Mean concentration function ト Quasi mean concentration function I

所員 國澤清典

以下 mean concentration function 及ビ quasi mean concentration function ヲ導入シテ確率論,特ニ独立確率変数列ノ理論ニ於テ種々ノ問題ガ解析的ニシカモ統一的ニ述ベラレル事ヲ示シタイ。此ノ様ナ企ハ P. Lévy ノ maximal concentration function:

$$Q_F(l)=\sup_{-\infty<x<\infty}\{F(x+l+0)-F(x-0)\},\ l>0,$$

($F(x)$ハ確率分布函数) カラ端ヲ発スル。最近,河田(龍)[1]博士ハ次ノ mean concentration function;

$$C_F(l)=\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x+l+0)-F(x-l-0)\}^2dx,\ l>0,$$

ヲ導入シテ確率論ノ解析化ヲ容易ナラシメタ。一方 Plancherel ノ定理 P. Lévy ノ inversion formula ヨリ容易ニ此ノ $C_F(l)$ハ次ノ様ニ Fejér integral ヲ使ッテ書ケル:

$$C_F(l)=\frac{1}{\pi l}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin lt}{t}\right)^2|f(t)|^2dt$$

$$=2\int_{0}^{2l}\left(1-\frac{x}{2l}\right)d\tilde{F}(x),$$

此處ニ $f(t)$ハ $F(x)$ノ特性函数デアリ,$\tilde{F}(x)=(1-F(-x))*F(x)$ハ $F(x)$ノ対稱化サレタ分布函数デアル。

此ノ稿デハ次ノ二ツノ函数ヲ導入シタイ。

$$\psi_F(l)=l\int_{0}^{\infty}e^{-lt}|f(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{l^2}{l^2+x^2}d\tilde{F}(x),\quad l>0,$$

(1) T. Kawata, Duke Math. Journ., 7, 1941.

$\int_0^\infty$ ナラバ

$$\phi_F(l) = l\int_0^{\infty} {}^{-lt} R(f(t))\,dt \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l^2}{l^2+x^2}\, d\tilde{F}(x) \quad l \to 0$$

此處デ $R(f(t))$ ハ $f(t)$ ノ real part ヲ表ハス。此等ノ Poisson integral ニテ示サレタ函數ハ吾々ノ目的ニ有益ナ働キヲシテヽクレル。以下 $\psi_F(l)$ ヲ mean concentration function. $\phi_F(l)$ ヲ Quasi mean concentration function ト呼ブ事ニスル。尚此處デ筆者ニ種々有益ナ助言ヲアタヘラレタ河田龍夫, 角谷靜夫兩博士ニ厚ク感謝ヲ表シタイ。

第一章 Mean concentration function.

§1.1 General mean concentration function.

$(-\infty, \infty)$ デ定義サレタ函數 $m(x)$ ガ与ヘラレ, ソレガ even, non-negative, integrable 且 $(0,\infty)$ デ non-increasing トシテ次ノ條件ヲ滿タス。

(1.1.1) $$m(0) = 1$$

(1.1.2) $$m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \mu(t)\, dt$$

此處ニ $\mu(t)$ ハ non-negative, $(-\infty, \infty)$ デ integrable 從ッテ

(1.1.3) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)\, dt = 1.$$

$f(t)$ ヲ確率分布函數 $F(x)$ ノ characteristic function トスル。即チ

$$f(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

サテ $g_{F(x)}(h)$ $(h>0)$ ヲ次ノ樣ニ定義スル。

$$g_{F(x)}(h) \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(ht) |f(t)|^2\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \mu(t) \left|f\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2 dt$$

此ノ $g(h)$ ヲ general mean concentration function ト呼ブ事ニスル，$g(h)$ ハ次ノ elementary properties ヲモツ

1° $g_{F(x)}(h) \geq 0$ 且ツ

$$g_{F(x)}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x}{h}\right) d\tilde{F}(x)$$

此処ニ $\tilde{F}(x)$ ハ $F(x)$ ヲ対称化シタ分布函数ヲ示ス

即チ

$$\tilde{F}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, d(1-F(-y)) \equiv F(x) * (1-F(-x))$$

サテ

$$g_{F(x)}(h) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(ht)\, |f(t)|^2 dt$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(ht) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-y)} dF(x)\, dF(y) \right\} dt$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)\, dF(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-y)} u(ht)\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)\, dF(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\frac{(x-y)}{h}} u(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x-y}{h}\right) dF(x)\, dF(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x}{h}\right) dF(x-y)\, dF(-y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x}{h}\right) d \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, d(1-F(-y))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x}{h}\right) d\tilde{F}(x)$$

2°

$$\lim_{h\to\infty} g_{F(x)}(h) = 1$$

何トナラバ

$$\lim g(h)=\lim_{h\to\infty}\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(ht)|f(t)|^2dt$$

$$=\lim_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}m\left(\frac{x}{h}\right)d\widetilde{F}(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}m(0)\,d\widetilde{F}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}d\widetilde{F}(x)=\underline{1}$$

3°

$u(t)$ = 適当ナ條件ヲ入レテ[2)]

$$\lim_{h\to\infty}g_{F(x)}(h)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$$

此レハ N. Wiener's formula ヨリ出ル.

4°

$g_{F(x)}(h)$ ハ $h(>0)$ ノ非減少函数デアル, 即チ $h>h'>0$

ナラバ $g_{F(x)}(h)\geq g_{F}(h')$

事実

$$g_{F(x)}(h)-g_{F(x)}(h')=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{m\left(\frac{x}{h}\right)-m\left(\frac{x}{h'}\right)\right\}d\widetilde{F}(x)$$

$m(x)$ ハ非減少デアルカラ $g(h)\geq g(h')$ デアル

5° $g_F(h)$ ハ分布函数ノ convolution = ヨリ減ゼズ

$F_1(x)$, $F_2(x)$ ヲ與ヘラレタ二ツノ分布函数トシ $f_1(t)$, $f_2(t)$ 対應スル特性函数トスル. $f_1(t)f_2(t)$ ハ $F_1(x)*F_2(x)$ ノ特性函数表デアルカラ.

$$g_{F_1(x)*F_2(x)}(h)=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(ht)|f_1(t)f_2(t)|^2dt$$

2) S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche integrale, Leipzig P.30, 1923,

$$\leq \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(ht)\,|f_i(t)|^2 dt$$

$$= g_{F_i(x)}(h) \qquad (i=1,2).$$

$Q_{F(x)}(h)$ デ P. Lévy, maximal concentration function ($F(x)$ ニ対スル) トスル然ラバ

(1, 1, 4)

$$2\left(1+\int_0^{\infty} m(x)\,dx\right) Q_{F(x)}(h) \geq g(h) \geq Q^2_{F(x)}(h)$$

事実

$$g_{F(x)}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x}{h}\right) d\tilde{F}(x) = 2\int_0^{\infty} m\left(\frac{x}{h}\right) d\tilde{F}(x).$$

$$\leq 2\sum_{k=0}^{\infty} m(k)\left\{\tilde{F}((k+1)h) - \tilde{F}(kh)\right\}$$

$$\leq 2\sum_{k=0}^{\infty} m(k)\, Q_{\tilde{F}(x)}(h) \leq 2\left\{m(0)+\int_0^{\infty} m(x)\,dx\right\} Q_{\tilde{F}(x)}(h)$$

$$\leq 2\left\{1+\int_0^{\infty} m(x)\,dx\right\} Q_{F(x)}(h)$$

此処ニ $Q_{\tilde{F}(x)}(h) \leq Q_{F(x)}(h)$ ハ maximal concentration function 分布函数ノ convolution ニヨリ減少スル事ヨリ出ル

一方

$$Q_{F(x)}(h) = \sup_{-\infty<x<\infty}\left\{F(x+h+0) - F(x-0)\right\}$$

$$= F\left(\xi + \frac{h}{2} + 0\right) - F\left(\xi - \frac{h}{2} - 0\right)$$

$\xi - \frac{h}{2} \leq x \leq \xi + \frac{h}{2}$ ナル x ニ対シテ $F(x+h) - F(x-h)$

$$\geq Q_F(h)$$

(84)

が出ル従ツテ

$$\underline{g(h)} = \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x}{h}\right) d\widetilde{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d(1-F(-y))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x+y}{h}\right) dF(y)$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} d(1-F(-y)) \int_{-x-h}^{-x+h} m\left(\frac{x+y}{h}\right) dF(y)$$

$$\geq m(1) \int_{-\infty}^{\infty} \{F(-x+h) - F(-x-h)\} d(1-F(-y))$$

$$= m(1) \int_{\xi-\frac{h}{2}}^{\xi+\frac{h}{2}} \{F(x+h) - F(x-h)\} dF(x)$$

$$\geq m(1)\, Q^2_{F(x)}(h)$$

general mean concentration functio

ノ例ヲ挙ゲテハ

(i) $m(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ トオケバ $\mu(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, e^{-|t|}$

従ツテ

$$\Psi_{F(x)}(h) \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|ht|} |f(t)|^2 dt$$

$$= h \int_0^{\infty} e^{-ht} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2}{h^2+x^2} d\widetilde{F}(x)$$

(ii) $m(x) = 1 - \left|\frac{x}{2}\right|$ for $|x| \leq \frac{1}{2}$, $=0$ for $|x| > \frac{1}{2}$ トオケバ

$\mu(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ 従ツテ

$$\varphi_{F(x)}(h) \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 |f(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ht}{ht^2} |f(t)|^2 dt$$

$$= 2\int_0^{2h} \left(1 - \frac{x}{2h}\right) d\widetilde{F}(x)$$

(iii) $m(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ トオケバ $\mu(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$\Omega_{F(x)}(h) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2t^2} |f(t)|^2 dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} d_x F(x)$$

今後 (1) $\psi_{F(x)}(h)$ ヲ mean concentration function ト呼ブ事ニスル

次ノ二ツノ定理ハ今後シバシバ利用スル

定理 1.1.1 $\{F_1(x), \cdots\cdots F_n(x)\}$ ヲ分布函数ノ任意ノ集合トスル 然ラバ

$$1-\psi_{F_1(x)*\cdots*F_n(x)}(h) \leq \sum_{k=1}^{n}(1-\psi_{F_k(x)}(h))$$

証明 容易ニ

$$1-\prod_{k=1}^{n}|f_k(t)|^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(1-|f_k(t)|^2)$$

$1-a_1\cdots a_n \leq (1-a_1)+\cdots+(1-a_n)$

$a_i \leq 1$

デアルカラ

$$h\int_0^\infty e^{-ht}\left(1-\prod_{k=1}^{n}|f_k(t)|^2\right)dt$$
$$= 1-\psi_{F_1(x)*\cdots\cdots*F_n(x)}(h)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} h\int_0^\infty e^{-ht}(1-|f_k(t)|^2)dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(1-\psi_{F_k(x)}(h))$$

定理 1.1.2 $\{F_1(x), \cdots\cdots, F_n(x)\}$ ヲ分布函数ノ任意ノ集合トシ $f_k(t)$ ヲ $F_k(x)$ ノ対應スル特性函数トスル 若シ $\delta>0$ ト $T>0$ ガ存在シテ $0\leq t\leq T$ ナル t ニ対シテ

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k(t)|^2 \geq \delta > 0 \tag{1.1.6}$$

ナラバ

$$\sum_{k=1}^{n}(1-\psi_{F_k(x)}(h)) \leq K(T, h)\left(1-\psi_{F_1(x)*\cdots*F_n(x)}(h)\right)$$

此処ニ $K(T)$ ハ T ト h ノミニ関係スル常数デアル

此レヲ証明スルタメニ次ノ二ツノ lemmas ヲ必要トスル

(86)

補助定理 2.2.1. 如何ナ $T>0$ ニ対シテモ常ニ

(2.2.7) $$1-\psi_{F(x)}(h)=\int_0^\infty e^{-t}\left(1-\left|f\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt \le C(T)\int_0^T \left(1-\left|f\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

此処ニ $C(T)$ ハ T ノミニ関係スル常数デアル

証明 次ノ簡単ナル不等式

$$1-\cos(2^k t)\le 4^k(1-\cos t)$$

カラ

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(2^k t))\,d\tilde{F}(x)=1-|f(2^k t)|^2 \le 4^k\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos t)\,d\tilde{F}(x)=4^k(1-|f(t)|^2)$$

一方 $$\int_0^\infty e^{-t}\left(1-\left|f\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt=\int_0^{T/2}+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\frac{T}{2}}^{2^{k+1}\frac{T}{2}}$$

$$=\int_0^{\frac{T}{2}}+\sum_{k=0}^{\infty}2^k\int_{\frac{T}{2}}^{T}e^{-2^k t}\left(1-\left|f\left(\frac{2^k t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

$$\le\int_0^{\frac{T}{2}}\left(1-\left|f\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt+\sum_{k=0}^{\infty}2^k e^{-2^k T/2}4^k\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(1-\left|f\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

$$\le \max\left\{1\ \sum_{k=0}^{\infty}2^{3k}e^{-2^{k-1}T}\right\}=C(T)$$ トオイテ

$$1-\psi_{F(x)}(h)\le C(T)\int_0^T\left(1-\left|f\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

補助定理 1.1.2.

$$\{a_k \mid k=1,2,\cdots n;\ 1\ge a_k>0\}$$

ガ $\prod_{k=1}^{n}a_k\ge\delta>0$ ヲ満足スル集合トスルナラバ

$$\sum_{k=2}^{n}(1-a_k)\le\frac{1}{\delta}\left(1-\prod_{k=1}^{n}a_k\right).$$

証明 induction デ示ス $n=2$ ノ場合ハ明カ

$$\sum_{k=2}^{n-1}(1-a_k) \le \frac{1}{\delta}\left(1-\prod_{k=2}^{n-1} a_k\right)$$

ヲ假定スルト

$$\sum_{k=2}^{n}(1-a_k) \le \frac{1}{\delta}\left(1-\prod_{k=1}^{n-1}a_k\right)+1-a_n$$

假定ヨリ $\prod_{k=1}^{n-1} a_k \ge \prod_{k=1} a_k \ge \delta$ ナル故

$$1-a_n \le \frac{1}{\delta}\prod_{k=1}^{n-1}a_k(1-a_n) = \frac{1}{\delta}\left(\prod_{k=1}^{n-1}a_k - \prod_{k=1}^{n}a_k\right)$$

従ッテ

$$1-a_n - \frac{1}{\delta}\prod_{k=1}^{n-1} a_k \le \frac{1}{\delta}\left(-\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$$

故ニ

$$\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\prod_{k=1}^{n-1}a_k + 1 - a_n \le \frac{1}{\delta}\left(1-\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$$

定理 1, 1, 2, ノ証明　(1,1,1,) ト Lemma

1,1,2 ヨリ $0\le t\le hT$ ニ於テ

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\left|f_k\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right) \le \frac{1}{\delta}\left(1-\prod_{k=1}^{n}\left|f_k\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)$$

Lemma 1, 1, 1, ヨリ

$$\sum_{k=1}^{n}(1-\psi_{T_k}(h)) = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-t}\left(1-\left|f_k\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

$$\le c\left(\frac{T}{h}\right)\sum_{k=1}^{n}\int_0^{T/h}\left(1-\left|f_k\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

$$\le \frac{c\left(\frac{T}{h}\right)}{\delta}\int_0^{T/h}\left(1-\prod_{k=1}^{n}\left|f_k\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

$$\le \frac{c\left(\frac{T}{h}\right)}{\delta}e^{\frac{T}{h}}\int_0^{T/h} e^{-t}\left(1-\prod_{k=1}^{n}\left|f_k\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

$$\le k(T,h)\int_0^{\infty} e^{-t}\left(1-\prod_{k=1}^{n}\left|f_k\left(\frac{t}{h}\right)\right|^2\right)dt$$

(88)

$$\equiv k(T\,h)\left(1 - {}^{1}\!/F_1(x) * \cdots\cdots * F_n(x)^{(h)}\right)$$

此処ニ $k(T,h) = \varrho\left(\frac{T}{h}\right)e^{T/h}/\sigma$ ハ T ト h ニ

己関係スル常数デアル。