

論文紹介 7.

" 劣調和函数の極限 = ツイテ "

Rec. math. Soc. math. Moscou 1936 甲 = 第 17 号
 #11 Privaloff の論文

"Граничные задачи теории гармонических
 и субгармонических функций в пространстве
 (Les problèmes limites de la théorie des
 fonctions harmoniques et sousharmoniques
 dans l'espace.) 甲) 劣調和函数 (субгармониче-
 ский функции) = 属スル部分ヲロシア語; 勉強カタカタ
 速ベテ見ル。

§ 1. <リ>-n 函数, 評価 (Оценки для функций
 Трикса)

$$g(P; Q) = g(x_1, x_2, \dots, x_p; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) \\
= g(\gamma, \theta, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}; \rho_1, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{p-1})$$

=ヨリ、 P 次元 ($p \geq 3$) 空間内、單位球ニ対スル<リ>-n 函数ヲ表ハス。

良ク知ラレテキル如ク、球内部、真 $P = 1$ 対シ函数 g 、領域 $\rho < 1$ = 属スル凡テ、真 Q テ正トナリ、球面 $\rho = 1$ 上テ一概ニ零トナル。

尚、函数 g 、球 $\rho < 1$ 内テ、真 $Q = P$ ヲ除キ各真 Q 調和 (гармонический) テ、 $Q = P$ テハ、 g 、 $P-2$ 次、極 (полюс) ヲ持ツ。

明ヲカニ、函数 g ハ

$$f(P, Q) = \frac{1}{PQ^{p-2}} - \left(\frac{OO'}{Q^*P} \right)^{p-2}$$

ナル形ニ表サレル。但シ、 Q^* 、單位球ニ付スル長 Q 、対称點ニ付スル。又、零記号、 $\delta = 1 - \beta$ 、 $\beta = 1 - \rho$ 、 $\angle POQ = \gamma$ ヲ導入シ、 A, A_1, A_2, \dots ニヨリ、 $\rho = \dots$ ニ依存スル正ノ常數ヲ表シテコトニスル。

「函数 $f(P; Q)$ 、(球内ノ點 P, Q ニ付シ) 凡クノ長 $Q = \dots$ ニ付テカノ不等式

$$0 < f(P; Q) < \frac{A\delta^2}{[(\delta - \beta)^2 + \gamma^2]^{\frac{p}{2}}} \quad (\delta < \frac{1}{2}) \quad (1)$$

$$0 < f(P; Q) < \frac{A}{[(\delta - \beta)^2 + \gamma^2]^{\frac{p-2}{2}}} \quad (\delta < \frac{1}{2}) \quad (2)$$

$$f(P; Q) > R(1 - \rho) \quad (3)$$

ヲ満足スル。但シ長 Q 、點 P 及 Q ニ付テカノ長 $Q = \dots$ ニ依存スル。

(1)ノ証明ニハ

$$\begin{aligned} f(P; Q) &= \frac{1}{PQ^{p-2}} - \frac{1}{(P \cos^2 \gamma)^{p-2}} \\ &= \frac{1}{(\gamma^2 + \beta^2 - 2\gamma\beta \cos \gamma)^{\frac{p-2}{2}}} - \frac{1}{(\gamma^2 \beta^2 + 1 - 2\gamma\beta \cos \gamma)^{\frac{p-2}{2}}} \\ &= \frac{1}{D^{p-2}} - \frac{1}{D'^{p-2}} \end{aligned}$$

ヲ考ヘル。

コトニ付 $D = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2 - 2\gamma\beta \cos \gamma}$ 、 $D' = \sqrt{\gamma^2 \beta^2 + 1 - 2\gamma\beta \cos \gamma}$ トシ、尚且

$$\begin{aligned} f(P; Q) &= \frac{1}{D^{p-2}} - \frac{1}{D'^{p-2}} = \frac{D'^{p-2} - D^{p-2}}{(DD')^{p-2}} \\ &= \frac{(D'^2 - D^2)(D'^{p-3} + D'^{p-4}D + \dots + D^{p-3})}{(DD')^{p-2}(D + D')} \end{aligned}$$

303.

$D < D'$ であるから

$$f(p, \theta) < \frac{(1-\gamma^2)(1-\beta^2)(p-2)D^{\beta-3}}{2D^{\beta-1}D^{\beta-2}}$$

$$= \frac{(1-\gamma^2)(1-\beta^2)(p-2)}{2D^{\beta-1}D'} < \frac{(1-\gamma^2)(1-\beta^2)(p-2)}{2D^{\beta}}$$

他方

$$D^2 = \gamma^2 + \beta^2 - 2\gamma\beta\cos\theta = (\delta - \epsilon)^2 + 4\gamma(1-\epsilon)\sin^2\frac{1}{2}\theta,$$

である。

然るに $\gamma > \frac{1}{2}$ (又ハ $\delta < \frac{1}{2}$) なる故ニ $\epsilon \leq \frac{3}{4}$ なる場合ニハ 不等式

$$D^2 \geq (\delta - \epsilon)^2 + A_1\gamma^2 \geq A_2[(\delta - \epsilon)^2 + \gamma^2]$$

ヲ得ル。 $\epsilon > \frac{3}{4}$ なる場合ニハ

$$D^2 > (\delta - \epsilon)^2 > \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = A_1 \geq A_2(1 + \gamma^2)$$

$$\geq A_3[(\delta - \epsilon)^2 + \gamma^2]$$

ヲ得ル。何レノ場合ニ於テモ

$$f(p, \theta) < \frac{A_1(1-\gamma^2)(1-\beta^2)}{D^{\beta}} < \frac{A_1\beta^2}{[(\delta - \epsilon)^2 + \gamma^2]^{\frac{\beta}{2}}}$$

トナリ、不等式(1)ハ証明ナレタ。

不等式(2)ハ

$$f(p, \theta) < \frac{1}{D^{\beta-2}}$$

ヲ証明スレバ、他方、既に示シタ $D^2 \geq A_1[(\delta - \epsilon)^2 + \gamma^2]$ ($\delta < \frac{1}{2}$) ナルコトカラ直チニ結論ナレル。

最後ニ、不等式(3)ノ前、(1)ノ一ノ函数ノ変形式トシテ、考察カラ結論ナレル。即チ、

$$f(p, \theta) = \frac{(D'^2 - D^2)(D'^{\beta-3} + D'^{\beta-4}D + \dots + D^{\beta-2})}{(DD')^{\beta-2}(D + D')}$$

$$> \frac{(D'^2 - D^2)D^{\beta-3}}{2D'^2D^{\beta-3}} = \frac{D'^2 - D^2}{2D'} > \frac{(1-\gamma^2)(1-\beta^2)}{2D^{\beta}}$$

$$D'^2 = \gamma^2\beta^2 + 1 - 2\gamma\beta\cos\theta < (\gamma + 1)^2$$

↑ルコトカラ
$$f(p, \alpha) = \frac{(1-\gamma^2)(1-p)}{2(1+\gamma)^{\frac{p}{2}}} = k(1-p)$$

ヲ得ル。

コトニ、 $k = \frac{1-\gamma}{2(1+\gamma)^{\frac{p-2}{2}}}$ 然レ及ビ、次元 $p=1$ ニ依リ

スル。

§2. 基礎定理 (Основная лемма)

↑ $k(\gamma) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \gamma \leq \pi$ (k/π) 有限トス。 是於テ、
單調増大テ $p \geq 2$ 是ヲシ

條件
$$\lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{k(\gamma)}{\gamma^{p-1}} \leq C \quad (4)$$

コトヲ足スルモノトスルト、次ノ關係ヲ成立スル。

$$\lim_{S \rightarrow +0} S \int_0^S \frac{dk(\gamma)}{(S^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}} \leq AC \quad (5)$$

$$\lim_{S \rightarrow +0} S \int_{S-0}^{\pi} \frac{dk(\gamma)}{\gamma^p} \leq AC \quad (6)$$

何トナレバ、(5) = 是ヲシテ

$$\begin{aligned} S \int_0^S &= S \left[\frac{k(\gamma)}{(S^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}} \right]_0^S + p S \int_0^S \frac{k(\gamma) \gamma d\gamma}{(S^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}+1}} \\ &\leq C + p S \int_0^S \frac{C \gamma^{p+0} (\gamma^p)}{(S^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}+1}} d\gamma = C + p \int_0^S [C + o(1)] \frac{\gamma^p d\gamma}{(S^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}+1}} \\ &= C + p \int_0^1 [C + o(1)] \frac{x^p dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} = AC + o(1) \end{aligned}$$

コレハ、不等式(5)ヲ示ス

(6) = 是ヲシテハ

$$S \int_{S-0}^{\pi} = S \left[\frac{k(\gamma)}{\gamma^p} \right]_{S-0}^{\pi} + p S \int_S^{\pi} \frac{k(\gamma) d\gamma}{\gamma^{p+1}} \leq S \frac{k(\pi)}{\pi^p} +$$

$$p\delta \int_0^\pi \frac{c\delta^{p-1} + o(\delta^{p-1})}{\gamma^{p+1}} d\gamma < o(1) + pC + p\delta \int_0^\pi \frac{o(\delta^{p-1})}{\gamma^{p-1}} d\gamma$$

$0 < \delta \leq \varepsilon$ に対シテ 不等式 $\frac{o(\delta^{p-1})}{\gamma^{p-1}} < C$ 是 万足スル如ク

十分 $\varepsilon > 0$ ヲ 小サクテ

$$p\delta \int_0^\pi \frac{o(\delta^{p-1})}{\gamma^{p+1}} d\gamma = p\delta \int_0^\varepsilon \frac{o(\delta^{p-1})}{\gamma^{p+1}} d\gamma + p\delta \int_\varepsilon^\pi \frac{o(\delta^{p-1})}{\gamma^{p+1}} d\gamma$$

$$< pC + \frac{p\delta\pi}{\varepsilon^{p+1}} \max o(\delta^{p-1}) = pC + o(1)$$

其故 = 確カ =

$$\int_0^\pi \frac{d h(\gamma)}{\gamma^p} < o(1) + pC + pC + o(1) = 2pC + o(1)$$

ヲ得ル。コレハ 不等式 (6) ヲ示ス。

§ 3. Green 17° 28' 33" (Romenyuan Tsurua)

是ク知ラレテナル如ク、 $p \geq 2$ 次元空間ノ 單位球内テ
harmonic majorant ヲモツ任意ノ 劣調和函数 $u(P)$ ハ

$$u(P) = - \int g(P; Q) d\mu(Q) + h(P) \quad (7)$$

ナル形ニ表サレ得ル。(Radó; subharmonic functions, p. 45 参照) コレ $= h(P)$ 球 $\gamma < 1$ 内, $u(P)$ the best harmonic majorant 也。コレノ球ノ領域ニ 拡張セラレル 中重積分ハ Stieltjes, 意味ニ了解セラレル事トスル。

此ノ公式 (7) ニヨリ、其 P ノ半径 $=$ 沿ッテ境界点 $\gamma = 1$ 至ル際ノ 劣調和函数ノ 状態ノ 研究ハ 調和函数 $h(P)$ 及ビ 中重積分ニ表サレ、Green 17° 28' 33" 是 對スル 適當ナル 研究ニ 帰スル。
 $p = 2$ 是 對シテハ、ヨリ 適當ニ 研究ヲ行ヒ得ルガ、此ノ論文デハ 次ノ 定理ノ 結果ヲ 証明スルコトニヨリ、 $p \geq 3$ 是 對スル此ノ

問題ヲ解カウト思フ。即チ

「^{Green}ポテンシャル函数

$$w(P) = \int \gamma(P; Q) d\mu(Q) \quad (8)$$

ハ、点 $P(\gamma; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1})$ ガ半径 = γ ヲテ球面上ノ点
 $(1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}) = \text{近ツク時}$, 殆ント凡テ、球面上ノ点
 $\gamma = 1 - \epsilon$ 対シテ零 = 近ツク」

此ノ定理ノ証明、爲 = 函数論カラ、有名ノ一ツノ補助定理ヲ
 利用スル。予メ、ソレヲ述ベル。

$\Phi(w) \geq 0$ ヲ下半連続ヲ單調増加ヲ加法集合函数トスル
 (w ハ任意ノ測集合トスル)

$$\lim_{\text{mes. } w} \frac{\Phi(w)}{\text{mes. } w} = f(Q)$$

ト仮定スル。コト = w ハ中心 Q ノ球ノ存在ヲネス。

$f(Q)$ ガ summable 時 =

$$\Phi(\mathcal{A}) \geq \int_{\mathcal{A}} f(Q) d\mu$$

トナル。コト = \mathcal{A} ハ全球面ヲネス。

Green 函数 = 關スル此ノ章ノ主要問題ノ研究 = 成ラウ。

$$\text{先ツ} \int (1-\rho) d\mu(Q) < +\infty \quad (9)$$

ナルコト = 注意スル。コノコトハ、定點 $P = \text{対シテ凡テ}$ 、点 Q
 = 対シテ $\gamma(P; Q) > \text{長}(1-\rho)$ ナルコト = 注意スレバ、積分(8)
 ノ存在カラ結論サレル。コト = 長ハ $\rho \leq 1$ = 定ツテ如ク $P = 1$ 上
 依存スル。 $\rho = 1 - \rho$ 時

$$E(\rho_0) = \int_{\rho > \rho_0} \rho d\mu \quad (10)$$

ト置カト、(9) = ヲツテ $\lim_{\rho_0 \rightarrow 1} E(\rho_0) = 0$

$$\gamma(\rho_0) = \int E(\rho_0) \quad \text{トオキ}$$

$$\overline{\lim}_{\rho > \rho_0} \int f d\mu \leq A \psi(\rho_0) \quad (11)$$

ナル式が

測度 (Measure) が $\geq \text{mes } \mathcal{N} - \psi(\rho_0)$ ナル集合 $E = E(\rho_0)$ 凡テ、 $\mathcal{N} = \mathcal{N}$ ナル、 ρ が半径 = 沿ッテ 集合 E ノ \mathcal{N} 上ニ近ツク時、上極限、下 = 成立フルコトヲ示サウ。

凡テ、球面上、 $\mathcal{N} = \mathcal{N}$ ナル、 $\lim_{\rho \leq \rho_0} \int f d\mu = 0$ ナル

カラ、不等式 (11)、左辺ハ積分範囲ヲ $\rho > \rho_0$ ノ代リ = 全範囲 $\rho < 1$ デオキカヘテモ変ラナイ。サウスルト、不等式 (11)、左辺ハ $\rho_0 = \rho_0$ 依存シナイ。故 = 不等式 (11) ヲ証明シ、 $\psi(\rho_0)$ ハ任意ニホナルコトヲ注意スレバ、此ノ章ノ始メニ述べタ定理ノ真ナルコトガ確メラレル。

以下不等式ノ証明 = カナル。

$\Phi(\epsilon) \int f d\mu$ ト収束スル。コノ = 積分ハ原集ヲ頂集トシテ角 ϵ ヲモツ円錐形、 $\rho_0 < \rho < 1$ ヲ万足スル部分ニ振ゲラレルモノトスル。

明ラカ $\Phi(\epsilon) \geq 0$ ナル、 $\Phi(\epsilon)$ 単調増加デ下半連続 + 加法函数デアリ、上限 $\epsilon(\rho_0)$ ヲモツ。

$$\overline{\lim}_{\text{mes } \mathcal{N}} \frac{\Phi(\mathcal{N})}{\text{mes } \mathcal{N}} = f(\mathcal{Q}) \quad \text{トオクト、補助定理 = 依リテ}$$

summable + $f(\mathcal{Q})$ ナル

$$\Phi(\mathcal{N}) \geq \int_{\mathcal{N}} f(\mathcal{Q}) d\omega$$

ヲ万足スルコトヲ知ル。

$0 \leq f(\mathcal{Q}) \leq \psi(\rho_0)$ ナル如キ集、集合 $E = E(\rho_0)$ ノ測度 $\geq \text{mes } \mathcal{N} - \psi(\rho_0)$ ヲ持ツコトヲ証明シマウ。

何トナレバ $C(E)$ 上テ $f > \psi(\rho_0)$ ナルカラ。

$$\psi^2(\rho_0) = \epsilon(\rho_0) = \Phi(\mathcal{N}) \geq \int_{C(E)} f d\omega \geq \int_{C(E)} \psi(\rho_0) d\omega \geq \text{mes } C(E) \times \psi(\rho_0)$$

上ノ不等式カラ $\text{mes } C(E) \leq \psi(\rho_0)$ ヲ得、結局

$$\text{mes } E \geq \text{mes } \mathcal{N} - \psi(\rho_0) \quad \text{トナル。}$$

力三、 E ノ凡テ、 $\mathcal{A} = \text{於テ}$ 不等式(1)ガ成立ナルコトヲ示サウ
集合 E ノ定義ニ依ツテ、此ノ集合ノ $\mathcal{A} = \text{於テ}$

$$\lim_{\text{mes } \omega} \frac{\Phi(\omega)}{\text{mes } \omega} \leq \psi(\rho_0)$$

ガ成立ナル。スル、此ノ \mathcal{A} ヲ極トシテ γ ヲ球狀形 ω ノ徑トシ

$$\Phi(\omega) = J(\gamma) \quad \text{ト定メルト}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{J(\gamma)}{\gamma^{p-1}} \leq A \psi(\rho_0) \quad (12)$$

ガ成立スル。

今考ヘテ μ ノ $\mathcal{A} = \text{互ル半径上ニアル}$ $\mathcal{A} P$ ヲ考ヘ、 $\mathcal{A} =$

$$\lambda(\gamma) = \int_{\rho, \rho_0} f d\mu \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (13)$$

トオク。コソ $= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ノ夫々次ノ如キ範圍 T_1, T_2, T_3 上ニ
採ガツテ μ ノ積分ニ対応アルモトスル。即チ、

$$(T_1) \quad \rho_0 < \rho < 1, \quad \delta \leq \gamma \leq \pi,$$

$$(T_2) \quad \rho_0 < \rho < 1, \quad |b - \delta| \geq \frac{1}{2}\delta, \quad \gamma < \delta$$

$$(T_3) \quad \rho_0 < \rho < 1, \quad |b - \delta| \leq \frac{1}{2}\delta, \quad \gamma < \delta$$

$T_1 = \text{於テハ}$ § 1, (1) カラ

$$f < \frac{A \delta \delta}{\gamma^p}$$

ヲ得ル。

$$\lambda_1 \text{ 故} = \lambda_1 < A \delta \int_{T_1} \gamma^{-p} d\mu \leq A \delta \int_{\delta \rightarrow 0}^{\pi} \gamma^{-p} dJ(\gamma)$$

$$\text{ニ} \quad \text{故} = (12) \text{ 及 } (6) = \exists \text{ ツテ } \lim \lambda_1 \leq A \psi(\rho_0) \quad (14)$$

$T_2 = \text{於テハ}$ (1) = $\exists \cup \quad f < \frac{A \delta \delta}{(s^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}}$

ヲ得、依ツテ

$$\lambda_2 < A \delta \int_{T_2} \frac{\delta d\mu}{(s^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}} \leq A \delta \int_{+0}^{\delta} \frac{dJ(\gamma)}{(s^2 + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}}$$

3.09

故 = (12) & (15) = 3.09

$$\lim \lambda_2 \leq A_2 \psi(\rho_0) \quad (15)$$

最後 = $T_3 =$ 於テハ (2) = 3.09 $\delta < \frac{A}{\delta^{p-2}} \Rightarrow$ 得ル。

依ツテ

$$\lambda_3 < A \int_{T_3} \frac{\delta d\mu}{\delta \gamma^{p-2}} \leq \frac{A_1}{S} \int_0^\delta \frac{dJ(\delta)}{\gamma^{p-2}}$$

ヲ得ル。此ノ $T_3 =$ 於テ

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\delta}{S} \leq \frac{3}{2}$$

テアルカラ

$$\begin{aligned} \lambda_3 &< \frac{A_1}{S} \int_0^\delta \frac{dJ(\delta)}{\gamma^{p-2}} = \frac{A_1}{S} \left[\frac{J(\delta)}{\gamma^{p-2}} \right]_0^\delta \\ &+ \frac{(p-2)A_1}{S} \int_0^\delta \frac{J(\delta) d\delta}{\gamma^{p-1}} < A_1 \frac{J(\delta)}{\delta^{p-1}} + A_2 \psi(\rho_0) \end{aligned}$$

其故 =

$$\lim \lambda_3 \leq A_3 \psi(\rho_0) \quad (16)$$

(14), (15), (16) = 依ツテ (13) カラ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \lambda(\gamma) \leq A \psi(\rho_0)$$

即チ、此ノ章ノ定理が得ラレタ。

§ 4. 劣調和函数 (Subharmonic function)

{定理} $u(P)$ ヲ $p \geq 2$ 次元空間ノ球 $\overline{op} = \gamma < 1$ 内ニ劣調和知テ、條件

$$\frac{1}{\delta} \int_{\delta} \bar{u}(P) d\delta = 0 \quad (17)$$

ヲ満足スルモノトスル。コノ =、積分ハ任意ノ半径 $\gamma < 1$ ノ球面 δ 上ニ取ルモノトスル。

真 P が半径 = 沿ツテ球面 $\gamma = 1$ 上ノ点 $Q =$ 近ツケ時、殆ンド R テノ点 $Q =$ 付シテ、極限

$$\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = \bar{u}(Q)$$

ガ存在シ、函数 $\bar{u}(Q)$ ノ球面上ニ summable テアル。

[証明]

條件 (17) = ヨリ函数 $u(P)$, 且テ, 球内テ *harmonic majorant* ヲ持ツ。

其故 = 基本公式

$$u(P) = h(P) - \int y(P; Q) d\mu(Q) \quad (18)$$

ヲ用上得ル。

ユ> = $h(P)$ = 各球内ニ於ケル $u(P)$, *the best harmonic majorant* テ, 積分ノ球 $\gamma < 1$ 上ニテ, トルモ, トスル。容易 = 函数 $h(P)$ ノ條件 (17) ヲ満足スルコトガ分ル。

實際

$$h(P; Q) = \frac{1}{\delta} \int_{\delta} u(Q) \frac{(R^2 - \gamma^2) R^{p-2} d\delta}{(R^2 - 2R\gamma \cos \delta + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}} \quad (19)$$

トオケ。ユ> = 積分ノ半径 R , 球面 δ ニ = トルモ, トスル。
 $h(P)$ ノ *the best harmonic majorant* テアルカヲ 且テ,
 且 $P = \delta$ シテ

$$h(P) = \lim_{R \rightarrow 1} h(P; R)$$

トナル。

Fatouノ定理 = ヨツテ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta(\gamma)} \int_{\delta(\gamma)} |h(P)| d\delta &= \frac{1}{\delta(\gamma)} \int_{\delta(\gamma)} \lim_{R \rightarrow 1} |h(P, R)| d\delta \\ &\leq \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1}{\delta(\gamma)} \int_{\delta(\gamma)} |h(P; Q)| d\delta \end{aligned}$$

ト表ハシ得ル。(19) ヲ代入シテ

$$\frac{1}{\delta(R)} \int_{\delta(R)} \frac{(R^2 - \gamma^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2R\gamma \cos \delta + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}} d\delta = 1$$

ナルコト = 注意スレバ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta(\gamma)} \int_{\delta(\gamma)} |h(P)| d\delta &\leq \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1}{\delta(\gamma)} \int_{\delta(\gamma)} d\delta \frac{1}{\delta(P)} \int_{\delta(P)} |u(Q)| \frac{(R^2 - \gamma^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2R\gamma \cos \delta + \gamma^2)^{\frac{p}{2}}} d\delta \\ &= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1}{\delta(R)} \int_{\delta(R)} |u(Q)| d\delta \end{aligned}$$

ナルコトガ分ル

$$(17) = \text{ヨリ} \quad \frac{1}{\delta(P)} \int_{\delta(R)}^+ u(Q) d\delta = o(1)$$

$$\text{ハ、等式} \quad \frac{1}{\delta(R)} \int_{\delta(R)} |u(Q)| d\delta = o(1)$$

ト同等ナル。

其故ニ、公式 (18) 中ノ調和函数 $h(P)$ ハ

$$\frac{1}{\delta(r)} \int_{\delta(r)} |h(P)| d\delta = o(1) \quad (r < 1)$$

ナリ條件ヲ満足スルコトガ証明ナレタ。

此ノ條件ニヨリ調和函数 $h(P)$ ハ恒々ノ球内ノ致ル所デニツ
ノ正ノ調和函数ノ差ノ形

$$h(P) = h_1(P) - h_2(P)$$

ニ表ハサレルコトガ出ル。

公式 (18) = モドリ、 ξ ノ結果ヲ考慮スレバ、モシ正ノ調和
函数ガ球内ノ内デ、球面上ノ殆ント凡テノ真ニ対シテ半径ニ
沿ッテ一定ノ有限ナ且 *summable* + 極限ヲ持ッテラバ此ノ
章ノ初メニ述バタ定理ヲ完全ニ証明シタコトニナルコトガ分ル
コレハ明カニ成立スル

(Nevanlinna ; Eindeutige analytische Funktion

参照)

紹介者 鍋島 一郎