論文紹介 I

Frederick V. Waugh 及 Paul S. Dwyer

逆行列の簡単な計算法

(Compact Computation of the inverse of a Matrix)

The Annals of Mathematical Statistics. Vol. XVI, No. 3.

(September, 1945)

1 Gauss の方法.

先づ最初に Gauss の正規方程式を解く方法を行列論的に見透してある。その要点を次の定理1として紹介する

定理 1:

$$(1)\quad \alpha = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とするとき、次の方法に依つて行列 B を作る。

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} b_{r1} = \dfrac{a_{r1}}{a_{11}}, & r = 2, 3, \cdots, n \\ a_{2k}(1) = a_{2k} - b_{21} a_{1k}. & k = 2, 3, \cdots, n \\ b_{r2}(1) = \dfrac{a_{r2} - b_{r1} a_{r2}}{a_{22\cdot 1}}, & r = 2, 3, \cdots, n \\ \cdot & \\ a_{3k\cdot(2)} = a_{3k} - b_{31} a_{1k} - b_{32\cdot 1} a_{2k\cdot 1} & \\ & k = 3, 4, \cdots, n \\ b_{r3}\cdot(3) = \dfrac{a_{r3} - b_{r1} a_{13} - b_{r2\cdot 1} a_{23\cdot 1}}{a_{33\cdot(2)}} & \\ & r = 3, 4, \cdots, n \end{array}\right.$$

一般に

$$(3)\left\{\begin{array}{l} a_{rk\cdot(j)} = a_{rk\cdot(j-1)} - \dfrac{a_{jk\cdot(j-1)} \cdot a_{rj\cdot(j-1)}}{a_{jj\cdot(j-1)}} \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \qquad a_{rk\cdot(0)} = a_{rk}. \\ b_{rk\cdot(j)} = \dfrac{a_{rk\cdot(j)}}{a_{kk\cdot(j)}} \end{array}\right.$$

$$(4)\quad \mathfrak{b}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22\cdot1} & a_{23\cdot1} & \cdots\cdots & a_{2n\cdot1} \\ b_{31} & b_{32\cdot1} & a_{33\cdot(2)} & \cdots\cdots & a_{3n\cdot(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2\cdot1} & b_{n3\cdot(2)} & \cdots\; b_{nn-1\cdot(n-2)} & a_{nn\cdot(n-1)} \end{pmatrix}$$

さうして，今

$$(5)\quad S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32\cdot1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2\cdot1} & b_{n3\cdot(2)} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{t}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22\cdot1} & a_{23\cdot1} & \cdots & a_{2n\cdot1} \\ 0 & 0 & a_{33\cdot1} & \cdots & a_{3n\cdot1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{nn\cdot(n-1)} \end{pmatrix}$$

なる二つの行列を作れば

$$(6)\qquad \mathfrak{a}=S\,\mathfrak{t}$$

である。

證明：證明は少し詳しく書いて見よう。

$$(7)\quad \mathfrak{t}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と書くと

$$S_1t_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{21}a_{12} & \cdots\cdots & b_{21}a_{1n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_{n1}a_{12} & \cdots\cdots & b_{n1}a_{1n} \end{pmatrix}$$

となるから，之を $\mathfrak{A}$ から引き去ると．

$$(8)\quad \mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{A}-S_1t_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_{22\cdot1} & a_{23\cdot1} & \cdots & a_{2n\cdot1} \\ 0 & a_{32}-b_{31}a_{12} & a_{33}-b_{31}a_{13} & \cdots & a_{3n}-b_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}-b_{n1}a_{12} & a_{n3}-b_{n1}a_{13} & \cdots & a_{nn}-b_{n1}a_{1n} \end{pmatrix}$$

次に

$$(9)\quad S_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_{22\cdot1} & a_{23\cdot1} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$t_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & b_{32\cdot1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{3n\cdot1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

とすれば

$$S_2t_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22\cdot1} & a_{23\cdot1} & a_{2n\cdot1} \\ 0 & b_{32\cdot1}a_{22\cdot1} & b_{32\cdot1}a_{23\cdot1} & b_{32\cdot1}a_{2n\cdot1} \\ & & & \\ 0 & b_{n2\cdot1}a_{22\cdot1} & b_{n2\cdot1}a_{23\cdot1} & b_{n2\cdot1}a_{2n\cdot1} \end{pmatrix}$$

(125)

となるから、之を $\mathfrak{a}_1$ から引き去ると

(10) $\mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{a}_1 - s_1 t_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33\cdot(2)} & \cdots & a_{3n\cdot(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}-b_{41}a_{13}-b_{42\cdot1}a_{23\cdot1} & \cdots & a_{4n}-b_{41}a_{1n}-b_{42\cdot1}a_{2n\cdot1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{n3}-b_{n1}a_{13}-b_{n2\cdot1}a_{23\cdot1} & \cdots & a_{nn}-b_{n1}a_{1n}-b_{n2\cdot1}a_{2n\cdot1} \end{pmatrix}$$

之の操作を n 回続けて

(11) $\mathfrak{a} = s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots\cdots + s_n t_n$

となる。而して

$$s = s_1 + s_2 + \cdots\cdots + s_n$$
$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

であって $s_i t_j = 0$, $i \neq j$ は明かであるから

$$\mathfrak{a} = s t$$

である。　　　　(証明終り)

この定理を用いて、$\mathfrak{a}$ の逆行列 $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{c} = (c_{ik})$ を計算するのであるが $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{J}$(単位行列)から

$$st\mathfrak{c} = \mathfrak{J}$$

(12) $t\mathfrak{c} = s^{-1}$

又、$\mathfrak{a}'\mathfrak{c}' = \mathfrak{J}$ であるから

$$t's'\mathfrak{c}' = \mathfrak{J}$$

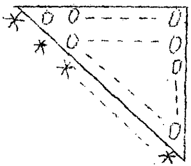
(13) $s'\mathfrak{c}' = (t')^{-1}$

となる。処で s は主対角線の元素が凡べて 1 で、主対角線より上側は全部 0、t' は主対角線の上側の元素は凡べて 0 であるから其の逆行列たる s^{-1}, $(t')^{-1}$ を求

夫々S, $\mathfrak{T}$と同じ型である。
而して実際(12), (13)を書いて
$c_{11}c_{12}\cdots c_{n1}, c_{12}c_{22}, \cdots, c_{n2}, \cdots, c_{1n}c_{2n}\cdots c_{nn}$
なるn^2個の未知量に関する聯立方程式と考へ、(12)からは主対角線の上側

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{matrix}$$

に相当する$\dfrac{n(n+1)}{2}$個を取り、(13)からは



に相当する$\dfrac{n(n-1)}{2}$個を取れば全体としてn^2個の方程式を得て、その左辺の係数の作る行列式は

$$|\mathfrak{T}|^n \cdot |S|^n = |\mathfrak{A}|^n$$

となるから、$|\mathfrak{A}| \neq 0$なる限り之等n^2個の方程式でc_{ik}は定められるのである。
$n=4$のとき説明すれば

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & a_{22.1} & a_{23.1} & a_{24.1} \\ b_{31} & b_{32.1} & a_{33.(2)} & a_{34(2)} \\ b_{41} & b_{42.1} & b_{43.(2)} & a_{44(3)} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{21} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32.1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2.1} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\mathfrak{t}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
0 & a_{22\cdot1} & \cdots & a_{2n\cdot1}\\
\vdots & & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & a_{nn\cdot(3)}
\end{pmatrix}
$$

であるから(12)及(13)は夫々次の如くなる。

$$
(14)\left\{\begin{array}{rcccc}
 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4\\
a_{11}C_{1k}+a_{12}C_{2k}+a_{13}C_{3k}+a_{14}C_{4k}= & 1 & 0 & 0 & 0\\
a_{22\cdot1}C_{2k}+a_{23\cdot1}C_{3k}+a_{24\cdot1}C_{4k}= & * & 1 & 0 & 0\\
a_{33\cdot(2)}C_{3k}+a_{34\cdot(2)}C_{4k}= & * & * & 1 & 0\\
a_{44\cdot(3)}C_{4k}= & * & * & * & 1.
\end{array}\right.
$$

$$
(15)\left\{\begin{array}{rcccc}
 & r=1 & r=2 & r=3 & \\
C_{r1}+b_{21}C_{r2}+b_{31}C_{r3}+b_{41}C_{r4}= & * & 0 & 0 & 0\\
C_{r2}+b_{32\cdot1}C_{r3}+b_{42\cdot1}C_{r4}= & * & * & 0 & 0\\
C_{r3}+b_{43\cdot(2)}C_{r4}= & * & * & * & 0\\
C_{r4}= & * & * & * & *
\end{array}\right.
$$

(14),(15)を解いてC_{ik}を求むれば良いのである。

實例

$$
\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}
26 & -10 & 15 & 32\\
19 & 45 & -14 & -8\\
-12 & 16 & 27 & 13\\
32 & 29 & -35 & 28
\end{pmatrix}
$$

の逆を求むるのに次の如く計算する。

原行列 $\mathfrak{A}$	26	-10	15	32
	19	45	-14	-8
	-12	16	27	13
	32	29	-35	28

次頁へつゞく。

行列 B	$a_{11}=26$	$a_{12}=-10$	$a_{13}=15$	$a_{14}=32$
	$b_{21}=0.73077$	$a_{22\cdot1}=52.308$	$a_{23\cdot1}=-24.962$	$a_{24\cdot1}=31.385$
	$b_{31}=0.46154$	$b_{32\cdot1}=0.21765$	$a_{33\cdot(2)}=39.356$	$a_{34\cdot(2)}=34.600$
	$b_{41}=1.23077$	$b_{42\cdot1}=0.78978$	$b_{43\cdot(2)}=-8.5753$	$a_{44\cdot(3)}=43.071$
C_{ik}	の計算は	別紙にや	る。	
行列 C	0.02873	-0.00696	0.01825	-0.00283
	0.02436	0.01239	0.01440	-0.02267
	-0.02302	0.01572	0.00791	0.01991
	-0.01519	0.00419	-0.02041	0.02322
驗算	1.000	0.000	0.000	0.000
	0.000	1.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	1.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	1.000
餘因子行列	66231	-16045	42072	-6.524
	56157	28563	33196	52261
	-53068	36239	18235	45899
	-35018	9659	-47051	53529

$$\left\{\begin{array}{rcccc} & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 \\ 26C_{ik}-10C_{2k}+15C_{3k}+32C_{4k}= & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 52.308C_{2k}-24.962C_{3k}-31.385C_{4k}= & & 1 & 0 & 0 \\ 39.356C_{3k}+34.600C_{4k}= & & & 1 & 0 \\ 43.071C_{4k}= & & & & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcccc}
 & r=1 & r=2 & r=3 & \\
C_{r1}+0,73077C_{r2}-0.46154C_{r3}+1.23077C_{r4}= & . & 0 & 0 & 0 \\
C_{r2}+0.21765C_{r3}+0.78970C_{r4}= & & & 0 & 0 \\
C_{r3}-8,5753C_{r4}= & & & & 0
\end{array}\right.$$

$$|a2| = a_{11}\cdot a_{22\cdot1}\cdot a_{33\cdot(2)}\cdot a_{44\cdot(3)}$$

$$= 26\times52.308\times39.356\times43.071$$

$$\fallingdotseq 2,305,300$$

である。

以上はGaussの方法の大要であるが，此方法の際には割算が入ってゐるので，$a_{rk\cdot(j)}$ $b_{rk\cdot(j)}$．が既に近似値である。其處で其等の近似値を用ひて求めるC_{ik}も亦、誤差を伴ふもので，その誤差に関しては、Hoteling. Satterthwaiteの論文がある。

Harold Hotelling, "Some new methods in matrix calcution"
Annals of Math. Stat. Vol. 14 (1943).
pp. 1~34.

F. E. Satterthwaite, "Error control in matrix calculation"
Annals of Math. Stat. Vol. 15 (1944)
pp. 373~387.

$$(16)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & B_{22\cdot1} & B_{23\cdot1} & \cdots\cdots & B_{2n\cdot1} \\ a_{31} & B_{32\cdot1} & B_{33\cdot(2)} & \cdots\cdots & B_{3n\cdot(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & B_{n2\cdot1} & B_{n3\cdot(2)} & \cdots\cdots & B_{nn\cdot(n-1)} \end{pmatrix}$$

但し

$$B_{rk\cdot1} = a_{11}a_{rk} - a_{1k}a_{r1}$$

$$B_{rk\cdot(2)} = \frac{B_{22\cdot1}B_{rk\cdot1} - B_{2k\cdot1}B_{r2\cdot1}}{a_{11}}$$

$$(17)\quad B_{rk\cdot(3)} = \frac{B_{33\cdot(2)}B_{rk\cdot(2)} - B_{3k\cdot(2)}B_{r3\cdot(2)}}{B_{22\cdot1}}$$

一般に

$$(18)\quad B_{rk\cdot(j)} = \frac{B_{jj\cdot(j-1)}B_{rk\cdot(j-1)} - B_{jk\cdot(j-1)}B_{rj\cdot(j-1)}}{B_{j-1,\,j-1\cdot(j-2)}}.$$

次の四つのことを証明する。

1° $B_{jj\cdot(j-1)}B_{rk\cdot(j-1)} - B_{jk\cdot(j-1)}B_{rj\cdot(j-1)} \equiv 0 \pmod{B_{j-1,\,j-1\cdot(j-2)}}$

これは(18)を用いて$B_{rk\cdot(j-1)}$を$B_{rk\cdot(j-2)}$で表はせば分る。

2°

$$(19)\quad B_{rk\cdot(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & a_{rk} \end{vmatrix}$$

V31)

$j=3$ として見ると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{2k} \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & a_{rk} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{3}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1k} \\ 0 & B_{22\cdot1} & B_{23\cdot1} & B_{2k\cdot1} \\ 0 & B_{32\cdot1} & B_{33\cdot1} & B_{3k\cdot1} \\ 0 & B_{r2\cdot1} & B_{r3\cdot1} & B_{rk\cdot1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{2}} \begin{vmatrix} B_{22\cdot1} & B_{23\cdot1} & B_{2k\cdot1} \\ B_{32\cdot1} & B_{33\cdot1} & B_{3k\cdot1} \\ B_{r2\cdot1} & B_{r3\cdot1} & B_{rk\cdot1} \end{vmatrix} = \frac{1}{B_{22\cdot1}} \begin{vmatrix} B_{33(2)} & B_{3k\cdot(2)} \\ B_{r3(2)} & B_{rk\cdot(2)} \end{vmatrix}$$

$$= B_{rk\cdot(3)}.$$

一般の場合には

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j} & a_{2k} \\ \multicolumn{3}{c}{- - - - - - - - -} \\ a_{j1} & a_{j2} \cdots a_{jj} & a_{jk} \\ a_{r1} & a_{r2} \cdots a_{rj} & a_{rk} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{j-1}} \left| B_{rk\cdot1} \right| = \frac{1}{B_{22\cdot1}^{j-1}} \left| B_{rk\cdot(2)} \right|$$

$$= \frac{1}{B_{33\cdot(2)}^{j-3}} \left| B_{rk\cdot(3)} \right| = \cdots = \frac{1}{B_{j-1\cdot j-1\cdot(j-2)}} \left| B_{rk\cdot(j-1)} \right| = B_{rk\cdot(j)}.$$

3°

$$(20) \quad \frac{B_{rk\cdot(j)}}{a_{rk\cdot(j)}} = \frac{a_{11} a_{22\cdot1} a_{33\cdot(2)} \cdots a_{jj\cdot(j-1)} a_{rk\cdot(j)}}{a_{rk\cdot(j)}}$$

$$= B_{jj\cdot(j-1)}$$

又

(21) $$\frac{B_{rk\cdot(j)}}{b_{rk\cdot(j)}} = \frac{a_{11}\,a_{22\cdot1}\,a_{33\cdot(2)}\cdots a_{jj\cdot(j-1)}\,a_{rk\cdot(j)}}{\dfrac{a_{rk\cdot(j)}}{a_{kk\cdot(j)}}}$$

$$= B_{kk\cdot(j)}.$$

故に

(22) $$B_{rk\cdot(j)} = B_{jj\cdot(j-1)}\,a_{rk\cdot(j)}$$

$$B_{rk\cdot(j)} = B_{kk\cdot(j)}\,b_{rk\cdot(j)}.$$

4°. 従って今

$$\mathfrak{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a_{11} & & \\ & & B_{22\cdot1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & B_{n-1,n-1\cdot(n-2)} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{M}_S = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & B_{22\cdot1} & \\ & & \ddots \\ & & & B_{nn\cdot(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & B_{22\cdot1} & \cdots & \cdots & B_{2n\cdot1} \\ 0 & 0 & B_{33\cdot(2)} & \cdots & B_{3n\cdot(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn\cdot(n-1)} \end{pmatrix}$$

(1.33)

$$\mathfrak{S} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & - & - & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & - & - & 0 \\ a_{31} & B_{32\cdot1} & 1 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & B_{n2\cdot1} & B_{n3\cdot(2)} & - & - & 1 \end{array}\right.$$

と、おけば

(23) $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}_T t, \quad \mathfrak{S} = s\,\mathfrak{M}_s$

(24) $\mathfrak{a} = st = \mathfrak{M}_s^{-1}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{M}_T^{-1}$

$\mathfrak{a}$の餘因子行列を$\mathfrak{D} = (d_{ik})$とすれば

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{D} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{J}$$

$$st\,\mathfrak{D} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{J}$$

$$t\,\mathfrak{D} = |\mathfrak{a}|\,s^{-1}$$

$$\mathfrak{M}_T\,t\,\mathfrak{D} = \mathfrak{M}_T\,|\mathfrak{a}|\,s^{-1}$$

$$\mathfrak{T}\,\mathfrak{D} = \mathfrak{M}_T\,|\mathfrak{a}|\,s^{-1}$$

(25) 同様にして

$$\mathfrak{a}'\,\mathfrak{D}' = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{J}$$

$$t'\,s'\,\mathfrak{D}' = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{J}$$

$$s'\,\mathfrak{D}' = |\mathfrak{a}|\,(t')^{-1}$$

$$\mathfrak{M}_{s'}\,s'\,\mathfrak{D}' = \mathfrak{M}_s\,|\mathfrak{a}|\,(t')^{-1}$$

(26) $\mathfrak{S}'\,\mathfrak{D}' = \mathfrak{M}_s\,|\mathfrak{a}|\,(t')^{-1}$

(25)(26)の方程式に於て 1. と同様に右辺の 0,1 に対する n^2 個の方程式を聯立させて d_{ik}

を求めれば良い。

$n=4$ と書けば

(27)

$$\left\{\begin{array}{llllll}
a_{11}d_{1k}+a_{12}d_{2k}+a_{13}d_{3k}+a_{14}d_{4k} & & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 \\
 & = & |\mathfrak{A}| & 0 & 0 & 0 \\
B_{22\cdot1}d_{2k}+B_{23\cdot1}d_{3k}+B_{24\cdot1}d_{4k} & & & & & \\
 & = & * & a_{11}|\mathfrak{A}| & 0 & 0 \\
B_{33\cdot(2)}d_{3k}+B_{34\cdot(2)}d_{4k} & & & & & \\
 & = & * & * & B_{22\cdot1}|\mathfrak{A}| & 0 \\
B_{44(3)}d_{4k} & = & * & * & * & B_{33\cdot(2)}|\mathfrak{A}|
\end{array}\right.$$

(28)

$$\left\{\begin{array}{llllll}
 & & r=1 & r=2 & r=3 & r=4 \\
a_{11}d_{r1}+a_{21}d_{r2}+a_{31}d_{r3}+a_{41}d_{r4} & = & * & 0 & 0 & 0 \\
B_{22\cdot1}d_{r2}+B_{32\cdot1}d_{r3}+B_{42\cdot1}d_{r4} & = & * & * & 0 & 0 \\
B_{33\cdot(2)}d_{r3}+B_{43\cdot(2)}d_{r4} & = & * & * & * & 0
\end{array}\right.$$

實 例

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} 26 & -10 & 15 & 32 \\ 19 & 45 & -14 & -8 \\ -12 & 16 & 27 & 13 \\ 32 & 29 & -35 & 28 \end{pmatrix}$$

の餘因子行列の計算

135)

原行列 a	26 19 -12 32	-10 45 16 29	15 -14 27 -35	32 -8 13 28
(16)の行列	26 19 -12 32	-10 1360 296 1074	15 -649 53524 -45899	32 -816 47056 2305327
行列 D.	66233 56151 -53068 -35013	-16033 28558 36236 9659	42069 33194 18224 -47056	-6503 -52258 45899 53524
験算行列 $\|a\|J$	2305327 0 0 0	0 2305327 0 0	0 0 2305327 0	0 0 0 2305327
逆行列 t	0.02873 0.02436 -0.02302 -0.01519	-0.00695 0.01239 0.01572 0.00419	0.01825 0.01440 0.00791 -0.02041	-0.00282 -0.02267 0.01991 0.02322

以上（小川潤次郎 紹介）.