既約行列係ノZerfällungニ就テ (8)

小川潤次郎

群ノ表現論ニ於イテ、アル體ニ於テ既約ナ一ツノ表現ヲ基礎体ヲ適当ニ拡大シテ絶対既約ナ表現ニ分解スルトイフ問題ガアル。本論文ニ於テハモット一般ニアル體ニ於テ既約ナ行列係ナソノ絶対既約成分ニ分解サセルトイフ問題ヲ構成的ナ方法デ取扱フノデアル。

§1 $\mathfrak{G}$ハアル標数0ノ體Pノn次ノ行列系トスル。$\mathfrak{G}$ノ各行列Sト可換ナPノn次ノ行列Aヲ$\mathfrak{G}$ノ交換子ト名ヅケル。$\mathfrak{G}$ノ交換子ノ全体ガPノ上ノ行列環ヲ作ルコトハ明カデアルガ次ノ補助定理ガ成立ツ。(Hermann Weyl. The Classical Groups. P.81)

補助定理. 行列系$\mathfrak{G}$ガPデ既約ナラバ$\mathfrak{G}$ノ交換子環$\mathfrak{A}$ハPノ上ノDivisionsalgebraデアル。

サテ交換子AヲPノ上ノDivisionsalgebra $\mathfrak{A}$ノ元素aノPニ於ケル表現行列ト見ル。次ニaガ基礎体Pデ満足スル既約方程式(最高次ノ係数e)ヲ$m(u)=0$トスレバ$m(u)$ハ行列Aノ最小多項式トナル。従ッテ行列論ノ良ク知ラレタ定理カラ

$$f(u)=(m(u))^{l}$$

(9)
トナル。但シ $f(u)$ ハ行列 A ノ特有方程式デアル。體 P ハ完全體デアルカラ多項式 $m(u)$ ハ P ノ上ニ第一種デ且ツ異ル根ヲ有スル。今 $\theta_1, \cdots, \theta_m$ ヲ $m(u)$ ノ根トスレバ

$$m(u)=(u-\theta_1)\cdots(u-\theta_m)$$

ト分解出来ル。
體 $P_\alpha=P(\theta_\alpha)$ デハ多項式 $m(u)$ ハ

$$m(u)=(u-\theta_\alpha)m^*(u)$$

ナル形ニ分解サレル。従ツテ行列 A ハ體 P_α デハ

$$\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\theta_\alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_\alpha\end{matrix}}^{l} & 0 \\ 0 & A^*\end{pmatrix}$$

ノ形ニ変換サレル。但シ A^* ハ P_α ノ $(m-1)l$ 次ノ行列デアル。従ツテ $\mathfrak{G}$ ノ凡テノ行列 S ハアル一定ノ行列 T ニ依ツテ

$$\begin{pmatrix} S_\alpha & 0 \\ 0 & S^* \end{pmatrix}$$

ノ形ニ変換サレル。行列 S_α ノ集合ヲ $\mathfrak{G}_\alpha$ トスル。置換 $\theta_\alpha\to\theta_\beta$ ニ依ツテ S_α カラ生ズル行列ヲ S_β トシ S_β ノ集合ヲ $\mathfrak{G}_\beta$ ト書ク。
然ラバ Schur ノ定理ニ依ツテ

$$\mathfrak{G}\sim\begin{pmatrix}\mathfrak{G}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{G}_m\end{pmatrix}$$

デアルカラ、$\mathfrak{G}$ガ既約ナラ$\mathfrak{G}_\alpha$ハP_αデ既約デアル。次ニ$\mathfrak{G}$ノ交換子Divisionsalgebra $\mathfrak{A}$ノ内デAト可換ナ行列BハTニ依ッテ

$$\begin{pmatrix} B_\alpha & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}$$

ノ形ニ変換サレテB_αハ$\mathfrak{G}_\alpha$ノ交換子環デアル。従ッテDivisionsalgebraデアル。

$\mathfrak{L}_\alpha$ノ中ニテノ最小整式ガ一次ナラザル行列ガアレバソレヲ用ヒテ上ト同様ニシテ$\mathfrak{G}_\alpha$ヲ分解スル。若シ$\mathfrak{L}_\alpha$ノ行列ガスベテ一次ノ最小整式ヲ有スル即チソレハξE(ξハP_αノ元素)ノ形デアルトキニハ、コノ如キ$\mathfrak{G}_\alpha$ノ分解ハ出来ヌ。即チ$\mathfrak{G}_\alpha$ハ絶対既約デアル。

以上ノ操作ヲ抽象的ニ考ヘレバ$\mathfrak{G}$ノ交換子divisionsalgebra $\mathfrak{g}$ノ一ツノ元aヲ基礎体Pニ添加シテ$P(a)$ノ上ニ$\mathfrak{g}$ヲ考ヘ、次ニaト可換ナ$\mathfrak{g}$ノ元素bヲ$P(a)$ニ添加シテ$P(a,b)$ノ上ニ$\mathfrak{g}$ヲ考ヘテ$\mathfrak{g}$ニ於テ$P(a,b)$ノ元素ト可換ナ元素ハ既ニ$P(a,b)$ニ含マレルニ至ル迄コレヲ続ケル。即チ$\mathfrak{g}$ノ最大可換部分体ニ於テ$\mathfrak{G}$ハソノ絶対既約成分ニ到達スル譯デアル。而シテ此ノ最大可換部分体ハPノ上ニ有限次ノ拡大デアル。

§2. 體Pニ於ケル既約多項式

$$m(u) = u^m + a_1 u^{m-1} + \cdots + a_{m-1} u + a_m$$

ノm個ノ根ヲ $\theta_1, \cdots, \theta_m$ トスレバ Van der Monde ノ行列

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_1^{m-1} & \cdots & \theta_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

ニ対シテハ $|V| \neq 0$

デアル。次ニ

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_m & \cdots & & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

トスレバ簡単ナ計算カラ次ノ関係式ガ成立ツ。

$$V \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_m \end{pmatrix} V^{-1} = R$$

次ニ θ_α ノ基礎体 P ニ於ケル正規表現ハ丁度行列 R デアル。今体 $P(\theta_\alpha)$ ニ於ケル l 次ノ行列

$$S = (s_{ij})$$

ニ於テソノ各元素 s_{ij} ヲ、ソノ正規表現行列 $R(s_{ij})$ デ置換ヘテ生ズル lm 次ノ行列 $(R(s_{ij}))$ ヲ阿部亮氏ニ従ッテ S カラ P ニ ableiten サレタ行列ト云ヒ $S_{P(\theta_\alpha)\to P}$ ヲ以テ表ハス。$\mathfrak{G}$ ノ凡ベテノ行列 S カラ生ズル $S_{P(\theta_\alpha)\to P}$ ノ

(12)

集合ヲ$\mathfrak{G}$カラ *ableiten* サレタ行列系ト云[12]ヒ$\mathfrak{G}_{p(\theta_\alpha)\to p}$デ表ハス。然ルトキハ簡単ナ計算ニ依ッテ

$$\mathfrak{G}_{p(\theta_\alpha)\to p}\sim\left\{V\begin{pmatrix}S_1&&\\&\ddots&\\&&S_m\end{pmatrix}V^{-1}\right\}$$

デアル。

従ッテ之ト前節ノSchurノ定理ト合セテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 Pニ於テアタヘラレタ既約行列係$\mathfrak{G}$ニ対シテハPノ有限次拡大Kニ於ケル絶対既約行列系$\mathfrak{G}^*$ガアッテ

$$\mathfrak{G}^*_{K\to p}\sim\mathfrak{G}$$

トナル。

而シテKトシテハ$\mathfrak{G}$ノ交換子Divisionsalgebra $\mathfrak{D}$ノ最大可換部分体ヲ取レバヨイ。