Fourier解析と確率論 (II)

所員　河田龍夫

6. 特性函数の±∞近傍の性質.　本節の目的は $t\to\pm\infty$ のとき $f(t)$ はどんな性質をもつかを験べる事である。前節の記号を踏襲して分布函数は $\sigma(x)$ とし，$\sigma(x)=\frac{1}{2}(\sigma(x+0)+\sigma(x-0))$ とする。$\sigma(x)$ が絶対連續であれば

$$(6.1)\qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\sigma'(x)\,dx$$

(Cramer)

は $\sigma'(x)\in L(-\infty,\infty)$ の Fourier 変換で Riemann-Lebesgue の定理により $t\to\infty$ のとき $f(t)\to 0$ となる。吾々の先づ第一の問題は一般に此事實が成立するかといふ事である。

是に對しては直ちに否定的に答へられる。例へば 0 をスペクトラムとする単位分布函数の特性函数は $f(t)=1$ なる事で明らかである。単位分布函数以外のものでも，例へば Bernoulli 分布函数

$$(6.2)\qquad \sigma_a(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<-a\\ \frac{1}{2}, & -a<x<a\\ 1, & a<x\end{cases}$$

に対しては $f(t)=\cos at$ となり $\lim f(t)=0$ は成立しない。是等の例では分布函数は不連續点をもつてゐる。そこで連續ならば $f(t)\to 0$ とならないであらうかといふと實は是も否定される。併しこの様な例は第後章であたへやう。

Bernoulli 分布函数の場合は $f\left(\frac{2n\pi}{a}\right)=1$ であるから $\overline{\lim_{t\to\pm\infty}}f(t)=1$ である

__定理 6.1__　$\sigma(x)$ が階段函数であるときは $\overline{\lim_{|t|\to\infty}}f(t)=1$.

スペクトルの集合は可附番集合で是を $\{x_\nu\mid \nu=1,2,\cdots\}$ とすると

$$(6.3)\qquad f(t)=\sum_\nu p_\nu e^{itx_\nu},$$

ここに $p_\nu = \sigma(x_\nu+0)-\sigma(x_\nu-0)$

(6.3)の右辺の級数は $p_\nu>0$, $\sum p_\nu=1$ より絶対収斂で従て是は一つの概週期函數である。$f(0)=1$ であるから $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} f(t)=1$

以上の如く必ずしも $f(t)$ は $|t|\to\infty$ のとき 0 に近づかない。併し $\sigma(x)$ が $x=0$ で連續ならば $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt \to 0$ 即ち $\mathfrak{M}\{f(t)\}=0$ が証明される。一般に

定理 6.2

(6.4) $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-it\xi}\,dt$$

は任意の實數 ξ に對して存在し $\sigma(\xi+0)-\sigma(\xi-0)$ に等しい。

このために極めて有用な次の定理を述べて置こう。

補助定理 6.1[(1)] (A. Khintchine)

$\psi(x; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ を次の條件を満足する x の連續實函數とする

(i) 総ての x 及び $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ に對して

(6.5) $$|\psi(x; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)| < C$$

なる常數 C が存在する。

(ii) 任意の固定した $\delta>0$ に對して, $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\to\infty$ のとき $|x-\lambda|\geqq\delta$ で一様に

$$\psi(x; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)\to 0$$

なる如き實數 λ が存在する。

(iii) $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ の任意に定まった正數に對し $x\to\lambda$ のとき $\psi(x; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)\to A$

(1) A. Khintchine, Korrelationstheorie der stationären stochastische Prozesse. Math. Ann. 109 (1934)
E. Slutsky, Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes, Actualité, Hermann, les fonctions aléatoires, 1938

なるような定数 A が存在する。

然るときは、$\Phi(x)$ を $(-\infty, +\infty)$ に於ける有界変分の函数とすると、$a_1, a_2, \cdots\cdots \to \infty$ のとき

$$(6.6)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)\, d\Phi(x) \to A\{\Phi(\lambda+0)-\Phi(\lambda-0)\}$$

が成立する

$K=\int_{-\infty}^{\infty}|d\Phi(x)|$ とおく、任意の $\varepsilon>0$ に対し δ を充分小さくとって

$$(6.7)\quad \int_{\lambda-\delta}^{\lambda-0}|d\Phi(x)|<\frac{\varepsilon}{4C},\quad \int_{\lambda+0}^{\lambda+\delta}|d\Phi(x)|<\frac{\varepsilon}{4C}$$

ならしめる。(ii) により $|x-\lambda|\geqq\delta$ のとき、$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ を充分大にとれば

$$|\psi(x; a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)|<\frac{\varepsilon}{2K},$$

従って

$$(6.8)\quad \left|\int_{|x-\lambda|\geqq\delta}\psi\, d\Phi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

(6.7) より任意の正数 $\eta<\delta$ に対し

$$(6.9)\quad \left|\int_{\eta<|x-\lambda|<\delta}\psi\, d\Phi(x)\right|<C\int_{\eta<|x-\lambda|<\delta}|d\Phi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

(6.8), (6.9) より $\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi\, d\Phi(x)-\int_{\lambda-\eta}^{\lambda+\eta}\psi\, d\Phi(x)\right|<\varepsilon$. η は任意に小でよいから (iii) から $a_1, a_2, \cdots\, a_n$ を充分大にとれば

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi\, d\Phi(x)-A\{\Phi(\lambda+0)-\Phi(\lambda-0)\}\right|<\varepsilon \qquad \text{(証終)}$$

特に $\psi(x; T)=\dfrac{\sin T(x-u)}{T(x-u)}$ とし $\lambda=u$ とおけば

$$(6.10)\quad \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin T(x-u)}{T(x-u)}\, d\sigma(x)=\sigma(u+0)-\sigma(u-0).$$

(6.10) から吾々の定理を証明するのは簡単である。

$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\, d\sigma(x)$ であるから

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)e^{-it\xi}\, dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-it\xi}\, dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\, d\sigma(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(x)\int_{-T}^{T}\frac{1}{2T}e^{it(x-\xi)}\, dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin T(x-\xi)}{T(x-\xi)}\, d\sigma(x).$$

であるから

定理6.3

$$(6.11)\quad \mathfrak{M}\{|f(t)|^2\} \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt=\sum_\nu p_\nu^2$$

が成立する。茲に x_ν を $\sigma(x)$ の不連續点[1]とするとき $p_\nu=\sigma(x_\nu+0)-\sigma(x_\nu-0)$

もし $\sigma(x)$ が連續ならば (6.11) の値は0となり，是は定理6.2 の $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)dt\to 0$ ($\xi=0$ が連續点の場合) よりは精密である。[2]

定理6.3を証明する。

$$(6.12)\quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\overline{f(t)}dt$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}d\sigma(x)\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}d\sigma(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x-y)T}{(x-y)T}d\sigma(y).$$

(6.10) から中の積分は $T\to\infty$ のとき $\sigma(x+0)-\sigma(x-0)$ に近づく。而も有界に收斂する事が容易に分るから (6.12) は $T\to\infty$ のと

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\sigma(x+0)-\sigma(x-0)\}d\sigma(x)=\sum\{\sigma(x_\nu+0)-\sigma(x_\nu-0)\}^2$$

に收斂する。

定理6.3は Parseval の定理に対応するものであるが Hausdorff-Young の定理に対應するものも得られる。

定理6.4[3] 定理6.3の記号を用いて もし $1<p\le 2$ ならば $\mathfrak{M}\{|f|^p\}$ が存在して

$$(6.13)\quad \left(\sum p_\nu^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\le A_p\,\mathfrak{M}\{|f(t)|^p\}$$

---

(1) $\sigma(x)$ の不連續点の集合は可附番個である。

(2) Schwarz の不等式より明らか。

(3) 河田龍夫, Fourier解析と確率論(II), 統計數理研究所講究録 1.4 (1944)

$x \leqq p$ ならば $\mathfrak{M}\{|f|^p\}$ が存在し

(6.14) $\mathfrak{M}\{|f(t)|^{p'}\} \leqq A'_p\,(\Sigma\, p_\nu^{p'})^{\frac{1}{p'}}$.

茲に A_p, A'_p は p にのみ依存する常數で, $1/p + 1/p' = 1$.

7. 特性函數の積分性に関する一定理[1]

ξ が $\sigma(x)$ の連續点ならば定理 6.2 から $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-i\xi t}dt \to 0$ であるが, 是は $\lim\limits_{T\to\infty}\int_1^T \frac{f(t)}{t}e^{-it\xi}dt = 0$, $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{-1}\frac{f(t)}{t}e^{-it\xi}dt = 0$ が成立すれば當然成立する。一般に $\int_1^T \frac{\varphi(t)}{t}dt$ が $T\to\infty$ のとき收斂すれば $\frac{1}{T}\int_1^T \varphi(t)dt \to 0$ であるから, 依て,

$$(7.1)\qquad \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{f(t)}{t}e^{-it\xi}dt,\qquad \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{-1}\frac{f(t)}{t}e^{-it\xi}dt$$

の存在する條件を験べておこう。

定理 7.1[2]. もし $\varepsilon > 0$ に対して

$$(7.2)\qquad \int_0^{\varepsilon}\frac{\sigma(\xi+x)-\sigma(\xi-x)}{x}dx < \infty$$

ならば (7.1) の極限が存在する。

(7.1) の前者の存在だけ証明する。$\xi = 0$ として一般性を失はない。$T\to\infty$ のとき

$$I(T) = \int_1^T \frac{f(t)}{t}dt$$

の存在を証明すればよい。

$$I(T) = \int_1^T \frac{dt}{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(x)\int_1^T\frac{e^{itx}}{t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(x)\int_1^T\frac{\cos tx}{t}dt + i\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(x)\int_1^T\frac{\sin tx}{t}dt$$

この第二項は $T\to\infty$ のとき收斂する。何となれば中の積分が有界收斂であるから。故に第一項に就て考へればよい。是を $J(T)$ とおいて

---

(1) 特性函數の積分可能性に就ては更に後章に於ても論ずる。

(2) T. Kawata, The characacteristic function of a probability distribution. 東北數學雑誌 48. (1941)

ガウスです(ρ)へ

まがれね

なおらなければいけません。(分綴と思って書が大

まっています

もあてること

みるま)

書けぬ

おこう。

$$J(T)=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(x)\int_{x}^{Tx}\frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}}d\sigma(x)\int_{x}^{Tx}\frac{\cos t}{t}\,dt+\left(\int_{-\varepsilon}^{-\frac{1}{T}}+\int_{\frac{1}{T}}^{\varepsilon}\right)d\sigma(x)\int_{x}^{Tx}\frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)d\sigma(x)\int_{x}^{Tx}\frac{\cos t}{t}\,dt=J_1+J_2+J_3$$

とおく。是等の各を評価する前に (7.2) から

$$(7.3)\qquad \lim_{x\to+0}\{\sigma(x)+\sigma(-x)\}\log\frac{1}{x}=0.$$

が出て来る事を注意しておこう。これは

$$\{\sigma(x)+\sigma(-x)\}\int_{x}^{\varepsilon}\frac{du}{u}\leq\int_{x}^{\varepsilon}\frac{\sigma(u)-\sigma(-u)}{u}\,du$$

で $\sigma(x)-\sigma(-x)\to 0$ なる事より明かである。

さて (7.3) を用いて

$$(7.4)\qquad |J_1|\leq\log\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}}d\sigma(x)\to 0$$

次に $x>\varepsilon$ とすれば $\int^{Tx}\cos t/t\,dt$ は $T\to\infty$ のとき有界収斂をする。故に J_3 の極限値が存在する。依て $\lim J_2$ の存在を証明すればよい。

$$J_2=\left(\int_{-\varepsilon}^{-\frac{1}{T}}+\int_{\frac{1}{T}}^{\varepsilon}\right)d\sigma(x)\int_{x}^{Tx}\frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$=\int_{\frac{1}{T}}^{\varepsilon}d(\sigma(x)-\sigma(-x))\int_{x}^{Tx}\frac{\cos t}{t}\,dt\quad\downarrow\text{部分}$$

$$=(\sigma(\varepsilon)-\sigma(-\varepsilon))\int_{\varepsilon}^{T\varepsilon}\frac{\cos t}{t}\,dt-\left\{\sigma\left(\frac{1}{T}\right)-\sigma\left(-\frac{1}{T}\right)\right\}\int_{\frac{1}{T}}^{1}\frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$-\int_{\frac{1}{T}}^{\varepsilon}(\sigma(x)-\sigma(-x))\frac{\cos Tx}{x}\,dx+\int_{\frac{1}{T}}^{\varepsilon}(\sigma(x)-\sigma(-x))\frac{\cos x}{x}\,dx$$

(ε, $\frac{1}{T}$ を $\sigma(x)$ の連續点にとっておいて一般性を失はない。)

右辺の第一項は明かに極限値が存在する。第二項は絶対値に於て $\left(\sigma\left(\frac{1}{T}\right)-\sigma\left(-\frac{1}{T}\right)\right)\log T$ を越えないから (7.3) により 0 に収斂する。最後の項は

$$-\int_0^{\varepsilon}\frac{\sigma(x)-\sigma(-x)}{x}\cos Tx\,dx+\int_0^{\frac{\varepsilon}{?}}\frac{\sigma(x)-\sigma(-x)}{x}\cos Tx\,dx$$

となり是の最初の項は Riemann-Lebesgue のよく知られた定理から 0 に収斂し第二項は (7.2) より 0 に収斂する事が明らかである。 (証終)

8. 特性函數に關する一、二の不等式

定理 8.1[1]、$f(t)$ を一つの分布函數の特性函數で實數値をとるとすると $-\infty<t<\infty$ に對して

$$(8.1)\qquad 1-f(2t)\leqq 4\{1-f(t)\}$$

なる不等式が成立する

證. 總ての實數 x, t に就て

$$1-\cos 2tx=2(1-\cos^2 tx)\leqq 4(1-\cos tx)$$

であるから、$f(t)$ を分布函數 $\sigma(x)$ の特性函數とすると

$$\begin{aligned}1-f(2t)&=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2tx)\,d\sigma(x)\\&\leqq 4\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,d\sigma(x)\\&=4\{1-f(t)\}\end{aligned}$$

是は極めて簡單な不等式であるが、有用である。後に利用するが今是を用いて次の事實を證明しよう。[2]

(i) e^{-t^4}, (ii) $e^{-|t|^\alpha}\ (\alpha>2)$, (iii) $e^{-t^4-t^5}$ (iv) $\dfrac{2}{e^{t^k}+e^{-t^k}}$, $k=1,2,\cdots$

(v) $\dfrac{1}{1+t^4}$, ……

等は特性函數でない。[3]

---

(1) A Khintchine, contribution à l'arithmetique des lois de distribution.

(2) 定理 8.1 から (i)(ii) の特性函數でない事が直ちに得られるという事は角谷靜夫氏に依り筆者が注意された。

(3) (i) は F. Bernstein に負ふ。Über das Fourierintegral. Math Annalen, ?? (192?) (iii) M. Ma…, Über … Fourier integrale (iii) は M. … も證明… M. Kac. Sur les zéros de ~~l'intégral~~ de … Fourier, … London Math Soc.

この種のもつと一般な定理が J. Marcinkiewicz[1] に依て得られたが是に就ては第二章 §2 に於て述べる。

$e^{-|t|^\alpha}$ が特性函數でない事は次の様にして定理 8.1 から明かである 即ち 充分小さい t を考へると

$$e^{-|t|^\alpha} = 1 - \frac{|t|^\alpha}{1!} + \frac{|t|^{2\alpha}}{2!} - \cdots\cdots$$

さうすると $\alpha > 2$ ならば (8.1) の成立しない事が容易に判る。他の函數 (iii), (iv), (v) に就ても同様である

定理 8.1 から次の不等式が得られる。

定理 8.2[2] $f(t)$ が一つの特性函數で $|t| \geqq b$ に對して $|f(t)| \leqq c < 1$ ならば $|t| < b$ に對しては

$$(8.2) \quad |f(t)| \leqq 1 - (1-c^2)\frac{t^2}{8b^2}$$

が成立する。

$f(t)$ が分布函數 $\sigma(x)$ の特性函數とすると $|f(t)|^2$ は $\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x-u)\,d\sigma(x)$ の特性函數である。$|f(t)|^2$ に定理 8.1 を適用する。$|f(t)|=|f(-t)|$ であるから $t \geqq 0$ に就てのみ考へればよい。

$\frac{b}{2} \leqq t < b$ とすると $b < 2t$ で $|f(2t)|^2 \leqq c^2 < 1$ であるから

$$1-c^2 \leqq 1-|f(2t)|^2 \leqq 4\{1-|f(t)|^2\}$$

故に $$|f(t)|^2 \leqq 1 - \frac{1}{4}(1-c^2)$$

同様に $b/2^n \leqq t < b/2^{n-1}$ に對しては

$$|f(t)|^2 \leqq 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n(1-c^2) < 1 - \frac{t^2}{4b^2}(1-c^2)$$

故に $$|f(t)| \leqq 1 - \frac{t^2}{4b^2}(1-c^2)$$

n は任意であるから $0 < |t| < b$ に對して結局證明された事になる。$t=0$ では $f(0)=1$ であるから (8.2) は成立する (證終)

この定理から次の注意が得られる

注意 $\overline{\lim}\, f(t) < 1$ ならば $|t| \geqq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ に對して $|f(t)| < c < 1$ なる $c = c(\varepsilon)$ がある。 (つゞく)

---

(1) J. Marcinkiewicz, Sur une propriété de la lois de gauss.

(2) H. Cramér, Random variables and probability distribution. Cambr. Tracts. 1937 24頁 Lemma 1.