論文紹介 2.

R. V. Mises

「ミーゼス」ノ観測値ノ組分ケニ就テ

(On the classification of observation data into distinct groups.)

The Annals of Mathematical Statistics. Vol. XVI. No. 1

(March 1945)

前書

此ノ次第書キハMisesノ原論文ト関係ナイノデアルガ本論文ヲ通読スルニ当リ抄録著自身ガ自己ニ言ヒキカセタ一種ノものろーぐデアルカラ御許シヲ願ッテ書カセテイタダクコトニスル

種々ナル人ニヨリ確率、確率ト称セラレテ居ルノデアルガ確率ト言フstaticニ固定化サレタ言葉ノ上ニ於ノ同一性ニモ拘ラズ実ハソノ生キタdynamicノ意味ニ於ハ極メテ其ノ内容ヲ異ニシテ居ルコトニ注意スベキデアル　従ッテ確率ナル言葉ヲ聞ク際ニソノ著者(論者)ノ抱懐スル生キタ意味デノ確率ノ内容ヲ体験センガ為ニハソノ著者(論者)ガ如何ナル要求(内的外的)ニヨリ如何ナル必然性ヨリ如何ナルaxiomノdefintionヲ——サレバコソ、ソノ生キタ意味——ヲ採用シテ居ルカニ根源ニ立チモドッテ確メネバナラヌ

本論文ハMisesノ論文デアル以上ソノ確率ノaxiom——Mises-WaldノKollektivノ観念——ヲ想起スル必要ガアル-----今簡単ニ其ノaxiomヲノベテミル.

Misesハ確率ナル数値ハKollektivノ中ニ於

ノミ意味ヲ持ツト言フ、シカラバKollektivトハ何カ試行ニヨリテ継起的ニ生レタ現象ヲ観測シ其ノ観測サレタ事象ノ標識(骰子ヲ振ツタ時ソノ目1, 2, 3, 4, 5, 6, 等)ヲ以ツテ其ノ試行数列ヲ記述スル此ヲ$\{x_i\}$トスル　此ガ次ノ二ツノaxiomヲミタストキS及$\mathfrak{M}$ニ関シ確率$p\{\mathfrak{M} \ni A\}$ヲモツKollektivト云フ

I　標識空間ノ凡テノ部分集合系ヲ$\mathfrak{M}$トスル$\{x_i\}$ナル試行数列ノ最初ノn個中標識$A(\in \mathfrak{M})$ヲ示スモノノ数ヲ$n\{\mathfrak{M} \ni A\}$トスル
此ノ中其ノrelative frequency $\frac{n\{\mathfrak{M} \ni A\}}{n}$ガ一定ノ極限値ヲモツ
即チ　$\lim_{n \to \infty} \frac{n\{\mathfrak{M} \ni A\}}{n} = p\{\mathfrak{M} \ni A\}$ が存在ス

II　$\{x_i\}$中ノAニ属スルモノノrelative frequencyノlimiting valueヲ$p\{\mathfrak{M} \ni A\}$トスル

欲スル問題群ノ解決(従ツテ可附番個)ニ利用セラルベキ必然的ニ可附番個ノplace selection――此ノ一ツノplace selectionヲ行使シテ$\{x_i\}$中ヨリ部分数列ヲツクル時原数列中$\{x_i\}$ノ中i番目x_iヲ選ブカ否カハ高々ソノ直前迄ノ数列ノ標識$x_1, \cdots, x_{i-1}$ヲ利用シテ数学的ニアラカジメ決定セラレタル法則ニヨリ乃至ハ標識ニ関係ナクplaceヲアラカジメ数学的ニ指定スルコトニヨリ決定セラル、ソノ様ナ事ノ予メ数学的ニ決定セラレテアルselection――の系ヲSトスル。
Sノ中ノ一ツノplace selectionヲ$\{x_i\}$ニ行使シテ生レタ数列ヲ$\{x_{i_j}\}$トスル　此ノ数列中ニ於テモ　標識

Aヲ示ス relative frequency ノ極限値ガ$\{x_i\}$中ニ於テモ同様ニ$p\{M;A\}$デアル

(註)(I) 此 IIノ axiom ハ Mises ノ原 axiom ト異ツテヰル Mises ノモトノ axiom ハ其ノ表現上ニ缺陷ガアツタ関係上 Wald ガソノ axiom ノ不完全ナル箇所ヲ修正シ axiom I. II ノ無矛盾性ヲ證明スル。Mises モ到ル所ニ於テ此ノ修正ヲ承認シテヰルノデアルカラ Mises 及 Wald ノ axiom ヲ合セテ axiom II ヲ変形シテ上ノ様ナ形ニシタ

(II) シタガツテ此ノ axiom ニシタガヘバ確率p_Aト言ヘバ試行回數nヲ十分大ニシタトキAナル標識ヲ示スモノガ略$\underline{np_A}$丈アル 又問題解決ニ利用スベキ place selection Sニヨリ作レル數列中ニ於テモソノ試行回數n'ガ十分大ナル中標識Aヲ示スモノガ略$n'p_A$丈アルコトヲ示シテヰル。

此ノ axiom ハ static ナ表面上ノ整合ノミヲ示ス空間化サレタ形式論理ノ上カラハ不完全ナル所ガアリ排斥セラレテヰルノデアルガ現實的意味ノ上カラハ――現実問題解明ニ対シテハ――假令多少論理的不整合ガアラウトモ實リ豊カナル肉体ヲモツタ axiom ト思ハレル。素晴ラシイ論理的構成 無矛盾的推理ノ透徹セル使用ニモ拘ラズ 欲スル現実的意味内容ノ殘

要スル必然的要求ニ合致セヌモノガアレバ其レハ
最モ小サナ雑魚一匹サヘモ釣リ上ゲ得ラレヌモノ
ト思ハレル。

眞理ハ單ニ發見セラレルモノデナク静止シテオルモ
ノデナク生キタ人間ガ常ニ「建立シツツアル」モノ
デアル

理論ハ常ニ持續シツツ流動シツツアル現実全体カ
ラ我々ノ活動ニヨリ昇華セラレタモノニスギヌコトヲ
認識シソノ理論的ナルモノノ(即チ axiom, hypothesis
ヨリスル)限界ヲ究メ同シ現実ガ全ク異ッタ方
法ニヨリ現実ニ肉迫シツツ別様ニ理論ヅケ得
ラレルノデハナイカト言フ点ニ注意スベキデアル。
視野ヲ確率論ニ狭メ考フルモ同様デアル 其ノ
發展セル理論体系ヲ考究スルニ当ッテ不知不識ノ中ニ
既成觀念ノ因習ニ隨シ実体ナキ些細事ニ踊躇
スルコトナキヤヲ批判シ常ニ確率ノ生キタ意味ノ
imagl ヲ呼ビ起シ根源ニ立チ戻ッテソノ axiom ヲ
Definitions ヲ懷疑的ニ或ハ肯定的ニ思索シ
此ニヨリ如何様ノ現實問題ノ處理可能ナリヤ
又如何ニ此ノ axiom ニ基ク理論ノ不満ヲ充足シ
如何ニ其ノ不完全ヲ補フベキヤヲ考察シ絶エズ理
論ノ内閉性、純粋性ト現実ノ意味ト生々トシタ
我ガ觀念像トノ間ノ不即不離的接觸ノ中ニ
即チ其等ノ自己限定ノ上ニ立ツ自己否定ヲ媒介ト

シテノ生動的三位一体的自己肯定ノ相ノ下ニ理論ヲ清ラカニ結晶セシムベキデアリテ　建立的ニ理論ノ根底ニ觸レツツ思考ハ進展シテ行クノデナケレバナラヌ。

1.　問題ノ提示

(イ) アル集團ガアル　此ノ各ニ Trial ヲホドコスト其ノ結果、一定ノ數 X（一ツノ實數又ハ幾ツカノ實數）ヲ示スモノトシ、又集團ニ屬スル各ノモノハ凡テ幾ツカノ class ノ中ノ一ツニ屬シテヰルモノト假定スル。此幾ツカノ class ハ一定ノ X ニ對シ幾ツカノ確率密度 $p_1(x)$, ---, $p_n(x)$ ニヨッテ其ノ分布構造が特色ヅケラレテヰルモノト考ヘル　我々ハ觀測ノ結果 X ヲ得タ時此ハ果シテ如何なる class ニ屬シテヰルカヲ決定セネバナラヌトスル　此ノ時 X ガアル class ニ屬シテヰルト決定シタ時過誤ヲ可能ナル限リ小ナラシメタイガ如何ニスベキデアルカ？

(ロ) 實例　試驗ノ例

3ツノ等級 A.B.C ヲ考ヘル　X ハ一次元ノ實數トスル。

	分布函數	平均 ν	standard deviation σ
等級 A ニ屬スル個々ノモノノ從フベキ確率法則	normal	75	$4/\sqrt{2}$
等級 B ニ屬スル個々ノモノノ從フベキ確率法則	normal	50	$8/\sqrt{2}$
等級 C ニ屬スル個々ノモノノ從フベキ確率法則	normal	25	$12/\sqrt{2}$

ニヨッテ A, B, C ハ特色づケラレテヰルトスル

此ノ場合 x ナル value ヲ観測シタトキ如何ナル class ニ属スルヤヲ決定スル。以下本論文ノ結果ヲ用フレバ

70 以上ノ x ハ A class,

40 以下ノ x ハ C class,

残リノ x ハ B class ニ属スルト決定スレバ、ソノ成功率ハ 0.961 トナルコトガワカル。

2. 問題ノ formulate ニ対スル準備的考察

n 個ノ class ノ各一ニ対シテ確率密度 $p_\nu(x)$, $\nu=1, 2, \cdots n$ ガ與ヘラレテヰルトス。

(T) m 次元ノ x-空間ヲ $R_1, \cdots R_n$ ノ region ニ細分シ R_ν ナル region ニ属スル x ガ ν 番目ノ class ニ属シテヰルモノト決定スルコトニシテミヨウ

ν 番目ノ class ノ各ノモノガ R_ν 内ニ落チル確率ハ

$$(1)\qquad P_\nu = \int_{(R_\nu)} p_\nu(x)\, dx ; \quad \nu = 1, 2, \cdots n$$

(dx ハ x-space ノ element)

trial ノ無限ニ續ク数列ノ最初ノ N 回中本来 ν 番目ニ属シテヰルモノガ N_ν 回丈 Test サレテヰルト考ヘル。此ノ N_ν 中 x ノ value ガ R_ν ノ中ニ落チテヰルモノノミヲ (T) ニヨリ ν 番目ノ class ニ属シテヰルト決定シタ事ニナルカラ確率ノ定義ニヨリ此ノ数ハ $N_\nu(P_\nu+\varepsilon_\nu)$ —— $\varepsilon_\nu \to 0$ ($N_\nu \to \infty$ ノ時)

――デアル　従ッテN回ノtrial中観測値ヨリ正シイclass分ケヲナシタモノノ数ハ

(2) $N_1(P_1+\varepsilon_1)+\cdots\cdots+N_n(P_n+\varepsilon_n)$デアリ

此ノ頻度ハ

(2)' $\frac{N_1}{N}(P_1+\varepsilon_1)+\cdots\cdots+\frac{N_n}{N}(P_n+\varepsilon_n)$トナル

$N\to\infty$ノ時$N_\nu\to\infty$トナル。従ッテ$\varepsilon_\nu\to 0$トナル

($N_\nu\not\to\infty$ナラバ其ヲ含ム項ハ0トナッテ了フ)

サレバコソ正シイclass分ケヲナシタモノノ頻度ハ

(3) $\frac{1}{N}(N_1P_1+\cdots\cdots+N_nP_n)$ニ収斂スル

トコロガN_νハ未知デアリ0トNトノ間ノ数ヲトリウル。

今、$P_{min}=\min\limits_{1\leq\nu\leq n}(P_\nu)$トスレバ(3)ガ最小値ヲ持ツ場合　即チ最モ悪イclass分ケヲナサレタ場合ハ$N_{min}=N$デアリ他ノ凡テノ$N_\nu=0$ナルトキニオコルノデアル　此ノ値ハP_{min}デアル

斯ノ如ク考ヘテ来レバ正シイclass分ケヲナシタ場合ノ頻度ハ少クトモP_{min}ニ等シイ事ガワカル。

3. 問題ノformulate

問題ハ次ノ如キ形ニヨッテ数学的ニ表現セラルコトニナル

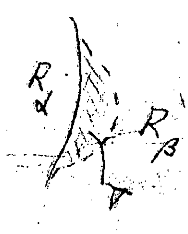
n個ノ与ヘラレタ確率密度$P_\nu(x)$ニ対シテ

(1)ニ於テ定義セラレタ p_ν ノ最小値ヲ出来得ル限リ大ナラシメル様ナ n 個ノ region R_ν ニ x-space ヲ分割スルコト」

此ノ問題ハ continuous variation ノ問題ノ型デアリ $p_\nu(x)$ ニアル制限ヲ加ヘルナラ解ガ存在スルモノト考ヘラレル 然シ解ノ一意性ハ一次元ノ場合ヲ除キ一般ニ決定スルコト極メテ困難デアル

4. 問題ノ解決

① 凡テノ P_ν ガ等シクナイ様ニ x-space ヲ n 個ノ region ニ分ケタトスル 最小ノ P ヲ P_{min} トスル P_{min} 以外デ最モ少ナルモノヲ P^* トスル。$P_\nu = P_{min}$ ナル如キ k 個ノ region ノ中少クトモ一ツノ R_α ハ $P_\beta \geq P^*$ ヲモツ R_β ナル region ト共通ノ境ヲモタネバナラヌ



今 R_α ト R_β トノ境ヲ R_α ノ方ガ増大シ R_β ノ方ガ減少スル様ニ変ジテミル。

此ノ時 P_α, P_β ノ新シイ値ハ(1)ニヨリ

$$(4)\begin{cases} P_\alpha' = \int_{(R_\alpha + \gamma)} p_\alpha(x)\,dx = P_\alpha + \Delta \\ P_\beta' = \int_{(R_\beta - \gamma)} p_\beta(x)\,dx = P_\beta - \Delta' \end{cases} \quad (\Delta, \Delta' \text{ハ正})$$

Δ, Δ' ハ互ニ独立デハナイガ此ハアルアタヘラレタ値 ε ヨリ小ナラレメ得ル 故ニ

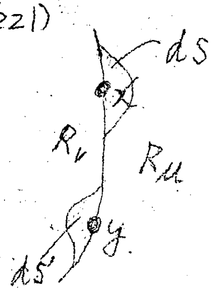
(5) $P_\alpha' = P_\alpha + \Delta < P_\beta - \Delta' = P_\beta'$ ガ満タサレ得ル 此ノ時他ノ凡テノ P_γ ハ不変デアル

今 $k = 1$ トスレバ (唯一ツノ Region R_ν ノミガ最小ノ P ノ値ヲモツテ居ルトスレバ) 上ノ如ク modify サレタ systems ハ $P_\alpha + \Delta$ 或ハ P^* ニ等シイ前ヨリ大ナル最小ノ P ノ値ヲモツコトニナル

$k \neq 1$ ナラバ modify サレタ新シイ System ハ前ト同一ノ P_{min} ヲモツガソレヲモツ Region ノ数ガ $k-1$ トナツテ居ル 此ヲ $k-1$ 回繰返セバ唯一ノ minium ナ P ノ値ヲモツ system ヲ得ル ソレヲモトノ P_{min} ヨリ大ナル最小ノ P ノ値ヲモツ m 個ノ region ニ X-space ヲ分割シタコトニナル 結局最小ノ P ノ値ヲモツ分割アリトスレバ必ズソノ最小ノ P ノ値ヨリモ大ナル P ノ値ヲ最小トスル様ナル分割ガ存在スルコトニナリ我々ノ問題ハ解決出来ヌ。

(ロ) 故ニ $m > 1$ トシテ $P = P_1 = \cdots = P_n$ ナル n 個ノ region ニ分ケル場合ヲ考ヘル

二ツノ相隣ル region R_ν, R_μ ノ境界上ニ二点 x, y ヲトレバ



此ノ時ハ、境界ヲ次ノ様ニ変化サセル
x点ノ近傍デ space element δS 丈 R_v ガ増加シ R_u ガ減少スル
y点ノ近傍デ space element $\delta S'$ 丈 R_u ガ増加シ R_v ガ減少スル

此ノ時 ①ト同様ニシテ P_v, P_u ノ新シイ値トシテ

$$(6)\quad P_v' = P + p_v(x)\delta S - p_v(y)\delta S'$$

$$P_u' = P - p_u(x)\delta S + p_u(y)\delta S'$$ ヲトル

$\Delta v = P_v' - P$, $\Delta u = P_u' - P$ トシテ (6)ヲ δS, $\delta S'$ ニツキ、トケバ

$$(7)\quad \delta S = \frac{p_v(y)\Delta u + p_u(y)\Delta v}{D},$$

$$\delta S' = \frac{p_v(x)\Delta u + p_u(x)\Delta v}{D}$$

但シ $D = p_v(x)p_u(y) - p_u(x)p_v(y) \neq 0$

$D > 0$ トスル Δu, Δv ノ両方ガ positive ナル、トキ δS, $\delta S'$ ヲ発見出来ル　$D < 0$ トスル同様ノコトハ x, y ヲ交換スレバ述ベラル　要スルニ $D \neq 0$ トスレバモトノ分割ハ２ツノ region R_v, R_u ガ前ノ P ヨリ増加——$P_{min} = P$ ハ不変($n > 2$ ナラバ)——シテヰル様ナ region ノ新シイ Systems ヲ得ルコトニナル　此デ結局①ノ場合ト同様ニナリ我々ノ問題ハ解決デキヌコトニナル。

(ハ) 残ル場合ハ $D=0$ デアル

即チ我々ノ問題ノ解ハ任意ノ二点 x, y ニ対シテ

D ガ 0 デナイ様ナ境界ハ含ミエヌト言フ事ニナル

$D=0$ ハ(境界ニ沿ッテ) $p_\nu(x) : p_\mu(x) = const$

ヲ意味スル

以上ノ考察ニヨリ次ノ様ナ結果ヲ得ルコトニナル

我々ガ問題ヲ解決スル x-space ノ分割ハ

次ノ性質ヲモツ

(イ) 凡テノ n 個 region R_ν ニ対シ P_ν ハ同一デアル

(ロ) R_ν ノ R_μ 間ノ境界ニ沿ッテ $p_\nu(x)/p_\mu(x)$ ガ const

デアル

此ノ時甚ダシイ class 分ケヲナシタ成ミカ事ハ P ＝

等シイ

5. 實 例

(イ) 一次元ノ場合

(ロ)ナル條件ハ明ラカデアル(境界ガ一点トナッテ了フカラ)

(8) $F_\nu(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\nu(x)\,dx$ ヲ考ヘレバ

$P_1 = P_2 \cdots = P_n$ ナル條件ハ

(9) $F_1(x_1) = F_2(x_2) - F_2(x_3) = \cdots\cdots = 1 - F_n(x_{n-1})$ トナル

$x_1 \cdots x_{n-1}$ ハ両辺ガ無限マデツヅク。x-軸

ヲ n 個ノ区間ニ分ケルカラ.

(223)

1.デノベタ例ヲ考ヘル

$$p_\nu(x)=\frac{1}{\sigma_\nu\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{(x-\vartheta_\nu)^2}{2\sigma_\nu^2}}\qquad \vartheta_\nu=75,50,25$$

$$\sigma_\nu^2=8,32,72$$

$$\Phi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$$ トスレバ

(9)ニヨリ $1+\Phi\left(\frac{x_1-25}{12}\right)=\Phi\left(\frac{x_2-50}{8}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-50}{8}\right)=1-\Phi\left(\frac{x_2-75}{4}\right)$

$=2P$ トナル　此ヲトケバ　1デ得レタ結局ヲ得ル

(ロ) 一般ノ場合

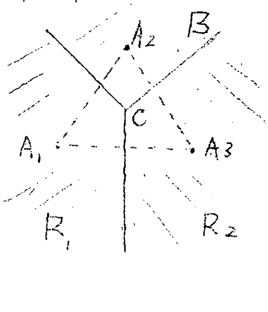
$$p_\nu(x,y)=\frac{\sqrt{D_\nu}}{\pi}e^{-\frac{1}{2}Q_\nu}$$

但シ $Q_\nu=\alpha_\nu(x-a_\nu)^2+2\beta_\nu(x-a_\nu)(x-b_\nu)+\gamma_\nu(y-b_\nu)^2$

(3)ナル條件ニヨリ R_ν, R_μ ナル region ヲ分ケル
曲線ハ $Q_\nu-Q_\mu=const$ トナル。
此ノ const ハ (ハ) ナル條件凡テノ P_ν ガ等シクナケレバ
ナラヌトイフ條件デキマル

特ニ α、β、γ ガ各νニ対シテ同一ノ値ヲモテバ境界ハ
直線トナツテ了フ。此ノ場合 p_ν ハ一次変換
ニヨリ $p_\nu(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-(x-a_\nu)^2-(y-b_\nu)^2}$ トナル
此ノ変換サレタ平面上デ P_ν ト P_μ トノ間ノ境界ハ点
$A_\nu(a_\nu,b_\nu)$, $A_\mu(a_\mu,b_\mu)$ ヲムスブ直線ニ垂直トナル

一般ニ $n=3$ ノ中3ツノ境界ハ一点C(其ノ位置ハ
條件(ハ) $P_1=P_2=P_3$ ニヨリ決メラレル)ヲ通リ A_1A_2,



A_2A_3, A_3A_1 ニ垂直ナ直線ニ
ヨツテ決メラレルコトニナル
成功率ハ同様ニモトメラレル。

（林　知己夫）