(259)

論文紹介. 4.

ON AN EXTENSION OF THE CONCEPT OF MOMENT WITH APPLICATIONS TO MEASURES OF VARIABILITY, GENERAL SIMILARITY, AND OVERLAPPING

Milton da Silva Rodrigue
State University of São Paulo

(1) 序論。 度数分布 $D:[X_i, F_i]$ $(i=1,2,\cdots n)$ が與ヘラレタ時次ノ式 $M_r(D, X_j)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_j)^r F_i$

ヲ原点 X_j ノ周リノ D ノ r 次ノ total moment ト名附ケル。重ミヅケラレタ和 $\mathfrak{M}_r=\sum_j W_j M_r(D, X_j)$

ヲ考ヘヤウ。コヽニ W_i ハ特定ノ原点 X_j ニ対應スル重ミヲ示シ総和ハ或範囲 Φ ニワタルモノトスル。特ニ Φ が変数 X_j カラ成ル D の総テノ値ノ集合デ、$W_j=F_j$ ナルトキ上式ヲ D ノ r 次ノ Complete total moment ト名ヅケル。コレニ反シモシ W_i が第二ノ度数分布 $D':[X'_j, F'_j]$ ノ X'_j ノ度数 F'_j デアリ Φ' が変数 X'_j ノ D' ノスベテノ値ノ集合ナル時 $\mathfrak{M}_r$ ヲ D ト D' トノ r 次ノ aggregate moment ト名ヅケル。コノ方法ヲ若干変形スルト所謂 D ト D' トノ moment of transvariation が導カレル。

complete moments ノ概念ハ原点ノ選ビ方ニ無関係ナ或種ノ前以テ知ラレテヰタ変異ノ度合(measures of variability)ニ関聯シソシテ又度数分布の形式デ与ヘラレタ「データ」ニ有用ナ簡単ナ計算法ヲ与ヘタ。aggregate moments ト moments of transvariation ノ研究デニツノ分布ノ間ノ重複量ノ度合(measures of the amount of overlapping)ノミナラズ一種ノ全体的類似ノ度合(measures of general similarity)が得ラレル。

2. 度数分布ノ sliding moment ト complete moment

2.1. 特定ノ値 j ニ対スル各々ノ(2, 11)式ノ形列ヲ γ 次ノ sliding total moment ト名附ケヤウ。

$$(2,11)\qquad M_\gamma(X_j)=F_j\sum_{i=1}^{n}[(X_i-X_j)^\gamma F_i]$$

complete total moment ノ式ヲ完全ニ記スト

$$(2.12)\qquad \mathfrak{M}_\gamma=\sum_{j=1}^{n}M_\gamma(X_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(X_i-X_j)^\gamma F_i F_j]$$

明ラカニ complete moment ハ原点ノ選ビオニ無関係

2.2. $\gamma=0$ ナラバ $M_0(X_j)=F_j\sum_{i=1}^{n}F_i$

故ニ 0次ノ complete total moment ハ

$$(2.21)\qquad \mathfrak{M}_0=\sum_{j=1}^{n}F_j\sum_{i=1}^{n}F_i=M_0^2$$

コノ ニ M_0 ハ ソノ原点ノ周リノ 0次ノ total moment ヲ表ハス。即チ $M_0=NV_0'$

2.3 $\gamma=1$ ナラバ $M_1(X_j)=F_j\sum_{i=1}^{n}[(X_i-X_j)F_i]$

M_1 デ X ノ原点ノ周リノ一次ノ total moment ヲ表スト $M_1(X_j)=F_j\sum_1^n X_iF_i-X_jF_j\sum_1^n F_i=F_jM_1-X_jF_jM_0$

j ヲ 1 カラ n マデ変ヘテ総和スルト

$$(2,31)\qquad \mathfrak{M}_1=\sum_{j=1}^{n}F_jM_1-\sum_{j=1}^{n}X_jF_jM_0=M_0M_1-M_1M_0=0$$

コレハ偏差 X_i-X_j ノ符号ヲソノママ用ヒタカラデアル。絶対値ヲ用ヰタ一次ノ complete moment ノ値ヲ計算スルトコノ時 sliding total moment ハ $|M_1(X_j)|=F_j[\sum_{i=1}^{j-1}(X_j-X_i)F_i+\sum_{i=j}^{n}(X_i-X_j)F_i]$

コレハ次ノ形ニナル

(2.32) $|M_1(X_j)| = F_j X_j \left[\sum_{i=1}^{j-1} F_i - \sum_{i=j}^{n} F_i\right] - F_j \left[\sum_{j=1}^{j-1} F_i X_i - \sum_{j=j}^{n} F_i X_i\right]$

jニツイテ加ヘ，代入式

$$\sum_{i=j}^{n} F_i = M_0 - \sum_{i=1}^{j-1} F_i$$

(2.33) $\sum_{i=j}^{n} F_i X_i = M_1 - \sum_{i=1}^{j-1} F_i X_i$

ヲ用ヰルト complete total moment ハ次ノ如シ

(2.34) $|\mathfrak{M}_1| = 2\sum_{j=1}^{n} \left[F_j X_j \sum_{i=1}^{j-1} F_i\right] - 2\sum_{j=1}^{n} \left[F_j \sum_{i=1}^{j-1} F_i X_i\right]$

一次ノ complete total moment ヲ０次ノ complete total moment ヲ除シタ商ヲ一次ノ complete unit moment 或ハ何ラ混同ヲ来サヌ時ハ簡単ニ一次ノ complete moment ト名ヅケル

(2.35) $m_1 = \dfrac{|\mathfrak{M}_1|}{\mathfrak{M}_0}$

complete unit moment ハ一種ノ変異ノ度合(measure of variability)デアリ Andare, Helmert ガ夫々1869年，1876年ニ考ヘタモノ及ビ C. Gini ガ1912年ニ mean difference with repetition ト名ヅケタモノニ等シイ

(2.6) ✡

コノ二 M_2 ハ二次ノ total moment デアル。j ニ就イテ加ヘルト二次の complete total moment ニナル。

(2.41) $\mathfrak{M}_2 = \sum_{j=1}^{n} M_2(X_j) = 2(M_2 M_0 - M_1^2)$

故ニ二次ノ complete unit moment ハ

(2.42) $m_2 = 2\left[\frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^2\right] = 2(\nu_2' - \nu_1'^2) = 2\sigma^2$

コノ二 ν' ハ X ノ原点ノ周リノ單位 moment ヲ示ス

即チ $\nu_r' = \frac{\Sigma X^r F}{\Sigma F}$

m_2 ハ尓原点ノ選ビ方ニ無関係ナ変異ノ度合デアル。m_2 ハ Gauss ノ "Präzisionsmas" ノ平方或ハ Fisher ノ偏差ノ2倍デアル。m_1 ト同ジク Andare ト Helmert ガ定義シ Gini ガ mean square difference with repetition ト名附ケタモノニ等シ。

2.5. $r = 3$ ナラバ sliding moments ハ

$$M_3(X_j) = F_j \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_j)^3 F_i$$

$$= F_j M_3 - 3F_j X_j M_2 + 3F_j X_j^2 M_1 - F_j X_j^3 M_0$$

j ニツイテ総和ヲトルト

(2.51) $\mathfrak{M}_3 = \sum_{j=1}^{n} M_3(X_j) = M_3 M_0 - 3M_1 M_2 + 3M_2 M_1 - M_3 M_0 = 0$

ナル結果ガ得ラレルガコレハ奇数次ノ complete moment ニ関シテ共通デアルコトガ容易ニ証明サレ得ル。

✡(上文✡印ニ挿入)

2.4 二次ノ sliding total moment ハ

$$M_2(X_j) = F_j \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - X_j)^2 F_i\right] = F_j M_2 - 2F_j X_j M_1 + F_j X_j^2 M_0$$

先ニ記シタ如ク$|\mathfrak{m}_1|$ノ計算法ト同様ノ方法ヲトリ偏差 x_i-x_j ノ絶対値ヲ用ヰテ三次ノ complete moment ノ値ヲ計算スルト

$$|\mathfrak{m}_3| = 2\Big[\sum_{j=1}^{n} F_j x_j^3 \sum_{i=1}^{j-1} F_i - 3\sum_{j=1}^{n} F_j x_j^2 \sum_{i=1}^{j-1} F_i x_i + 3\sum_{j=1}^{n} F_j x_j \sum_{i=1}^{j-1} F_i x_i^2 - \sum_{j=1}^{n} F_j \sum_{i=1}^{j-1} F_i x_i^3\Big]$$

2.6. 四次ノ sliding moments ハ

$$M_4(x_j) = F_j M_4 - 4F_j x_j M_3 + 6F_j x_j^2 M_2 - 4F_j x_j^3 M_1 + F_j x_j^4 M_0$$

j ニツイテ加ヘ簡約スルト

$$(2.61)\quad \mathfrak{m}_4 = M_0 M_4 - 4M_1 M_3 + 6M_2^2 - 4M_3 M_1 + M_4 M_0 = 2(M_0 M_4 - 4M_1 M_3 + 3M_2^2)$$

$\mathfrak{m}_0$ デ両辺ヲ割ルト

$$m_4 = 2\Big[\frac{M_4}{M_0} - 4\frac{M_1}{M_0}\frac{M_3}{M_0} + 3\Big(\frac{M_2}{M_0}\Big)^2\Big] = 2(v_4' - 4v_1' v_3' + 3v_2'^2)$$

然ルニ v ハ平均ノ周リノ moment ヲ示スカラ

$$v_4 = v_4' - 4v_1' v_3' + 6v_1'^2 v_2' - 3v_1'^4$$

故ニ

$$m_4 = 2(v_4 + 3v_2'^2 - 6v_1'^2 v_2' + 3v_1'^4) = 2[v_4 + 3(v_2' - v_1'^2)^2] = 2(v_4 + 3v_2^2)$$

complete moment カラ原点ノエラビ方ニ無関係ナ尖度 (a measure of Kurtosis) ガ得ラレル

$$K = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{v_4}{2v_2^2} + \frac{3}{2}$$

normal curve ハ $v_4/v_2^2 = 3$ デアルカラ mesokurtosis ノ場合ハ $K=3$ トナル。Pearson ノ measure

β_2ノ場合ト同ジ範囲ニ対シテ leptokurtosis ト platikurtosis ガ起ル

3. 二ツノ度数分布ノ Aggregate moments

3.1 二ツノ度数分布 $D:[X_i, F_i]$ $(i=1,2,\cdots n)$ ト $D':[X'_j, F'_j]$ $(j=1,2,\cdots p)$ 及ビ第二ノ分布ニ属スル固定点 X'_j トガ与ヘラレタ時、次ノ式

$$(3,11)\quad M_r(D,X'_j)=F'_j\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-X'_j)^r F_i$$

ヲ第二分布ノ要素 X'_j ノ周リノ第一分布ノ r 次ノ aggregate sliding total moment ト名ヅケル

j ニツイテ加ヘルト

$$(3,12)\quad {}^c\mathfrak{M}_r=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}F'_j(X_i-X'_j)^r F_i$$

${}^c\mathfrak{M}$ ヲ aggregate complete total moment 或ハ単ニ D' ニ関スル D ノ aggregate total moment ト名ヅケル。之ハ明ラカニ二ツノ分布ニ関スル奇数函数デアル(但シ奇数次ノ moment ノ場合異符号トナル)

3,2 $r=0$ ナラバ

$$(3,21)\quad M_0(D,X'_j)=F'_j\sum_{i=1}^{n}F_i$$

$$(3,22)\quad {}^c\mathfrak{M}_0=\sum_{j=1}^{p}F'_j\sum_{i=1}^{n}F_i=M_0M'_0$$

3,3 $r=1$ ナラバ

$$(3,31)\quad M_1(D,X'_j)=F'_jM_1-F'_jX'_jM_0$$

$$(3,32)\quad {}^c\mathfrak{M}_1=M_1M'_0-M_0M'_1$$

次ノ商

$$(3,33)\quad {}^c\mathfrak{m}_1=\frac{{}^c\mathfrak{M}_1}{{}^c\mathfrak{M}_0}$$

ヲγ次ノ aggregate unit moment（或ハ aggregate moment coefficient）或ハ簡単ナ名称デ混同ヲ来サナイ場合ハ単ニγ次ノ aggregate moment ト名附ケル。明ラカニ aggregate moments ハ D ト D' トノ間ニ形及ビ位置ニツイテノ全体的ナ類似性ノ度合（measures of general similarity）デアル。此ノ類似性ハ二ツノ分布ガ全ク一致シタ時同一ニナル。他方各々ガ遭遇スル非類似性ノ度合（the degree of nonsimilarity ニハ極限ガナイ如カラ明ラカデアル。ソコデ類似性ノ記号ヲ次ノ如ク定義スル。

3.34. $S = \dfrac{m_1 m_1'}{{}^c m_1^2}$

然シ ${}^c m_1 = \dfrac{M_1 M_0' - M_0 M_1'}{M_0 M_0'} = A - A'$

コヽニ A ト A' トハ D 及ビ D' ノ算術平均ヲ表ハス。サテ A＝A' ナラバ S＝∞トナリコノ結果ハ m_1 ト m_1' ノ計算デ偏差 $x_i - x_j'$ ノ絶対値ヲトリ ${}^c m_1$ デハ代数的符号ヲ保留セシメタ事実ニヨル。

(3,34) ノ分母子ヲ比較スルニハ

1) ${}^c m_1$ デ絶対値ヲ用フルカ　2) S ノ分母子共ニ正ノミノモノカ負ノミノモノデアルヲ用フル。何レノ場合ニ於テモ A＝A' ガ S ノ最大値ノ必要条件デアル。

3.4. 本論ノ第三ノ部分ニ於ケル γ=2 ノ場合ニ使ハネバナラナイノダガ上述ノ 1) ノ方法ヲ適用シテミルコトニスル。D ト D' トガ重複ナキ限リ凡テノ偏差 $x_i - x_j$ ハ同符号デ然モ A−A' ノ符号ニ等シイ。然シ乍ラモシモ重複ガアルナラバ或偏差ハ A−A' トハ異符号ヲ持ツ。コノコトカラ Gini ハ "transvariation" ナル概念ヲ得タ。

彼ハコノ諸ヲ $\bar{X}-\bar{X}'$ ト異符号ナル偏差 x_i-x_j' ニ適用シタ。$\bar{X}$, $\bar{X}'$ ナル記号ハ前以テ明確ニ得ラレタ或平均値ヲ表ハス記号デアル。ソシテ彼ハ偏差ノ大イサヲソノ "intensity" ト名ヅケタ。計算ヲ簡単ニスル為ニ絶対値ヲ用ヰタ一次ノ complete moment ヲ計算スル時、X ト X' トガ同ジ原点デアルト仮定スル。ソレ故 X カラ "ダッシユ(')" ヲ除クガ F カラハ勿論除カナイ。モシモ或 X ノ値ガ第一次分布ニアッテ他ノ分布ニ無ケレバ、第二ノ分布ニ於テソノ X ニ対応スル度数ヲ 0 ト考ヘレバヨイ。カヤウニシテ二ツノ分布ガ同ジ総範囲ニ亘ル如ク拡張シタト考ヘル。モシ X_1 ト X_m トガ範囲ノ両端ヲ示スナラバ sliding total moment ハ

$$|M_1(D,X_j)| = F_j'\left[\sum_{i=1}^{j-1}(X_j-X_i)F_i+\sum_{i=j}^{m}(X_i-X_j)F_i\right]$$

$$=F_j'X_j\left(\sum_{i=1}^{j-1}F_i-\sum_{i=j}^{m}F_i\right)-F_j'\left(\sum_{i=1}^{j-1}F_iX_i-\sum_{i=j}^{m}F_iX_i\right)$$

j ニ関シテ和ヲトリ (2.33) ノ代入式或ハソレラノ変形式ヲ用フルト complete aggregate moment ニ対スル次ノヤウナモウ一ツノ式ガ得ラレル。

(3.41) $$|{}^c\mathfrak{M}_1| = M_1M_0'-M_0M_1'+2\sum_{j=1}^{m}\left[F_j'X_j\sum_{i=1}^{j-1}F_i\right]-2\sum_{j=1}^{m}\left[F_j'\sum_{i=1}^{j-1}F_iX_i\right]$$

(3.42) $$|{}^c\mathfrak{M}_1| = M_0M_1'-M_1M_0'-2\sum_{i=1}^{m}\left[F_i'X_j\sum_{i=j}^{m}F_i\right]+2\sum_{j=1}^{m}\left[F_j'\sum_{i=j}^{m}F_iX_i\right]$$

実際 (3.41) ノ式ノ特別ノ場合ナル (2.34) 式ニ対スルコノ形ノ第一ノ類似点ニ注目シヤウ。
(3.42) 式カラ特別ノ場合トシテ次式ヲ得ル。

（2.34 a）

$$|\mathfrak{M}_1| = 2\sum_{j=1}^{n}\left(F_j \sum_{i=j}^{n} F_i X_i\right) - 2\sum_{j=1}^{n}\left(F_j X_j \sum_{i=j}^{n} F_i\right)$$

之ハ（2.34）ト同等デアル

二ツノ分布ニ重複ガナケレバ $|\mathfrak{M}_1|$ ハ ${}^c\mathfrak{M}_1$ ト数値ヲ異ニスル。実際ニ重複ガアリ、0デナイ度数ノ範囲ガ D デハ X_1 カラ X_{n+p} マデ、D′ デハ X_{n+1} カラ X_m マデ拡張サレテアル場合ヲ考ヘレバ、（3.42）ハ消失スル項ヲ除クト次ノ様ニナル

（3.43）

$$|{}^c\mathfrak{M}_1| = M_0M_1' - M_1M_0' - 2\sum_{j=n+1}^{n+p}\left[F_j' X_j \sum_{i=n+1}^{j-1} F_i\right] + 2\sum_{j=n+1}^{n+p}\left[F_j' \sum_{i=j}^{n+p} F_i X_i\right]$$

他方（3.41）式ハ同ジ条件ノ下デ（2.33）ノ代入式ヲ用ヰテ簡約スルト更ニ簡単ナ式ニナル

$$|{}^c\mathfrak{M}_1| = M_0M_1' - M_1M_0' + 2\sum_{j=n+1}^{n+p}\left[F_j' X_j \sum_{i=n+1}^{j-1} F_i\right] - 2\sum_{j=n+1}^{n+p}\left(F_j' \sum_{i=j}^{n+p} F_i X_i\right)$$
$$- 2\sum_{j=n+1}^{n+p} F_j' X_j \sum_{i=n+1}^{n+p} F_i + 2\sum_{i=n+1}^{n+p} F_i + 2\sum_{j=n+1}^{n+p} F_j' \sum_{i=n+1}^{n+p} F_i X_i$$

此ノ結果ハ代入式（2.33）ヲ直接ニ（3.43）式ニ用ヰレバ稍容易ニ導ケヨウ。（3.44）ハ二ツノ分布ガ同一デアルナラ互ニ相殺シ合フ項ガアルタメ（2.34）[illegible] ノ形ニナル。併シ乍ラ（3.44）ハ多数ノ項ヲ含ムカラ（3.43）ニ比較スルト不満足ナ結果デアル。（2.34）ニモツトヨク似タ式ヲ得ルニハ（3.43）式中ノ和ノ順序ヲ変更スレバヨイ。$j=i$ ニ対スル項ハ全テ消エルカラ

$$|{}^c\mathfrak{M}_{L_1}| = M_0M_1' - M_1M_0'$$
$$- 2\sum_{i=n+1}^{n+p}\left[F_i \sum_{j=n+1}^{i-1} F_j' X_j\right] + 2\sum_{i=n+1}^{n+p}\left[F_i X_i \sum_{j=n+1}^{i-1} F_j'\right]$$

2.8節デ記シタ簡単ナ数値計算法ガ直チニ（3.41）式カラ（3.45）式ニ至ル凡テニ適用サレル。コレラノ式ノ何レデモ ${}^c\mathfrak{M}_0$ デワレバ $|{}^c\mathfrak{M}_1|$ ガ得ラレル。

例ヘバ　（3.43）式ヲ用ヰルト

（3.46）
$$|{}^c\mathfrak{M}_1| = A_1' - A - \frac{2}{M_0M_0'}\left\{\sum_{j=n+1}^{n+p}\left[F_j' X_j \sum_{i=j}^{n+p} F_i\right] - \sum_{i=j}^{n+p}\left[F_j' \sum_{i=j}^{n+p} F_i X_i\right]\right\}$$

[illegible]

[illegible] コノ値ヲ(3.34)式ニ代入スルト所謂 mean coefficient of similarity トシテ

(3.47) $S_1 = \dfrac{m_1 m_1'}{|{}^c m_1|^2}$ ナル量ガ得ラレル。

S_1 ハ大キサガ形ト位置トノ相異ニ関係スル a general measure of similarity ナルコトガ分ル。然シ形ノミヲ問題ニセンガタメ位置ニ関スル要素ヲ除クコトガ望マシイ。ソレガタメニハ $A=A'$ ニ対スル $|{}^c m_1|$ ノ値ヲ積 $m_1 m_1'$ ニ関係ツケレバ十分デアル。実際コノ時ノ $|{}^c m_1|$ ノ値ガ S_1 ノ最小値デソレヲ ${}^e\mu_1$ デ示スト次ノ index ガ得ラレル。

(3.48) $\gamma_1 = \dfrac{m_1 m_1'}{{}^e\mu_1^2}$

コレガ所謂 mean similarity ratio デアル。明ラカニ以上ニ述ベタ index ハ similarity ノミナラズ overlapping ヲモ測ル。二ツノ度数ノ間ノ overlapping ハソレラノ similarity ガ最大ノ時、或ハ $|{}^c m_1|$ ガ最小ノ時ニ最大デアル。

overlapping ニ対スル観点ヲ持ッテ明瞭ニスル為吾々ハ Gini ノ実際ノ観定値ヲ最大値ト比較スル方法デ従ハウ。既ニ示シタ如ク二ツノ分布ノ形ガ保持サレルナラバ相互的位置ヲ変ヘテモ mean similarity ratio デ測定サレタ overlapping

ノ度ハ算術平均ガ一致スル時最大デアル。コノ方法ト次ノ index デ具体的ニ表ハス

(3.49) $\partial_1 = \dfrac{{}^c\mu_1}{{}^cm_1}$

コレガ所謂 "intensity of transvariation of overlapping" デアル。例ヘバ ${}^c\mu_1$ ヲ計算スルニハ単ニ差 $A'-A=c$ ヲ X ノ値ニ加ヘテ D ヲ X 軸ノ方向ニ c ダケ移動スレバヨイ。ソレカラコノ整ヘラレタ X ノ値カラ、普通ノ方法デ $|{}^cm_1|$ ヲ計算ニカヽル。

3.5. (3.11) デ $\gamma=2$ ナラバ

$$M_2(D_2 X_j) = F_j' \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_j)^2 F_i$$
$$= F_j' M_2 - 2X_j' F_j' M_1 + X_j'^2 F_j' M_0$$

j ニツイテ加ヘルト

(3.51) ${}^c\mathfrak{M}_2 = M_0' M_2 - 2M_1' M_1 + M_2' M_0$

second aggregate unit moment ヲ次ノ如ク定義スル ${}^cm_2 = \dfrac{{}^c\mathfrak{M}_2}{{}^c\mathfrak{M}_0}$

スルト

(3.52) ${}^cm_2 = \dfrac{M_2}{M_0} - 2\dfrac{M_1}{M_0}\dfrac{M_1'}{M_0} + \dfrac{M_2'}{M_0} = \sigma^2 + \sigma'^2 + (A-A')^2$

コヽデ σ ト A トハ夫々ノ分布ノ標準偏差及ビ算術平均ヲ示ス。サテ mean square coefficient of similarity ヲ次ノ如キ値トシテ定義スル

(3.53) $S_2 = \dfrac{m_2 m_2'}{{}^cm_2^2}$

重複度ノ最大値ニ対スル必要條件ト同ジク $A=A'$ ガ S_2 ノ最小値ヲ与ヘルコトハ明白。又 $S_2=1$ ナル

時、最モヨク類似スルタメニハ $\alpha=\alpha'$ ヲ要スル。
二ツノ分布ノ間ノ位置ノ相異ニ無関係ナ類似ノ度合(a measure of similarity)ニ対シテ次ノ如ク定義スル。

(3.54) $\gamma_2=\dfrac{m_2 m_2'}{{}^c\mu_2^2}$

コヽニ ${}^c\mu_2$ ハ二ツノ分布ノ形ヲ変ヘナイ時凡ユル位置ニ対スル ${}^c\mu_2$ ノ最小値デコレハ單ニ次ノ様ニ得ラレル。

(3.55) ${}^c\mu_2=\alpha^2+\alpha'^2$

重複ノ度(a moment of overlapping)トシテGini ニ従ッテ ${}^c\mu_2$ ニ対スル ${}^cm_2$ ノ実際ノ値ノ比ヲトル。重複ノ最大値ハ ${}^cm_2$ ノ最小値ニ対應スルカラデアル。依テ

(3.56) $\quad d=\dfrac{{}^c\mu_2}{{}^cm_2}=\dfrac{\alpha^2+\alpha'^2}{\alpha^2+\alpha'^2+(A-A')^2}$

トオクト之ハ所謂 density of overlapping デアル。ソノ最大値ハ1デアル。
(3.5)ニ表ハレタ index ハ(3.4)ノ index ヨリ計算ガシ易イコトニ注意セヨ。個々ノ項ハ二ツノ分布ノ中ノ一ツノ函数デアリ結果ハ原点ノ選ビ方ニ無関係デアル。ソレ故 marked skewness ノ場合ノ算術平均ノ表示ニ関スル不確サニ基ク欠点ガナイ。

4. Positive and negative moments, and moments of transvariation

4.1. 二ツノ分布 D ト D' ノ aggregate sliding total moment ハ次ノ形ニ表ハサレル。

$$(4,11)\quad M_\gamma(D,X_j')=F_j'\sum_{i=1}^{j-1}(X_i-X_j)^\gamma F_i+F_j'\sum_{i=j+1}^{n}(X_i-X_j)^\gamma F_i$$

但シニツノ分布ハ先ニ3.4節デ記シタ如ク必要ニ應ジテ同ジ總範囲ニワタル如ク0ヲ加ヘテ擴張シタノデアル。(4.11)右辺ノ第二項ヲ positive sliding moment, 第一項ノ絶対値ヲ negative sliding moment ト特別ノ名称ヲ附サウ。ソシテ之ラノ moment ヲ $^+M_\gamma(D,X_j)$ ト $^-M_\gamma(D,X_j)$ ト表ハサウ。complete moment ハコレラノ別々ノ項ヲ j ノ取ル總テノ値ノ範囲ニツイテ加ヘ合ハスノダガコレヲ positive and negative aggregate complete moment ト名ヅケヤウ。サウスルト positive complete moment ハ

$$(4,12)\quad {}^{+c}\mathfrak{M}_\gamma=\sum_{j=1}^{m}\left[F_j'\sum_{i=j+1}^{n}(X_i-X_j)^\gamma F_i\right]$$

negative complete moment ハ

$${}^{-c}\mathfrak{M}_\gamma=\sum_{j=1}^{m}\left[F_j'\sum_{i=1}^{j-1}(X_j-X_i)^\gamma F_i\right]$$

コノニツノ moment ノ中ノ一ツ, ソレハ差 X_i-X_j カラ得ラレルモノデアルガ、$\bar{X}-\bar{X}'$ カラ得ラレル moment ト意味ガ異ルトキ、ソレヲニツノ分布ノ moment of transvariation ト名ヅケラレ $^t\mathfrak{M}_\gamma$ デ表ハサレル。コノデスト又トニツイテハ3.4節参照。例ヘバ算術平均ガ平均値トシテ選バレ A−A' ガ正ナラバ negative aggregate moment ガ moment of transvariation ニナル。逆モ亦同様デアル。ニツノ分布ガ同一デアルト云フ簡單ナ場合ニハ positive moment ト negative moment ハ等シイ共ニ aggregate complete moment (奇数次の場合ハ絶対値ヲ用ヒテ計算シ

タモノノ半分ニ等シイ。
unit moment of transvariation ハ次ノ如ク定義サレル。

(4, 14) $^{T}m_r = \dfrac{^{T}\mathfrak{M}_r}{^{T}\mathfrak{M}_0}$

4.2 明ラカニ moments of transvariation ハ measures of overlapping ト考ヘラレル。カクノ如キ moment ハ overlapping ガナイトキ 0 デ二ツノ分布ガ一致シタ時最大トナル。overlapping ノ最大値ヲ 1、最小値ヲ 0 トスルト general measures of overlapping トシテ

(4, 21) $T_r = \dfrac{4\,^{T}m_r^2}{|m_r||m_r'|} = \dfrac{4\,^{T}\mathfrak{M}_r^2}{|\mathfrak{M}_r||\mathfrak{M}_r'|}$

ヲ選ベルガコレハ overlapping ガナイ時 0 デ完全ナ overlapping ノアル時即チ二ツノ分布ガ同一ノ時 1 ニ等シイ。

5. Need for further developments

上ニ記シタ凡テノ measure ハ度数分布 D 及ビ D' トシテ表シタモノデ有限ノ大キサノ集合ノ場合デ定義シテヰル。サテコレラノ大キサノ集合ハ夫夫ニ対応スル母集団カラ抽出シタ見本デアルト考ヘラレル。コレラノ母集団ヲ考ヘルコトハ度数函数ノ形デヨリ一般的ナ式ヲ導ク。ソシテ上ノ measure ハ和ノ形デナク定積分ノ形デ表ハサレル。コレハ上ノ凡テノ measure 特ニ大イサノ有意義性検査ノ必要性ニ注意ヲ引ク。明カニ度数函数ガ近似ノ形デアル時ハイクラカノ overlapping ハ常ニ存在スル。

（太田章 紹介）