A. Wald の Sequential Test の基本公式について

統計数理研究所員　　小川潤次郎

はしがき

J. Neyman と E. S. Pearson とに依る統計的仮説の検定の理論（Theory testing Statistical hypothesis）と云ふのは次の如くである。統計的仮説と云ふのは母集団の確率密度函数の含むパラメーターに関する命題である。今簡単の為に母集団の密度函数を $f(x, \theta)$ として，θ の可能なる値は θ_0, θ_1 の二つしかない場合を考へる。$\theta=\theta_0$ なる仮説を H_0，そのときの密度函数を $f_0(x)$，$\theta=\theta_1$ なる仮説を H_1，そのときの密度函数を $f_1(x)$ とする。今仮説 H_0 をその唯一つの対立仮説 H_1 に対して検定しようと云ふのである。

標本の大きさを N として N 次元の標本空間 E_N 中に適当な臨界域 W_N をとって標本点 $P(x_1, \cdots, x_N)$ が W_N に落ちることで H_0 を棄却しよう。即ち H_1 を採択しようと云ふのである。このときの第一種の過誤 ― H_0 が正しいにも拘はらず之を棄却する確率 α は

$$\alpha=\int_{W_N}\cdots\int f_0(x_1)\cdots f_0(x_N)\,dx_1\cdots dx_N \qquad (1)$$

で与へられ，第二種の過誤 ― H_0 が偽なとき之を採択する確率 β は，H_1 が真なるとき之を捨てる確率であるから

$$\beta=\int_{\overline{W_N}}\cdots\int f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N \qquad (2)$$

（$\overline{W_N}$ は W_N の補集合）

即ち $$1-\beta=\int_{W_N}\cdots\int f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N \qquad (2)$$

である。而して予め λ を指定したとき (1) を満足する W_N は一般に幾つかあって之を大さ α なる相似なる臨界域と云ふ。問題は β が最小となる如く即ち $1-\beta$ が最大となる如く W_N をとり之を most powerful critical region（最強力臨界域）と云ふ。

今 (1) を満たす二つの領域 W_N, W'_N があったとすれば

$$\int_{W_N}\cdots\int f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N = \int\cdots\int_{W_N W'_N} + \int\cdots\int_{W_N - W_N W'_N} \qquad (4)$$

而して $\int_{W_N}\cdots\int f_0(x_1)\cdots f_0(x_N)\,dx_1\cdots dx_N =$

$$= \int_{W'_N}\cdots\int f_0(x_1)\cdots f_0(x_N)\,dx_1\cdots dx_N = \lambda$$

であるから

$$\int\cdots\int_{W_N - W_N W'_N} f_0(x_1)\cdots f_0(x_N)\,dx_1\cdots dx_N = \int\cdots\int_{W'_N - W_N W'_N} f_0(x_1)\cdots f_0(x_N)\,dx_1\cdots dx_N \qquad (5)$$

$$\int_{W_N}\cdots\int f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N - \int_{W'_N}\cdots\int f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N$$

$$= \int\cdots\int_{W_N - W_N W'_N} f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N - \int\cdots\int_{W'_N - W_N W'_N} f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N \qquad (6)$$

であるから、W_N として、若し

$$\frac{f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)}{f_0(x_1)\cdots f_0(x_N)} \geq k \qquad (7)$$

なる領域をとれば W_N では $1-\beta$ は最大となる

§1. A. Wald の Sequential Test

そこで、A. Wald は次の如き sequential test なる思想を導入した。単純仮説 H_0 を只一つの対立

仮説H_1に対して検定しようと云ふときに、先づ標本を一つとり一次元の標本空間を三つの部分R_1^0, R_1', R_1に分つて、標本点x_1がR_1^0に入ればH₀を棄却(H_1を採択)し、R_1'に入ればH_0を採択し、R_1に入れば、更に一つの標本をとり、二次元の標本空間を三部分R_2^0, R_2', R_2に分ち、標本点(x_1, x_2)がR_2^0に落ちればH_0を棄却し、R_2'におちればH_0を採択し若しR_2に落ちれば、更にもう一つの標本x_3を取り三次元の標本空間を三部分空間R_3^0, R_3', R_3に分ち、標本点(x_1, x_2, x_3)がR_3^0に落ちればH_0を棄却し、R_3'に落ちればH_0を採択し、若しR_3に落ちれば更にもう一つの標本x_4をとり出すと云ふ風に続けて行く。一般にm箇の標本$x_1, x_2, \cdots x_m$を取つたときにはm次元の標本空間をR_m^0, R_m', R_mなる三つの部分空間に分つて標本点がR_m^0に落ちれば更に一つ標本x_{m+1}をとつて考へる。

而して従来のNeyman-Pearsonの検定論は次の如く考へれば sequential test の special case と考へられる。即ち $R_1^0=R_1'=0$, $R_2^0=R_2'=0$, $\cdots$, $R_{N-1}^0=R_{N-1}'=0$, $R_N=0$

この sequential test では標本数nが random variable である。第一種の過誤の確率αは仮説H_0の下で

$$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty} P_r^{i0}\{n=n\}\int\cdots\int_{(x_1\cdots x_n)\in R_n^0} f_0(x_1)\cdots f_0(x_n)\,dx_1\cdots dx_n \quad (1)$$

但し

$$P_r^{i0}\{n=n\}=\int\cdots\cdots\int_{\substack{x_1\in R_1\\ (x_1,x_2)\in R_2\\ (x_1,x_2,\cdots x_{n-1})\in R_{n-1}\\ (x_1,x_2,\cdots x_n)\in R_n^0}} f_i(x_1)\cdots f_i(x_n)\,dx_1\cdots dx_n \quad (2)$$

で与へられる第二種の過誤の確率βは

$$\beta=\sum_{n=1}^{\infty}P_r^{i1}\{n=n\}\underset{(x_1\cdots x_n)\ni R_n'}{\int\cdots\int} f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)\,dx_1\cdots dx_n \qquad (3)$$

但し

$$P_r^{i1}\{n=n\}=\underset{\substack{x_1\in R_1\\(x_1,x_2)\in R_2\\ \cdots\cdots\\(x_1,\cdots x_{n-1})\in R_{n-1}\\(x_1,\cdots x_n)\in R_n'}}{\int\cdots\cdots\int} f_i(x_i)\cdots f_i(x_n)\,dx_1\cdots dx_n \qquad (4)$$

で与へられる。而して検定が終る迄に要する標本の大さの平均 $E(n)$ は

$$E(n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(P_r^{i0}(n=n)+P_r^{i1}(n=n)\right)$$

$$=E_0(n)+E_1(n)$$

である。

同じ α,β を有する二つの sequential test を同じ強さの sequential test と云ひ、与へられた強さの sequential test S, S' で同時に

$$E_0(n/S')<E_0(n/S)$$

$$E_1(n/S')<E_1(n/S)$$

のとき S' は S よりより test であると云ふ。

そこで具体的に如何に R_n^0, R_n', R_n を定めるかが問題になるのであるが Wald は Probability Ratio Test として $0<B<1,\ 1<A$ なる A, B を取って

$$B<\frac{f_1(x_1)\cdots f_1(x_m)}{f_0(x_1)\cdots f_0(x_m)}<A,\quad m=1,2,\cdots,n-1 \text{ で}$$

且つ

$$R_n^0\quad \frac{f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)}{f_0(x_1)\cdots f_0(x_n)}\geq A \qquad (6)$$

$$R_n^1 \quad \frac{f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)}{f_0(x_1)\cdots f_0(x_n)} \leq B \tag{7}$$

$$R_n \quad B < \frac{f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)}{f_0(x_1)\cdots f_0(x_n)} < A \tag{8}$$

で定める。即ち

$$Z_i = \log \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \tag{9}$$

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{10}$$

とすれば

$$R_n^0 : Z_n \geq \log A ; \quad \log B < Z_m < \log A, \quad m = 1, 2, \cdots, n-1 ; \qquad R_n^1 : Z_n \leq \log B ; \quad \log B < Z_m < \log A, \quad m = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$R_n' : \log B < Z_m < \log A \tag{11}$$

そこで $\{x_m\}$, $(m = 1, 2 \cdots)$ な標本の無限系列の凡ての集合を M_∞ で表はし M_∞ の要素であって $x_1 = a_1, \cdots, x_n = a_n$ となるものゝ集合を $C(a_1 \cdots a_n)$ で表はし cylindric point of order n と名づけた

$$\frac{f_1(a_1)\cdots f_1(a_n)}{f_0(a_1)\cdots f_0(a_n)} \geq A$$

$$B < \frac{f_1(a_1)\cdots f_1(a_m)}{f_0(a_1)\cdots f_0(a_m)} < A \qquad m = 1, 2, \cdots, n-1$$

となる cylindric point を type I と名づけ

$$\frac{f_1(a_1)\cdots f_1(a_n)}{f_0(a_1)\cdots f_0(a_n)} \leq B$$

$$B < \frac{f_1(a_1)\cdots f_1(a_n)}{f_0(a_1)\cdots f_0(a_n)} < B' \qquad m = 1, 2, \cdots n-1$$

となる cylindric point を type i と名づけた。type i の cylindric point の集合を Q_i とするとき無限次元空間 M_∞ で考へれば形式的に

$$\alpha=\int_{Q_1}\cdots\int f_0(x_1)\cdots\cdots dx_1\cdots\cdots$$

$$\beta=\int_{Q_0}\cdots\int f_1(x_1)\cdots\cdots dx_1\cdots\cdots$$

となる。仮説 H_i ($i=0,1$) が正しいときに、この sequential test が終る確率を P_i で表はすとき

$$P_i(Q_0+Q_1)=1 \qquad i=0 \tag{12}$$

となる。即ち sequential test が無限に続く確率は 0 となる。これが基本的な式であって之を用ひて A, B と α, β との関係が導かれるのである。

Wald は "On cumulative sums of random variables" Annals of Math. Stat. Vol. 15, 1944 で之を証明してみるのであるが、此文献は目下国内になく筆者は未見であるので之が証明を試みたので報告する次第である。

§2. 基本公式 $P_i(Q_0+Q_1)=1$ の証明

$$P_i(Q_0)=\sum_{n=1}^{\infty}P_r^{i0}(n=n) \tag{1}$$

$$P_i(Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}P_r^{i1}(n=n) \tag{2}$$

であって

$$P_r^{i}(n=n)=P_r^{i0}(n=n)+P_r^{i1}(n=n) \tag{3}$$

とすれば証明すべき式は

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_r^{i}(n=n)=1 \tag{4}$$

となる。而して

$$P_r^{i}(n>n-1)=P_r^{i}(n=n)+P_r^{i}(n>n) \tag{5}$$

であるから(4)は又

$$\lim_{N\to\infty} P_r^i(n > N) = 0 \qquad (6)$$

と equivalent である。吾々次に(6)式を証明しよう。

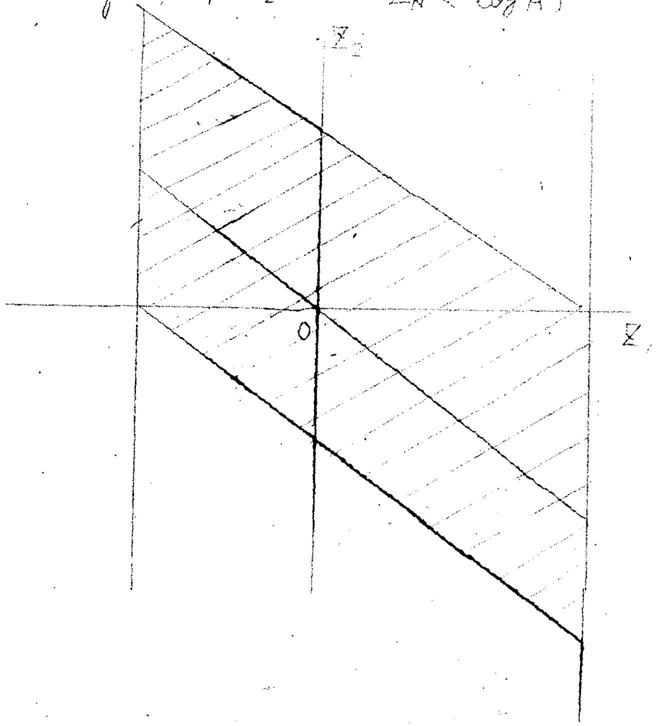
さて

$$P_r^i(n>N) = \underset{\substack{\log B < Z < \log A \\ \log B < Z_1 + \cdots + Z_n < \log A}}{\int \cdots\cdots \int} f_i(x_1)\cdots f_i(x_N)\, dx_1 \cdots dx_N \qquad (7)$$

であって、積分領域

$$\left.\begin{aligned} &\log B < Z < \log A \\ &\log B < Z_1 + Z_2 < \log A \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\log B < Z_1 + Z_2 + \cdots\cdots + Z_N < \log A \end{aligned}\right\} (e)_N \qquad (8)$$

は、



437

$$\left.\begin{array}{l} 0 < z_1 < \log A_1 \text{----}, \ 0 < z_N < \log A \\ 0 < z_1 + \text{------} + z_N < \log A \end{array}\right\} \omega_N^A \qquad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} \log B < z_1 < 0, \text{----}, \log B < z_N < 0 \\ \log B < z_1 + \text{----} + z_N < 0 \end{array}\right\} \omega_N^B \qquad (10)$$

とすれば体積 V は

$$V(\omega_N) = 2^N (V(\omega_N^A) + V(\omega_N^B)) \qquad (11)$$

となる。

ω_N^A で(7)なる積分を計算するに Dirichlet の変換を用いて

$$\frac{z_1}{\log A} + \text{---------} + \frac{z_N}{\log A} = \zeta_1$$

$$\frac{z_2}{\log A} + \text{---------} + \frac{z_N}{\log A} = \zeta_1 \zeta_2 \qquad (1\cdot)$$

$$\text{---------}$$

$$\frac{z_N}{\log A} = \zeta_1 \zeta_2 \text{----} \zeta_N$$

とおくと Jacobian は

$$\frac{D(z_1 \text{---} z_N)}{D(\zeta_1 \text{---} \zeta_N)} = \zeta_1^N \zeta_2^{N-1} \text{---} \zeta_{N-1}^2 \zeta_N (\log A)^N \qquad (15)$$

となり ζ 空間の積分領域は

$$\omega : \ 0 \leqq \zeta_1 \leqq 1, \text{----}, \ 0 \leqq \zeta_N \leqq 1 \qquad (16)$$

となるから

$$\int_{\omega_N^A} \text{----} \int f_i(x_1) \text{---} f_i(x_N)\, dx_1 \text{---} dx_N$$

$$= \int_{\omega} \text{---} \int f_i(x_1) \text{----} f_i(x_N) \frac{D(x_1 \text{---} x_N) D(z_1 \text{---} z_n)}{D(z_1 \text{---} z_N) D(\zeta_1 \text{---} \zeta_n)} d\zeta_1 \text{---} d\zeta_N$$