が予め与へられたαで$\theta\geq\theta_1$のとき此の製品を規格以下とする確率が

像が與へられたβである。このやうに許容さるべき危險が$\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta$なる四つの量で決定されて始めて適當なsequential testが作られるのである。

5.4.3. 假說 $\theta<\theta'$に對するsequential test

假說H_0は$\theta=\theta_0$對立假說H_1は$\theta=\theta_1$とする。H_0をH_1に對して檢定し、第一種の過誤α、第二種の誤謬βなるsequential probability ratio testをTとする。然らばTは$\theta \geqq \theta_1$なるときH_0を採擇する確率は$\leqq \beta$で、又$\theta \leqq \theta_0$のときH_1を採擇する確率は$\leqq \alpha$となるから吾々の求めるものである。

sequential test Tは次の如し。xの次々の觀測値を$x_1, x_2 \cdots$とする。m番目の觀測値を取つたとき

$$(5.26)\quad \log \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_0)^2}} \geqq \log\frac{1-\beta}{\alpha}$$

ならH_1を採擇し、又若し

$$(5.27)\quad \log \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_0)^2}} \leqq \frac{\beta}{1-\alpha}$$

ならH_0を採擇し、又若し

$$(5.28)\quad \log\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_0)^2}} < \log\frac{1-\beta}{\alpha}$$

なら更に一つの観測値を取る。(5.26), (5.27), (5.28) は次の三式と equivalent である。

$$(5.29)\quad \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha \geq \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{1-\beta}{\alpha} + m\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

$$(5.30)\quad \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha \leq \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{\beta}{1-\alpha} + m\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

$$(5.31)\quad \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{\beta}{1-\alpha} + m\frac{\theta_0+\theta_1}{2} < \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha < \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{1-\beta}{\alpha} + m\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

以上三式を用ふれば、吾々の test は次の如くなる。各 m に對して

$$(5.32)\quad A_m = \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{\beta}{1-\alpha} + m\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

及び

$$(5.33)\quad R_m = \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{1-\beta}{\alpha} + m\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

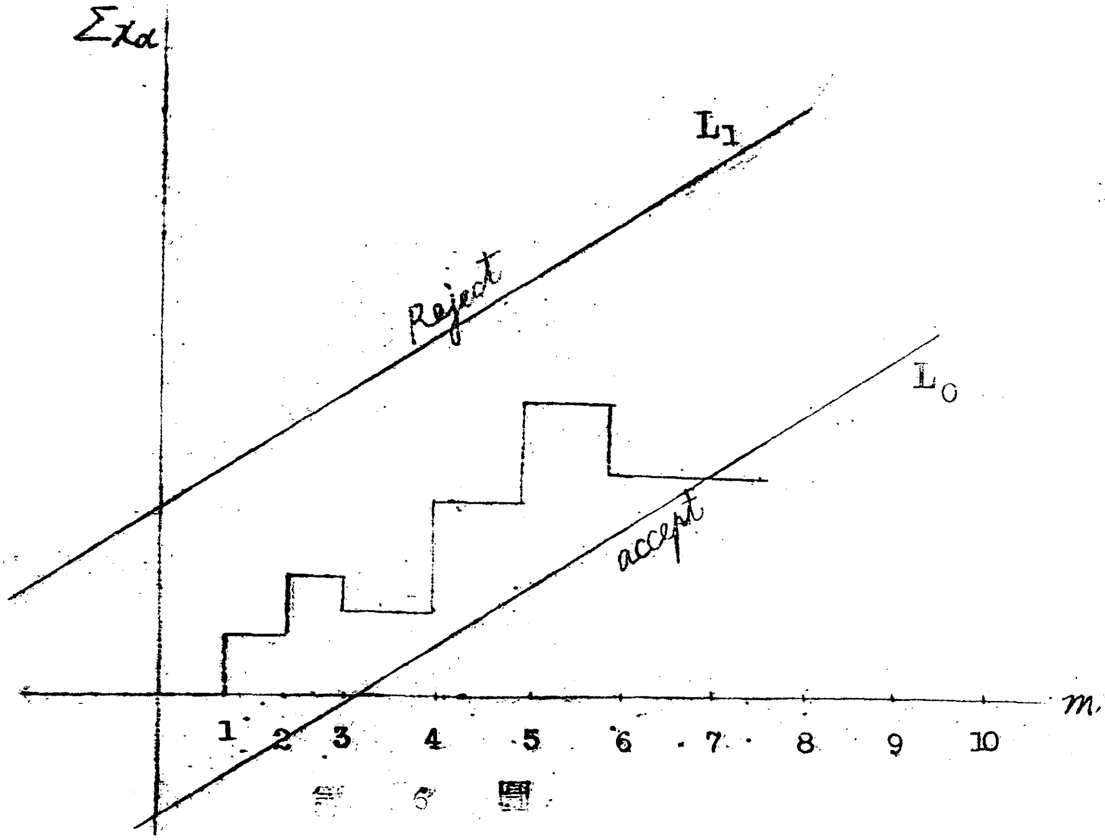
を計算する。検査を始める前に豫め A_m, R_m を計算して表にしておくとよい。而して $A_m < \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha < R_m$ なる限り抽取りを續ける。$\sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha$ が初めて此の區間を飛び出すとき、此の抽取りを止める。而して

$$\sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha \leqq A_m \quad \text{ならば } H_0 \text{ を accept}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha \geqq R_m \quad \text{ならば } H_0 \text{ を reject}$$

するのである。

テストを graphically に行ふには、次の如くすれば良い。m を横軸に取ると、點 (m, A_m) は直線 L_0 の上に、(m, R_m) は直線 L_1 上にあるから、平行二直線 L_0、L_1 を引いておいて、點 $(m, \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha)$ を plott して行き、この點 $(m, \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha)$ が L_0 と L_1 で圍まれる Band を初めて飛び出すとき抽取りを止める。而して $(m, \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha)$ が L_1 上又は L_1 の上部にあれば、H_0 を reject し、又 $(m, \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha)$ が L_0 上又は L_0 の下部にあれば、H_0 を accept する。第6圖の如し。



第 6 圖

5.4.4. The Operating Characteristic Curve of the test

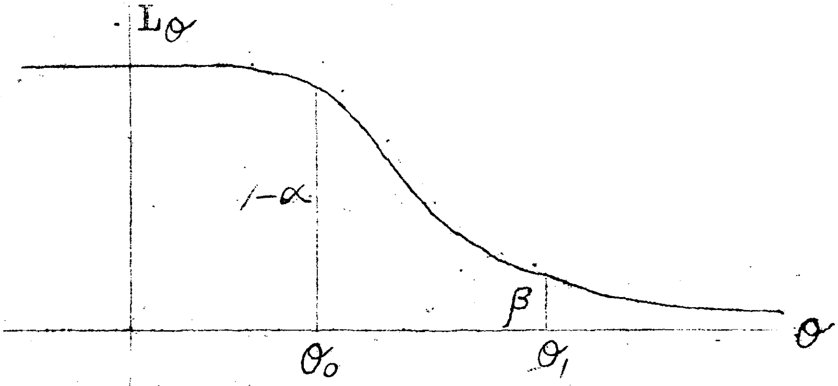
θの任意の數に對して H_0 の accept される確率を L_θ とすれば、L_θ は θ の函數であって、これは operating characteristic curve と云はれるものである。その形は第7圖の如くなる。

$\theta \to -\infty$ なら $L_\theta \to 1$ で、又 $\theta \to \infty$ なら $L_\theta \to 0$ である。更に又 L_θ は θ の減少函數である。又 $\theta=\theta_0$ なら $L_{\theta_0}=1-\alpha$ で $\theta=\theta_1$ なら $L_{\theta_1}=\beta$ である。他の任意の θ に對して L_θ を求めるには次の如くすれ

ばよい。即ち $\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma}$ が充分小なるとき（これは實際上はつねにさうであるが）は

$$(5.34)\qquad L_\theta \sim 1-\frac{1-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^h-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h}=\frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^h-1}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^h-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h}$$

h は次の如く求められる。先づ



第　7　圖

$$(5.35)\quad z=\log\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta_0)^2}}=\frac{1}{2\sigma^2}\left[2(\theta_1-\theta_0)x+\theta_0^2-\theta_1^2\right]$$

は　平均値 $=\frac{\theta_0^2-\theta_1^2}{2\sigma^2}+\frac{(\theta_1-\theta_0)\theta}{\sigma^2}$，分散 $=\frac{(\theta_1-\theta_0)^2}{\sigma^2}$

なる正規分布をするから、その特性函數 $\varphi(t)$ は

$$(5.36)\qquad \varphi(t)=e^{\left[\frac{\theta_0^2-\theta_1^2}{2\sigma^2}+\frac{(\theta_1-\theta_0)\theta}{\sigma^2}\right]t+\frac{(\theta_1-\theta_0)^2}{2\sigma^2}t^2}$$

となる。従つてhは $\varphi(t)=1$ の0でない根であるから

$$(5.37) \qquad h=\frac{(\theta_1^2-\theta_0^2)-2(\theta_1-\theta_0)\theta}{(\theta_1-\theta_0)^2}=\frac{\theta_1+\theta_0-2\theta}{\theta_1-\theta_0}$$

となる。これを(5.34)の右邊に代入すればよい。

5.5 必要な検査個數の平均値

θがxの平均値の眞値であるときの平均検査個數を$E_\theta(n)$とすれば(4.8)によつて$E_\theta(n)$の近似値は

$$E_\theta(n)\sim 2\sigma^2\frac{L_\theta\log\frac{\beta}{1-\alpha}+(1-L_\theta)\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\theta_0^2-\theta_1^2+2(\theta_1-\theta_0)\theta}$$

で與へられる。但しL_θは(5.34)のものである。