Fourier 解析ト確率論

所員　河田龍夫

序　論

1 <u>Fourier 級数　Fourier 変換</u>　$L_p(a,b)$ を $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \ (p>0)$ なる可測函数 $f(x)$ の全体とする。$p=\infty$ のときは $L_\infty(a,b)$ は (a,b) で有界な（測度 0 の集合を除いて）函数の全体を意味するものとする。$f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ $(p \geqq 1)$ ならばその Fourier 係数は

$$(1.1) \qquad C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$$

で与へられる。$f(x) \in L_p(-R,R)$ で考へれば、その Fourier 係数は

$$(1.2) \qquad C_n(R) = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{-in\pi x/R} f(x)\,dx.$$

次に $f(x)$ が Bohr の意味での概週期函数なるとき　その Fourier 係数は

$$(1.3) \qquad C_\lambda = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i\lambda x} f(x)\,dx \equiv M\{e^{-i\lambda x} f(x)\}$$

で茲に (1.3) が 0 と異る如き λ の集合は可附番集合 $\{\lambda_n \mid n=1,2\cdots\}$ である。

若し　$f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$　$(p \geqq 1)$ で

$$(1.4) \qquad \lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left| F(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-itx}dx\right|^p dt = 0$$

なる如き $F(t)$ が存在する時、$f(x)$ は L_p に於て Fourier 変換 $F(t)$ を持つ、又は $F(t)$ は $F(x)$ の L_p に於ける Fourier 変換と呼ばれる。(1.4) は又

$$(1.5) \qquad F(t) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(L_p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-itx}dx,$$

或は L_p を明示する必要のないときは単に

$$F(t)=\underset{A\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x)e^{-itx}dx$$

とも書かれる。Fourier 変換論に依れば若し $f(x)\in L_p$ $(1\leqq p\leqq 2)$ で; $1/p+1/p'=1$ とすれば $f(x)$ は $L_{p'}$ に於て Fourier 変換 $F(t)$ を持つ。Fourier 変換は Fourier 係數と同様な役割を L_p に於て演ずる。

X を實數値をとる確率變數としその分布函數を $\sigma(x)$ とする。$\sigma(x)=\frac{1}{2}\{\sigma(x+0)+\sigma(x-0)\}$ として置く。$\sigma(+\infty)=1$, $\sigma(-\infty)=0$ で $\sigma(x)$ は非減少函數である。

$$(1.6)\qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\sigma(x)$$

を X の特性函數又は Fourier-Stieltjes 變換と云はれる。(1.1), (1.2), (1.3), (1.5) の書き方に倣へば t の代りに $-t$ とするのがいゝが慣例上 (1.6) の形で考へる。無論本質的には Fourier 係數, Fourier 變換の類似である。特性函數は e^{itX} なる確率變數の平均値と考へてよい。

2 收斂性, 總和性, 可能性 $f(x)\in L_p(-\pi,\pi)$[1] とし, その Fourier 級數を

$$(2.1)\qquad f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}。$$

とする。$\sum_{-N}^{N}c_n e^{inx}$ $(N\to\infty)$ の $f(x)$ への收斂の條件は種々得られてゐるが[2] 茲では基本的な一つの定理だけを掲げる。即ち、

I. $f(x)$ が点 x の近傍で有界變分の函數ならば, その Fourier 級數 (2.1) は收斂し

$$(2.2)\qquad \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{-inx}$$

---

(1) $L_1=L$

(2) A. Zygmund, Trigonometrical series, Warsaw, 1935. 第二章に詳しい。

全く同様に

II. $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ $1 \leqq p \leqq 2$ でその Fourier 変換を $F(t)$ とすれば、若し $f(x)$ が点 x の近傍で有界変分の函数であれば

$$(2.3) \quad \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(t) e^{ixt}\, dt$$

実は $1 \leqq p < 2$ のときは $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(t) e^{ixt}\, dt$ が殆ど総ての x に対して $f(x)$ に収斂することが A. Zygmund に依て知られた。(1) ($p=2$ のときは不明) これに対する Fourier 級数の定理はない。

概周期函数の Fourier 級数に対しても Fourier 指数 ((1.3) が 0 にならない λ) に適当な條件を置けば上の定理 II に類似の事實の成立する事が導かれてゐるが今は是に觸れない。(2)

III. $f(x)$ の Fourier 級数 (2.1) は殆ど総ての点で $f(x)$ に (C, 1) 総和可能である。(Fejér)

IV. $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq 2)$ によるその Fourier 変換を $F(t)$ とすれば殆ど総ての点で (2.3) の右辺の積分が $\lambda \to \infty$ のとき (C, 1) 総和可能である。

$1 \leqq p < 2$ のときは II の下で注意した事實に含まれる。概周期 Fourier 級数に就ても類似の定理が知られてゐる。

3 Parseval の定理, Hausdorff-Young 及び Titchmarsh の定理

V (Parseval). $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ その Fourier 係数を c_n とすれば $\sum c_n^2 < \infty$ となり

$$(3.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

更に $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, $g(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ で $g(x)$ の Fourier 係数を d_n とすれば

---

(1) A. Zygmund, A remark on Fourier transforms, Proc. Camb. Phil. Soc. 32 (1936)

(2) 河田龍夫—高橋進一, On the convergence of an almost periodic Fourier series, [illegible]

$$(3.2)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, d_{-n}$$

特に

$$(3.3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x+t)\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, d_{-n}\, e^{-int}$$

Ⅵ　$f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ のとき其の Fourier 変換を $F(t)$ とすると（$F(t) \in L_2$）と

$$(3.4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\,dt$$

更に $g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ で其の Fourier 変換を $G(t)$ とすると

$$(3.5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,G(-t)\,dt$$

特に

$$(3.6)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,G(t)\,e^{itx}\,dt$$

（$f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ の Fourier 変換が $F(t)$ ならば $F(t)$ の Fourier 変換は $f(-x)$ である）

Ⅶ　$f(x)$ を概周期函数としその Fourier 係数を C_n とすると

$$(3.7)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$$

次に L_2 でなく L_p に於て上の定理に対応するものは Hausdorff-Young の定理として Fourier 係数論に於て知られてゐる。対応する Fourier 積分論の定理は Titchmarsh に負ひ、概周期 Fourier 級数に就ては H. R. Pitt が之を証明した。(1)

定理（Hausdorff-Young）　$f(x) \in L_p(-\pi, \pi)$　$1 \leqq p \leqq 2$ での Fourier 係数を C_n とすると $\sum |C_n|^{p'} < \infty$ となり

$$(3.8)\qquad \left\{\sum |C_n|^{p'}\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

---

(1) H. R. Pitt. Journal London Math. Soc. 14 (1939) p 143-150

又 $\sum|c_n|^p<\infty$ ならば $f\in L_{p'}(-\pi,\pi)$ が存在してその Fourier 係数が c_n になる。そして

(3.9) $$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^{p'}dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq \left\{\sum|c_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

IX. (Titchmarsh) $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ $1<p\leqq 2$ の Fourier 変換を $F(t)$ とすると

(3.10) $$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|^{p'}dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p}dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

§4. 三角級数，三角積分の単一性. Fourier 級数，Fourier 積分の単一性に就ては例へば Parseval の定理から明らかであるが，茲に三角級数，三角積分の単一性に就て一言しておく。後で使ふ事があるからである。是に就ては精しい議論がなされてゐるが[1]，茲では簡単な一二の定理に就てのみ述べておこう。

X. $\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N} d_n e^{inx}=0$ が総ての x に対して成立すれば $d_n=0$. $(n=0,\pm1,\ldots\ldots)$

XI[2]. $\phi(u)$ が任意の有限区間 (a,b) で $L(a,b)$ に属し

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\phi(u)e^{-ixu}du=0$$

がすべての x に対して成立すれば $\phi(u)$ は殆ど總ての点で 0 になる

---

(1) A. Zygmund, Trigonometrical series 及び Titchmarsh Introduction to the theory of Fourier integrals Oxford, 1937 を見よ。

(2) A. C. Offord. Note on the uniqueness of the representation of a function by a trigonometrical integral. Journ. London Math Soc 11 (1936)

第一章　特性函數の二,三の性質

5.　特性函數のとる値.　確率変數Xの分布函数を$\sigma(x)$としその特性函數を$f(t)$とする。次の定理は明らかである

定理5.1

$$(5.1)\qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\sigma(x)$$

に於て

(i)　$f(t)$は、tの一様連續函數である。

(ii)　$|f(t)|\leqq 1,\quad f(0)=1$

(iii)　$f(-t)=\overline{f(t)}$

一般に特性函數のとる値は複素數である事は云ふ迄もないが是が特に實數値をとる時は次の定理の示す場合である。

定理5.2　$f(t)$が實數値をとる函數なるための必充條件は

$$(5.2)\qquad \sigma(x)+\sigma(-x)=1$$

なる事であつて、この場合

$$(5.3)\qquad f(t)=2\int_{0}^{\infty}\cos xt\,d\sigma(x)$$

と書ける。

充分な事

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,d\sigma(x)+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\,d\sigma(x)$$

であつて右辺の第二項は $i\int_{0}^{\infty}\sin tx\,d\{\sigma(x)+\sigma(-x)\}$ となる事から明らかである。

必要な事　$V(x)=\sigma(x)+\sigma(-x)$ として

$$(5.4)\qquad \phi(t)=\int_{0}^{\infty}\sin tx\,dV(x)=0$$

なる事より $V(x)=1$ を証明すればよい。(5.4)から

$$(5.5)\quad \lim_{T\to\infty}\int_0^T \sin tu\,\frac{\sin ta}{t}\varphi(t)\,dt=0$$

であるが，この左辺の積分を計算する。

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty dV(x)\int_0^T \frac{\sin tx\,\sin ty a\,\sin ut}{t}dt$$

$$=\int_0^\infty dV(x)\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin tx\,\sin ty a\,\sin ut}{t}dt$$

となり $\lim_{T\to\infty}\int_0^T$ は

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(u+x-a)t+\sin(u-x+a)t-\sin(u+x+a)t-\sin(u-x-a)}{t}dt$$

となり

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha t}{t}dt=\frac{\pi}{2},\quad(\alpha>0),$$

$$=-\frac{\pi}{2}\quad(\alpha<0)$$

$$=0\quad(\alpha=0)$$

を使へば $x>0,\ a>0,\ x-a>0$ として

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T =0,\qquad u>x+a$$

$$=\frac{\pi}{4},\qquad u=x+a$$

$$=\frac{\pi}{2},\qquad x-a<u<x+a$$

$$=\frac{\pi}{4},\qquad u=x-a$$

$$=0,\qquad 0<u<x-a$$

故に (5.5) の左辺は

$$\int_{x-a}^{x+a} dV(x)=0$$

となる。但し $x-a,\ x+a$ は $V(x)$ の連續点と選んでおく。

$x-a=\alpha$, $x+a=\beta$ とすれば $0<\alpha<\beta$ を任意にとり（但し $V(x)$ の連續点とする。）$\int_{\alpha}^{\beta} dV(x)=0$　故に $V(x)=\sigma(x)+\sigma(-x)$ ＝常數が $\sigma(x)$ と $\sigma(-x)$ が連續なる如き x で成立する。この常數が1である事は $\sigma(\infty)=1$　$\sigma(-\infty)=0$ より明らかである。不連續な点でも $\frac{1}{2}\{\sigma(x+0)+\sigma(x-0)\}=\sigma(x)$ なる事より $V(x)=1$ となる。

(5.3) は証明の必要が無かろう。

<u>定義 5.1</u>　(5.2) の<u>成立する如き確率変數は対称であるといはれる</u>

定理 5.1 から $f(0)=1$ で $|f(t)|\leqq 1$ であるが0以外の t の値に対して $f(t)=1$ となる事があるかといふ事を考へてみる。その前に一つの定義を与へておく。

<u>定義 5.2</u>　<u>確率変數 X が唯一つの値しかとらない時 換言すれば分布函數</u> $\sigma(x)$ <u>があるaに対し</u> $x>a$ <u>では</u> $\sigma(x)=1$, $x<a$ <u>では</u> $\sigma(x)=0$ <u>なる時</u> $\sigma(x)$ <u>はスペクトラム</u> a <u>の単位分布函數といふ。</u>

<u>一般に分布函數の増加即ちその近傍で常數でない点をこの分布函數のスペクトラムといふ。</u>

<u>定理 5.3</u>

(i)　$\sigma(x)$ <u>がスペクトラム</u> a <u>の単位分布函數ならばその特性函數は</u> $f(t)=e^{iat}$ <u>逆も成立する。</u>

(ii)　$|f(t_0)|=1$ $(t\neq 0)$ <u>ならば公差</u> $2\pi/t_0$ <u>の算術級數に含まれる点を除いて</u> $\sigma(x)$ は常數<u>となる</u>

(iii)　$|f(t_0)|=|f(t_1)|=1$ <u>で</u> t_0/t_1 <u>が無理數ならば</u> $\sigma(x)$ <u>は単位分布函數である。</u>

(i) は明らか (i) の逆は (iii) の特別な場合である (ii) を証明する。

$|f(t_0)|=1$ であるから $f(t_0)e^{i\omega}=1$ なる如き ω がある即ち

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0x+i\omega} d\sigma(x)=1.$$

この實數部分をとつて,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t_0 x+\omega)\, d\sigma(x)=1.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(x)=1$ から

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos(t_0 x+\omega))\, d\sigma(x)=0$$

さて $1-\cos(t_0 x+\omega)\geq 0$ であるから、常に $t_0 x+\omega=2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots\cdots)$ なる x を除いて $\sigma(x)$ は常数とならねばならない。

(iii) は (ii) から得られる。即ち $|f(t_0)|=1$ 以外に $|f(t_1)|=1$ ならば (ii) から $\sigma(x)$ の二点以上のスペクトラムの間の距離は $2\pi/t_0$ の整数倍にもなるし又 $2\pi/t_1$ の整数倍にもなる。故に t_0/t_1 が有理数でなければならぬ。是仮定に反するから $\sigma(x)$ のスペクトラムは唯一点である。

(iii) から次の系が得られる

系 5.1. $f(t)=1$ が $a<t<b$ で成立すれば $f(t)$ は $-\infty<t<\infty$ で恒等的に 1 に等しい。

次に $f(t)$ が 1 以外の常数値をある区間でとり得るか否かという事が問題になるが是は 1 の場合と事情が大分違う。例えば $|t|\geq l>0$ で $f(t)=0$ なる如き分布函数が存在する。もし $f(t)$ が解析函数であるか又はその境界函数になつてゐる場合には $f(t)$ は一つの正測度の集合の上で常数 a になれば恒等的に a になるから $a\neq 1$ であれば この様な事は起らない。そういつた方面から議論を進める事が出来るが是は後で第二章に於て論じよう。

(つゞく)