Fatou ノ定理ニツイテ

魚返所員

1. $f(\varphi)$ ヲ $(-\pi, \pi)$ デ integrable トシテ次ノ Poisson integral ヲ考ヘル。

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}f(\varphi)\,d\varphi \qquad (1)$$

$$(0 \leqq r < 1)$$

Fatou ニ依レバ z ガ Stolz ノ path ニ沿ッテ $e^{i\varphi}$ ニ tend スルトキホトンド總テノ点デ

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}} u(z) = f(\varphi)$$

ガ成立スル。辻先生ハ z ガ単位円ニ切スル或曲線デカコマレタ domain ノ中カラ $e^{i\varphi}$ ニ tend シテモ同様ノコトガ成立スルヲ證明サレタ[1]。

此処デハ辻先生ノ結果ガ Poisson-Stieltjes integral

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,dF(\varphi) \qquad (2)。$$

$$(0 \leqq r < 1)$$

ニ於テモ成立スルコトヲ示サウ。((2) ニ於テ $F(\varphi)$ ハ有界変分デ $F(2\pi+\varphi) = F(\varphi)+F(\pi)-F(-\pi)$ トスル。) 更ニ上ノ結果ガ "beschränktartig" ナ函数ニツイテモ成立スルコトヲ示ス

2. $F(\varphi)$ ハ有界変分デアルカラ almost everywhere デ $F'(\varphi)$ ガ存在スルカ コノトキ $F(\varphi+t)-tF'(\varphi)$ ノ total variation $V_\varphi(t)$ ハ almost

1) M. Tsuji: On Fatou's theorem on Poisson integral, Japanese journal of mathematics, Vol XV. 1938.

all φ ニ対シテ $o(t)$ $(t \to 0)$ デアル即チ

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \left| d\left(F(\varphi+t)-t\,F'(\varphi)\right)\right| = 0 \qquad (3)$$

之ハ有界変分ノ函数ノ total variation ハ almost everywhere デソノ函数ノ derivative ノ絶対値ニ等シイトイフコトヲ用ヒテ Lesbesque ノ定理ト同様ニシテ証明サレル。

サテ (3) ガ $\varphi = 0$ ニ対シテ証明サレル。即チ

$$G(t) = F(t) - t\,F'(0)$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} |dG(t)| = \delta\,\varepsilon(\delta)$$

トオクトキ

$$\varepsilon(\delta) \longrightarrow 0 \qquad (\delta \longrightarrow 0) \qquad (4)$$

デアルトスル。

$$F'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d(F'(0)\,\varphi)$$

ニ注意シテ

$$u(z) - F'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,dG(\varphi)$$

従ッテ

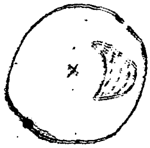
$$|u(z)-F'(0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,|dG(\varphi)|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi|\leqq 2\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{2\delta\leqq|\varphi|\leqq\pi} = I_1 + I_2$$

今次ノ如キ closed domain ヲ考ヘ:

$$1-r = \delta\sqrt{\varepsilon(2\delta)}, \quad |\theta| \leqq \delta, \quad (0 \leqq \delta \leqq \delta_0) \qquad (5)$$

$z = re^{i\theta}$ ガコノ domain ノ中カラ $z = 1$ ニ近ヅクトスル。



次ニ

$$1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\pi-\theta}{2}$$

ナル identity カラ

$$1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2\geqq(1-r)^2 \qquad (6)$$

又 $2|\theta|\leqq 2\delta\leqq|\varphi|\leqq\pi$ ニ対シテハ (5) カラ

$$\left|\frac{\varphi}{4}\right|\leqq\left|\frac{\varphi-\theta}{2}\right|<\pi$$

従ッテ $\frac{1}{2}\leqq r<1$ ニ対シテ

$$1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2\geqq\sin^2\frac{\pi-\theta}{2}\geqq\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$\geqq a\varphi^2 \qquad (7)$$

$$(a=\mathrm{const})$$

次ニ (4) カラ任意ノ φ ニ対シテ

$$\left|\int_0^{\varphi}|dG(t)|\right|\leqq K|\varphi| \qquad (8)$$

ガ成立スル constant K ガ存在スル

之デ I_1, I_2 ヲ評價スル道具ハソロッタ

辻先生ノヤリ方ニ従ッテ、(4)(5)(6) カラ

$$I_1\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi|\leqq 2\delta}\frac{1-r^2}{(1-r)^2}|dG(\varphi)|$$

$$\leqq\frac{1}{\pi(1-r)}\int_{|\varphi|\leqq 2\delta}|dG(\varphi)|=\frac{2}{\pi}\sqrt{\varepsilon(2\delta)}\longrightarrow 0$$

$$(\delta\to 0)$$

(4)(7)(8) カラ

$$I_2\leqq\frac{1-r}{\pi-a}\int_{2\delta\leqq|\varphi|\leqq\pi}\frac{|dG(\varphi)|}{\varphi^2}$$

$$\leqq\frac{1-r}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{2^n\delta}^{2^{n+1}\delta}\frac{|dG(\varphi)|}{\varphi^2}+\int_{-2^{n+1}\delta}^{-2^n\delta}\frac{|dG(\varphi)|}{\varphi^2}\right)$$

$$\leqq\frac{1-r}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}\delta^2}\left(\int_0^{2^{n+1}\delta}|dG(\varphi)|+\int_{-2^{n+1}\delta}^{0}|dG(\varphi)|\right)$$

$$\leqq \frac{2(1-r)K}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\delta}{2^{2n}\delta^{2}} = \frac{2K}{\pi a}\cdot\frac{1-r}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{4K}{\pi a}\sqrt{\varepsilon(2\delta)} \longrightarrow 0 \qquad (\delta \to 0)$$

即チ

$$u(Z) - F'(0) \longrightarrow 0 \qquad (\delta \to 0)$$

カクテ次ノ定理ヲ得ル

定理 I　モシ $\int_{-\delta}^{\delta}|dG(t)| = \delta\varepsilon(\delta)$, $\varepsilon(\delta)\to 0$ as $\delta \to 0$, ナラバ $Z = re^{i\theta}$ ガ curve $1-r = \theta\sqrt{\varepsilon(2\theta)}$ デカコマレタ domain ノ中カラ $Z=1$ ニ近ヅクトキ一様ニ $u(Z) \longrightarrow F'(0)$ デアル。

定理 II　單位円ニ切スル或曲線ニヨッテカコマレタ domain ノ中カラ Z ガ $e^{i\varphi}$ ニ近ヅクトキ almost all φ ニ対シテ Poisson-Stieltjes Integral $u(Z)$ ハ $F'(\varphi)$ ニ收斂スル

3.　$|Z|<1$ デ regural, bounded ナ函数 $f_1(Z)$ ハソノ real part モ imaginary part モ Poisson Integral デ表サレルカラ定理 II ガ $f_1(Z)$ ニツイテモ成立スル。

次ニ $f_2(Z)$ ヲ $|Z|<1$ デ regular デソノ real part ガ $\geqq 0$ ナル函数トスレバ linear transformation $l(w)$ ヲ適当ニトリ $l(f_2(Z))$ ガ bou[illegible] ヤウニ出来ル。従ッテ $f_2(Z)$ ニ対シテモ定理 II ガ成立ツ。

但シコノトキハ limiting value ハ ∞ ニナリ得ル、然シ $\log|f_2(Z)+1|$ ハ harmonic デ $\geqq 0$ ナル故 Poisson Stieltjes Integral デ表ハセル、従ッテ定理 II カラ $f_2(Z)$ ハ almost every where デ有限ナ limiting

value ヲ持ツコトニナル
サテ$f(z)$ヲ$|z|<1$デ有理型デソノ characteristic function $T(r)$ガ有界デアルトスル (beschränktartig)。コノトキハ

$$f(z)=\frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z+e^{i\varphi}}{z-e^{i\varphi}}dF(\varphi)+i\lambda}$$

デ表ハサレル。[2] ココニπ_1, π_2ハ Blaschke products デ$|\pi_i(z)|\leqq 1$ $i=1.2$，$F(\varphi)$ハ有界変分 λハ real constant デアル。
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z+e^{i\varphi}}{z-e^{i\varphi}}dF(\varphi)$ハ real parts $\geqq 0$ナルニツノ regular ナ函数ノ差トシテ表ハサレル。又 Blaschke product ハ almost every where デ絶対値ガ1デアルヤウナ limiting value ヲ持ツコトカラ結局 beschränktartig ナ函数ニツイテモ定理 II ガ成立スルコトガワカル。

2) R. Nevanlinna: Eindeutige Analytische Functionen: VII

(63)