矩形分布ヲ持ツ数個ノ独立変数ノ函数値ノ分布

山内二郎

(東京帝大第一工学部計測工学科)

マエガキ　四捨五入値ニ一般ニハ矩形分布ノ誤差ヲ持ツ数個ノ独立変数ヲ四則デ結ンデアル確率変数ノ誤差ノ分布ニ就テハ既ニ宇野、坂元、二見諸氏ニヨツテ詳シク調ベラレテ居ル。コレハ実用上有用デ日常ノ数値ノ取扱ニ、マタイロイロナ測定ノ場合ニ是非トモ明カニシテ置キタイコトデアル。実際ニハ單ニ四則デ結バレテイルモノノ外ニイロイロナ函数デ結バレテイルモノガアルノデ、ソノヨウナ場合ニハドウナルカヲ知ツテ置キタイ。マタ實際ノ測定ナドデハ必ズシモ四捨五入ニ限ラナイ。

本文ハソウシタ意味デ矩形分布ヲ持ツ数個ノ独立変数ガアル函数デ結バレテイルトキソノ函数値ノ分布ヲ求メルコトヲ試ミタモノデアル。文献モ別ニ調ベテ見ナカツタシ、マタ数学的厳密性ヲ欠イテイルコトデモアロウシ、何ナリト大方ノ教示ヲ得レバ幸デアル。

§1. 一般論

独立変数 x_i ハ $x_i^0-a_i \leqq x_i \leqq x_i^0+a_i$ ノ範囲内デ矩形分布ヲ持チ、コノ確率密度函数ヲ $\varphi(x_i)$ ト記ス。單位衝撃函数ヲ $E_0(x)$ トスルト

$$(1.1)\qquad E_0(x)=\begin{cases}1 & x \geqq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

デアルカラ、$\varphi(x_i)$ ハ

$$(1.2)\qquad \varphi(x_i)=\frac{1}{2a_i}\left\{E_0(x_i-(x_i^0-a_i))-E_0(x_i-(x_i^0+a_i))\right\}$$

デアル。

$x_i\,(i=1,2,\dots\dots,n)$ ノ函数 y_n、スナワチ

$$(1.3)\qquad y_n=Y(x_1,x_2,\dots\dots,x_n)$$

ガ與ヘラレタ函数デ、コノ y_n ノ分布函数ヲ $F_n(y)$ トスル。分布函数ノ定義ニ従ヒ $F_n(y)=Pr\{y_n<y\}$ デアル。

(1.3) 式カラ x_i ヲ $y_n, x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n$

ソク

ノ函数トシテ

(1.4) $x_i = X_i(y_n, x_1, x_2, \cdots\cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_n)$

トアラワス。

§ 1.1　1元ノ場合

1元ノ場合ニハ、

(1.5) $y_1 = Y(x_1)$

デアルガ、x_1ノ直線上デ $(x_1^0 - a_1, x_1^0 + a_1)$ ノ区内デ $y_1 \leqq y$ ニ相当スル x_1 ノ区(y)ヲ考エルト分布函数ノ定義ニ従ッテ

$$(1.6) \qquad F_1(y) = \int_{(y)} \varphi(x_1)\, dx_1$$

デアリ、$\varphi(x_1)$ハ(1.2)式デ与ヘラレルカラ、(y)ノ区ノ長サヲ $L(y)$ トスレバ

$$(1.7) \qquad F_1(y) = \frac{1}{2a_1} L(y)$$

デ与ヘラレル。スナワチ区(y)ノ長サノ基本区ノ全長ニ対スル比デ与ヘラレル。

§ 1.2　2元ノ場合

2元ノ場合ニハ

(1.8) $y_2 = Y(x_1, x_2)$

デアルガ、x_1, x_2 ヲソレゾレ直交両軸トスル直交座標系ヲ考ヘ、$x_1 = x_1^0 \pm a_1$　$x_2 = x_2^0 \pm a_2$ ノ四ツノ直線デ限ラレタ矩形(基本区)内ニオイテ $y_2 = y$ ノ曲線ヲツクリ、$y_2 \leqq y$ ナル区 (y)トスレバ、各分布函数ハ明カニ

$$(1.9) \qquad F_2(y) = \int_{(y)} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\, dx_1\, dx_2$$

デ与ヘラレ、基本区内デハ $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ ハソレゾレ一定デ(1.2)式デ与ヘラレルカラ区(y)ノ面積ヲ$A(y)$ト記スト、(1.9)式ハ

$$(1.10) \qquad F_2(y) = \frac{1}{4a_1 a_2} A(y)$$

トナル。従ッテ(1.8)式ノ函数形ガ不明デアッテモ $y_2 = y$ ノ曲線ガ決定サレレバ圖上デ面積ヲ測定シテ求メラレルコトモアロウシ、マタアル場合ニハ簡単ニ幾何學的ニ面積ヲ求メラレルコトモアロウ。

§ 1.3　多元ノ場合

同ジヨウニ考ヘテ行クト (x_1, x_2, x_3) ノ3元ノ場合ニハ、

コノ3元直交座標系デ $x_1=x_1^0\pm a_1$, $x_2=x_2^0\pm a_2$, $x_3=x_3^0\pm a_3$ ノ6箇ノ平面デ限ラレタ基本区内デ $y_3=y$ ナル曲面ヲツクリ、$y_3\leqq y$ ナル区(y)ノ体積ヲ求メ基本区ノ全体積ニ対スル比ヲ求メレバ、ソレガ分布函数 $F_3(y)$ デアリ、一般ニ (x_i) ノ n 元ノ場合ニハ n 元直交座標系ノ $x_i=x_i^0\pm a_i$ ノ $2n$ 個ノ平面デ限ラレタ基本区内デ $y_n=y$ ナル曲面ヲツクリ、$y_n\leqq y$ ナル区(y)ノ体積ヲ求メ、基本区ノ全体積ニ対スル比ヲ求メレバ、ソレガ求メル分布函数 $F_n(y)$ トナルコトトナル。

§2. 1元単調函数ノ場合

x_1 ガ増シテ行クト y_1 モ一意的ニ増シマタハ減ル函数デアル場合ニハ、y_1 ノ最小値 y_e ノ点ハ基本区ノ一端ニアツテ、最大値 y_u ノ点ハ他端ニアラハレルコトハ明ラカデアル。

先ズ y_e ガ $(x_1^0-a_1)$ ノ点デアル場合ヲ考ヘルト、$Y(x_1^0-a_1)\leqq y<Y(x_1^0+a_1)$ デハ

$$(2.1)\qquad L(y)=\int_{x_1^0-a_1}^{X_1(y)}dx_1$$

デアツテ、基本区ノ外デハ

$$(2.2)\qquad L(y)=\begin{cases}0 & y<Y(x_1^0-a_1)\\ 2a_1 & y\geqq Y(x_1^0+a_1)\end{cases}$$

デアル。(2.1)式ト(2.2)式トヲ一ツニシテ

$$(2.3)\qquad L(y)=\int_{x_1^0-a_1}^{X_1'(y)}dx_1\cdot E_0\left(y-Y(x_1^0-a_1)\right)-\int_{x_1^0+a_1}^{X_1(y)}dx_1\cdot E_0\left(y-Y(x_1^0+a_1)\right)$$

ト記スコトガデキル。(2.3)式ノ右辺ノ二ツノ項ヲ比ベテ見ルト、積分ノ上限ハ何レモ $X_1(y)$ デアツテ、下限ハ衝撃函数ノ $Y(x_1)$ ノ x_1 ニナツテキル。ヨツテ

$$(2.4)\qquad U_1^{(0)}(y;\xi_1)=\int_{\xi_1}^{X_1(y)}dx_1$$

トシテアラハサレル $\bar{U}_1^{(0)}$ ナル函数ヲ考ヘルト、(2.3)式ハ、

(2.5) $$L(y) = \bar{U}_1^{(0)}(y, x_1^0 - a_1) \cdot E_0(y - Y(x_1^0 - a_1))$$
$$- \bar{U}_1^{(0)}(y, x_1^0 + a_1) \cdot E_0(y - Y(x_1^0 + a_1))$$

トナル。今記号演算子 D_{a_1} ヲ次ノヨウニ定メル。

(2.6) $$D_{a_1} f(x_1^0) = \frac{1}{2a_1}\left[f(x_1^0 - a_1) - f(x_1^0 + a_1)\right]$$

ソウスルト、y_1 ノ分布函数 $F_1(y)$ ハ(2.5)式カラ

(2.7) $$F_1(y) = D_{a_1}\bar{U}_1^{(0)}(y, x_1^0) E_0(y - Y(x_1^0))$$

トナル。

次ニ y_e ノ点ガ $(x_1^0 + a_1)$ ノ点ニアル場合ヲ考ヘルト

(2.8) $$L(y) = \int_{x_1(y)}^{x_1^0 + a_1} dx_1, \qquad Y(x_1^0 + a_1) \leq y < Y(x_1^0 - a_1)$$
$$= 0 \qquad y < Y(x_1^0 + a_1)$$
$$= 2a_1 \qquad y \geqq Y(x_1^0 - a_1)$$

デアルカラ、コレヲ一ツニシテ

(2.9) $$L(y) = \int_{x_1(y)}^{x_1^0 + a_1} dx_1 \cdot E_0(y - Y(x_1^0 + a_1))$$
$$- \int_{x_1(y)}^{x_1^0 - a_1} dx_1 \cdot E_0(y - Y(x_1^0 - a_1))$$

トナル。(2.4)式ノ函数ヲ用イルト

(2.10) $$L(y) = -\bar{U}_1^{(0)}(y, x_1^0 + a_1) E_0(y - Y(x_1^0 + a_1))$$
$$+ \bar{U}_1^{(0)}(y, x_1^0 - a_1) E_0(y - Y(x_1^0 - a_1))$$

トナリ、分布函数 $F_1(y)$ ハ(2.7)式ニ対応シテ

(2.11) $$F_1(y) = D_{a_1}\bar{U}_1^{(0)}(y, x_1^0) E_0(y - Y(x_1^0))$$

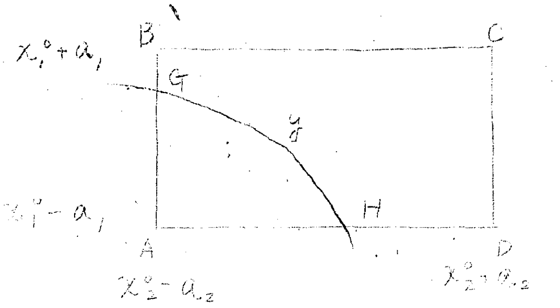
トナリ、形式的ニ(2.7)式ト全ク同ジ。スナワチ次ノ定理ヲ得ル。

定理 x_1 ノ基本区内デ単調函数 y_1 ノ分布函数 $F_1(y)$ ハ
$$F_1(y) = D_{a_1}\bar{U}_1^{(0)}(y, x_1^0) E_0(y - Y(x_1^0))$$

デアル。

§3. 2元單調函數ノ場合

x_1, x_2 ノ何レニ対シテモ單調ナ函數 y_2 ノ最小値 y_e ハ基本區ノ矩形ノドレカノ1隅ニアッテ 最大値 y_u ハ他ノ1隅ニアルコトハ明カデアル。今 x_1 軸ヲ縦軸ニ、x_2 軸ヲ横軸ニトッタ直交座標系ヲ考ヘルト 基本區ハ圖ノヨウニ矩形ABCDトナリ、$y_2=y$ ノ曲線ハ異ル2辺上ノ点G, Hヲ始点、終点トシテアラハレル。y ヲ増シテ行クト、コノG, Hハ最小値ノ隅カラ辺ノ上ヲ移ッテ行キ最大値ノ隅ヘ行ク。タトヘバ y_e ガAニ y_u ガCニアレバGハAカラAB上ヲBノ方ヘ行キ、BカラBC上ヲCノ方ヘ行キ、マタHハAカラAD上ヲDノ方ヘ行キ、DカラDC上ヲCノ方ヘ行ク。マタ y_e ガDニ y_u ガAニアレバGハDカラDC, CB, BAノ辺上ヲ移ッテ行キ、HハDカラDA上ヲ移ッテ行ク。



マズ y_e ガAニ、y_u ガCニアル場合ニツイテ $A(y)$ ヲ求メル。

GガAB上ニ、HガAD上ニアル場合、スナワチ

$$\begin{cases} Y(x_1^\circ-a_1,\ x_2^\circ-a_2) \leqq y < Y(x_1^\circ+a_1,\ x_2^\circ-a_2) \\ \qquad \text{カツ} \qquad y < Y(x_1^\circ-a_1,\ x_2^\circ+a_2) \end{cases}$$

(3.1)
$$A(y)=\int_{x_2^\circ-a_2}^{x_2(y,\,x_1^\circ-a_1)} U_1^{(0)}(y,\,x_2,\,x_1^\circ-a_1)\,dx_2$$

デアル。GガBC上ニ、HガAD上ニアル場合、スナワチ

$$\begin{cases} Y(x_1^\circ+a_1,\ x_2^\circ-a_2) \leqq y < Y(x_1^\circ+a_1,\ x_2^\circ+a_2) \\ \qquad \text{カツ} \qquad y < Y(x_1^\circ-a_1,\ x_2^\circ+a_2) \end{cases}$$

(3.2)
$$A(y)=\int_{x_2^\circ-a_2}^{x_2(y,\,x_1^\circ-a_1)} U_1^{(0)}(y,\,x_2,\,x_1^\circ-a_1)\,dx_2$$

$$-\int_{x_2^0-a_2}^{x_2(y,x_1^0+a_1)} U_1^{(0)}(y,x_2,x_1^0+a_1)\,dx_2$$

GガAB上ニ、HガDC上ニアレバ

$$\begin{cases} Y(x_1^0-a_1,\ x_2^0-a_2)\leqq y < Y(x_1^0+a_1,\ x_2^0-a_2) \\ Y(x_1^0-a_1,\ x_2^0+a_2)\leqq y < Y(x_1^0+a_1,\ x_2^0+a_2) \end{cases}$$

(3.3)
$$A(y)=\int_{x_2^0-a_2}^{x_2(y,x_1^0-a_1)} U_1^{(0)}(y,x_2,x_1^0-a_1)\,dx_2$$

$$-\int_{x_2^0+a_2}^{x_2(y,x_1^0-a_1)} U_1^{(0)}(y,x_2,x_1^0-a_1)\,dx_2$$

GガBC上ニ、HガDC上ニアレバ

$$\begin{cases} Y(x_1^0+a_1,\ x_2^0-a_2)\leqq y < Y(x_1^0+a_1,\ x_2^0+a_2) \\ Y(x_1^0-a_1,\ x_2^0+a_2)\leqq y \end{cases}$$

(3.4)
$$A(y)=\int_{x_2^0-a_2}^{x_2(y,x_1^0-a_1)} U_1^{(0)}(y,x_2,x_1^0-a_1)\,dx_2$$

$$-\int_{x_2^0-a_2}^{x_2(y,x_1^0+a_1)} U_1^{(0)}(y,x_2,x_1^0+a_1)\,dx_2$$

y_2ガ基本区ノ外ニアレバ

(3.5)
$$A(y)=\begin{cases} 0 & y< Y(x_1^0-a_1,\ x_2^0-a_2) \\ 4a_1a_2 & y\geqq Y(x_1^0+a_1,\ x_2^0+a_2) \end{cases}$$

デアル。ソコデ

(3.6)
$$U_2^{(0)}(y,\xi_1,\xi_2)=\int_{\xi_2}^{x_2(y,\xi_1)}\int_{\xi_1}^{x_1(y,x_2)} dx_1\,dx_2$$

トオクト、上ノA(y)ヲ一ソニアラハシテ

(3.7) $$A(y)=\overline{U}_2^{(0)}(y, x_1^\circ-a_1, x_2^\circ-a_2)E_0(y-Y(x_1^\circ-a_1, x_2^\circ-a_2))$$
$$-\overline{U}_2^{(0)}(y, x_1^\circ+a_1, x_2^\circ-a_2)E_0(y-Y(x_1^\circ+a_1, x_2^\circ-a_2))$$
$$-\overline{U}_2^{(0)}(y, x_1^\circ-a_1, x_2^\circ+a_2)E_0(y-Y(x_1^\circ-a_1, x_2^\circ+a_2))$$
$$+\overline{U}_2^{(0)}(y, x_1^\circ+a_1, x_2^\circ+a_2)E_0(y-Y(x_1^\circ+a_1, x_2^\circ+a_2))$$

トナル。従ッテ分布函数 $F_2(y)$ ハ

(3.8) $$F_2(y)=D_{a_2}D_{a_1}\overline{U}_2^{(0)}(y, x_1^\circ, x_2^\circ)E_0(y-Y(x_1^\circ, x_2^\circ))$$

y_e ト y_u トガドノ隅ニアッテモ全ク同ジ結果トナルコトハ容易ニ計算デキル。タトヘバ y_e ガ C ニ、y_u ガ D ニアル場合ニハ、マズ前節ニ述ベタトオリ $Y(x_2, x_1^\circ-a_1)$ ト $Y(x_2, x_1^\circ+a_1)$ トノドチラガ大キクテモ x_2 ニオケル縦軸ノ長サハ $\overline{U}_1^{(0)}(y, x_2, x_1^\circ-a_1)E_0(y-Y(x_2, x_1^\circ-a_1))-\overline{U}_1^{(0)}(y, x_2, x_1^\circ+a_1)E_0(y-Y(x_2, x_1^\circ+a_1))$ デアラハサレルカラ

$$A(y)\int_{x_2^\circ-a_2}^{x_2^\circ+a_2}\overline{U}_1^{(0)}(y, x_2, x_1^\circ-a_1)E_0(y-Y(x_2, x_1^\circ-a_1))\times dx_2$$
$$-\int_{x_2^\circ-a_2}^{x_2^\circ+a_2}\overline{U}_1^{(0)}(y, x_2, x_1^\circ+a_1)E_0(y-Y(x_2, x_1^\circ+a_1))dx_2$$
$$=-\int_{x_2(y, x_1^\circ+a_1)}^{x_2^\circ+a_2}\overline{U}_1^{(0)}(y, x_2, x_1^\circ+a_1)dx_2\cdot E_0(y-Y(x_1^\circ+a_1, x_2^\circ+a_2))$$
$$-\int_{x_2^\circ-a_2}^{x_2(y, x_1^\circ+a_1)}\overline{U}_1^{(0)}(y, x_2, x_1^\circ+a_1)dx_2\cdot E_0(y-Y(x_1^\circ+a_1, x_2^\circ-a_2))$$
$$+\int_{x_2^\circ-a_2}^{x_2(y, x_1^\circ-a_1)}\overline{U}_1^{(0)}(y, x_2, x_1^\circ-a_1)dx_2\cdot E_0(y-Y(x_1^\circ-a_1, x_2^\circ-a_2))$$

$$+\int_{x_2(y,x_1^0-a_1)}^{x_2^0+a_2} U_1^{(0)}(y,x_2,x_1^0-a_1)\,dx_2\cdot E_0(y-Y(x_1^0-a_1,x_2^0+a_2))$$

$$= U_2^{(0)}(y,x_1^0+a_1,x_2^0+a_2)E_0(y-Y(x_1^0+a_1,x_2^0+a_2))$$
$$-U_2^{(0)}(y,x_1^0+a_1,x_2^0-a_2)E_0(y-Y(x_1^0+a_1,x_2^0-a_2))$$
$$+U_2^{(0)}(y,x_1^0-a_1,x_2^0-a_2)E_0(y-Y(x_1^0-a_1,x_2^0-a_2))$$
$$-U_2^{(0)}(y,x_1^0-a_1,x_2^0+a_2)E_0(y-Y(x_1^0-a_1,x_2^0+a_2))$$

トナリ、(3.7)式ト全ク同ジク、分布函数ハ(3.8)式デ与ヘラレル。スナワチ次ノ定理ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理}}$ x_1, x_2 ノ基本区内デ単調函数 y_2 ノ分布函数 $F_2(y)$ ハ

$$F_2(y)=D_{a_2}D_{a_1}U_2^{(0)}(y,x_1^0,x_2^0)E_0(y-Y(x_1^0,x_2^0))$$

デアル。

説明ノ便宜上 x_1 軸ヲ縦軸ニ x_2 軸ヲ横軸ニトツテ積分ノ順序ヲ x_1, x_2 ノ順ニトツタガ、コレハドチラヲ先ニシテモヨク、マタ D ノ順序モドチラガ先デモ同ジデアル。

§4. n 元単調函数ノ場合

$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ノ単調函数 y_n ノ場合ニハ、マズ x_2, x_3, $\cdots\cdots$, x_n ヲ固定スレバ、§2 ニヨツテ

$$(4.1)\quad F_1(y,x_2,x_3,\cdots\cdots x_n)=D_{a_1}U_1^{(0)}(y,x_2,x_3,\cdots\cdots x_n,x_1^0)$$
$$\times E_0(y-Y(x_1^0,x_2,x_3,\cdots\cdots x_n))$$

$$(4.2)\quad U_1^{(0)}(y,x_2,x_3,\cdots\cdots x_n,\xi_1)=\int_{\xi_1}^{x_1(y,x_2,x_3,\cdots\cdots x_n)}dx_1$$

デアル。ツギニ x_3, x_4, $\cdots$ x_n ヲ固定スレバ §3 ニヨツテ

$$(4.3)\quad F_2(y,x_3,x_4,\cdots x_n)=D_{a_2}D_{a_1}U_2^{(0)}(y,x_3,x_4\cdots x_n,$$
$$x_1^0,x_2^0)E_0(y-Y(x_1^0,x_2^0,x_3,x_4\cdots\cdots x_n))$$

$$(4.4)\quad U_2^{(0)}(y,x_3,x_4\cdots x_n,\xi_1,\xi_2)=\int_{\xi_2}^{x_2(y,x_3,x_4\cdots x_n,\xi_1)}$$

$$\cdots\int_{\xi_1}^{x_1(y,\, x_2,\, x_3,\, \cdots x_n)} dx_1\, dx_2$$

デアル。1元カラ2元ニ移ッタトキト同ジ方法ヲ用ウレバ

(4.5) $F_3(y, x_4, x_5 \cdots x_n) = D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} \overline{U}_3^{(0)}(y, x_4, \cdots$
$\cdots x_n, x_1^0, x_2^0, x_3^0)\, E_0\left(y - Y(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4 \cdots x_n)\right)$

(4.6) $\overline{U}_3^{(0)}(y, x_4, x_5, \cdots x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$= \int_{\xi_3}^{x_3(y,\, x_4,\, \cdots x_n,\, \xi_1,\, \xi_2)} \int_{\xi_2}^{x_2(y,\, x_3,\, x_4,\, \cdots x_n,\, \xi_1)} \cdots$$

$$\cdots\int_{\xi_1}^{x_1(y,\, x_2,\, x_3\, \cdots x_n)} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

トナリ。追ッテ

(4.7) $F_n(y) = D_{a_n} D_{a_{n-1}} \cdots D_{a_2} D_{a_1} \overline{U}_n^{(0)}(y, x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0) \cdots$
$\cdots E_0\left(y - Y(x_1^0, x_2^0 \cdots x_n^0)\right)$

(4.8) $\overline{U}_n^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$

$$= \int_{\xi_n}^{x_n(y,\, \xi_1,\, \xi_2,\, \cdots \xi_{n-1})} \int_{\xi_{n-1}}^{x_{n-1}(y,\, x_n,\, \xi_1,\, \xi_2\, \cdots \xi_{n-2})}$$

$$\cdots\int_{\xi_{n-2}}^{x_{n-2}(y,\, x_{n-1},\, x_n,\, \xi_1,\, \xi_2,\, \cdots \xi_{n-3})} \cdots\cdots$$

$$\cdots\int_{\xi_2}^{x_2(y,\, x_3\, x_4\, \cdots\, x_n,\, \xi_1)} \int_{\xi_1}^{x_1(y,\, x_2,\, x_3\, \cdots x_n)} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

トナル。スナワチ次ノ定理ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理}}$ $x_1, x_2 \cdots x_n$ ノ基本区内デ単調函数 y_n ノ分布

函数 $F_n(y)$ ハ

$$F_n(y) = D_{a_n} D_{a_{n-1}} \cdots D_{a_2} D_{a_1} \overline{U}_n^{(0)}(y, x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0) E_0(y - Y(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0))$$

デアル。

§5. 単調函数ノ密度函数

密度函数ヲ $\Phi_n(y)$ トスレバ

$$(5.1)\quad \Phi_n(y) = \frac{d}{dy} F_n(y)$$

デアル。

§5.1　1元単調函数ノ場合

1元単調函数デハ(2.5)式ヲ用イ

$$(5.2)\quad \Phi_1(y) = \frac{1}{2a_1}\Big[\frac{d}{dy}\overline{U}_1^{(0)}(y, x_1^0 - a_1) E_0(y - Y(x_1^0 - a_1)) - \frac{d}{dy}\overline{U}_1^{(0)}(y, x_1^0 + a_1) E_0(y - Y(x_1^0 + a_1))\Big]$$

$$= \frac{1}{2a_1}\Big[\frac{d}{dy} X_1(y) E_0(y - Y(x_1^0 - a_1)) - \frac{d}{dy} X_1(y) E_0(y - Y(x_1^0 + a_1))\Big]$$

$$= D_{a_1}\Big[\frac{d}{dy} X_1(y) E_0(y - Y(x_1^0))\Big]$$

デアル。

$$(5.3)\quad \overline{U}_1^{(1)}(y, \xi_1) = \frac{d}{dy} X_1(y)$$

トオケバ

$$(5.2a)\quad \Phi_1(y) = D_{a_1} \overline{U}_1^{(1)}(y, \xi_1) E_0(y - Y(x_1^0))$$

デアル。

§5.2　2元単調函数ノ場合

コノ場合ニハ§3ノ結果ヲ用イ

$$\Phi_n(y) = \frac{1}{2a_1 2a_2}\frac{d}{dy} A(y)$$

$$(5.4)\quad \overline{U}_2^{(1)}(y, \xi_1, \xi_2) = \frac{d}{dy}\overline{U}_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \frac{d}{dy}\int_{\xi_2}^{X_2(y, \xi_1)} \cdots$$

$$\cdots\cdots\int_{\xi_1}^{x_1(y,x_2)} dx_1\,dx_2$$

$$=\int_{\xi_2}^{x_2(y,\xi_1)} \frac{dx_2(y,\xi_1)}{dy}\int_{\xi_1}^{x_1(y,x_2(y,\xi_1))} dx_1$$

デアルガ、$x_1(y,x_2(y,\xi_1))=\xi_1$ デアルカラ、第二項ハ０デ

$$(5.29a)\quad \mathrm{U}_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2)=\int_{\xi_2}^{x_2(y,\xi_1)} -\frac{d}{dy}x_1(y,x_2)\,dx_2$$

トナルカラ、(5.27)式ノ右項ニツイテ(5.29a)式ヲ用ヒレバ、結局

$$(5.30)\quad \Phi_2(y)=D_{\alpha_2}D_{\alpha_1}\mathrm{U}_2^{(1)}(y,x_1^0,x_2^0)\mathrm{E}_0(y-Y(x_1^0,x_2^0))$$

ヲ得ル。

§5.3 n元単調函数ノ場合

全ク同ジヨウニシテ

$$(5.31)\quad \Phi_n(y)=D_{\alpha_n}D_{\alpha_{n-1}}\cdots\cdots D_{\alpha_1}\mathrm{U}_n^{(1)}(y,x_1^0,x_2^0\cdots x_n^0)\,\mathrm{E}_0(y-Y(x_1^0,x_2^0\cdots\cdots x_n^0))$$

$$(5.32)\quad \mathrm{U}_n^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_n)=\frac{d}{dy}\mathrm{U}_n^{(0)}(y,\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n)$$

$$=\int_{\xi_n}^{x_n(y,\xi_1,\xi_2\cdots\xi_{n-1})}\int_{\xi_{n-1}}^{x_{n-1}(y,x_n,\xi_1,\xi_2\cdots\xi_{n-2})}\cdots$$

$$\cdots\cdots\int_{\xi_2}^{x_2(y,x_3x_4\cdots x_n,\xi_1)}\frac{d}{dy}x_1(y,x_2,x_3\cdots x_n)\,dx_2\cdots dx_n$$

ヲ得ル。

§6. 単調函数ノ代表分布函数ト代表密度函数

上ニ示シタトホリ、単調函数ノ分布函数ト密度函数トハソレゾレ $\mathrm{U}_n^{(0)}(y,\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)$、$\mathrm{U}_n^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_n)$ ヲ求メルコトニヨツテ容易ニ求メラレル。コレラヲソレゾレ代

487

表分布函数ト呼ンデオク。以下簡単ナ函数ニツイテコレラノ代表函数ヲ示シタ。

§6.1 和ト差。

[1] $$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{b_1}(y - b_2 x_2),\ x_2 = \frac{1}{b_2}(y - b_1 x_1)$$

$$U_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\frac{1}{b_2}(y - b_1\xi_1)} \left(\frac{1}{b_1}(y - b_2 x_2) - \xi_1\right) dx_2,$$

$$= \left[-\frac{1}{2b_1 b_2}(y - b_2 x_2 - b_1 \xi_1)^2\right]_{\xi_2}^{\frac{1}{b_2}(y - b_1\xi_1)}$$

$$= \frac{1}{2b_1 b_2}(y - b_1\xi_1 - b_2\xi_2)^2$$

$$U_2^{(1)}(y, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{b_1 b_2}(y - b_1\xi_1 - b\xi_2)$$

b_1, b_2 ノ符号ニヨッテ和ニモ差ニモナル。

[2] $$y = \sum^n b_i x_i \longrightarrow x_j = \frac{1}{b_j}\left(y - \sum^{j} b_i x_i\right)$$ [$\sum^j$ ハ $i=j$ ヲ除ク意味]

$$U_n^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n) = \frac{1}{n!\prod^n b_i}\left(y - \sum^n b_i \xi_i\right)^n$$

$$U_n^{(1)}(y, \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) = \frac{1}{(n-1)!\prod^n b_i}\left(y - \sum^n b_i \xi_i\right)^{n-1}$$

§6.2 調和中項

$$y = \frac{b_1 x_1 \cdot b_2 x_2}{b_1 x_1 + b_2 x_2} \longrightarrow x_1 = \frac{1}{b_1}\frac{b_2 x_2 y}{b_2 x_2 - y},$$

$$x^2 = \frac{1}{b_2}\frac{b_1 x_1 y}{b_1 x_1 - y}$$

$$U_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{b_1 b_2}\left[y^2 \log \frac{y^2}{(b_1\xi_1 - y)(b_2\xi_2 - y)} - y(b_1\xi_1 + b_2\xi_2) + \xi_1\xi_2\right]$$

$$\overline{U}_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{b_1b_2}\Big[2y\log\frac{y^2}{(b_1\xi_1-y)(b_2\xi_2-y)}$$
$$+\frac{b_1\xi_1y}{b_1\xi_1-y}+\frac{b_2\xi_2y}{b_2\xi_2-y}+b_1\xi_1b_2\xi_2\Big]$$

§6.3 $\quad y=b_1x_1+\dfrac{1}{b_2x_2}$

$$\to x_1=\frac{1}{b_1}\left(y-\frac{1}{b_2x_2}\right),\quad x_2=\frac{1}{b_2(y-b_1x_1)}$$

$$\overline{U}_2^{(0)}(y,\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{b_1b_2}\Big[\log\big(b_2\xi_2(y-b_1\xi_1)\big)+(1-b_2\xi_2y)$$
$$+b_1\xi_1b_2\xi_2\Big]$$

$$\overline{U}_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{b_1b_2}\left[\frac{1}{y-b_1\xi_1}-b_2\xi_2\right]$$

§6.4 積ト商

$$y=x_1^{m_1}x_2^{m_2}\longrightarrow x_1=y^{\frac{m_2}{m_1}}x_2^{-\frac{m_2}{m_1}},\quad x_2=y^{\frac{1}{m_2}}x_1^{-\frac{m_1}{m_2}}$$

$(x_1>0,\ x_2>0$ トス$)$

$$\overline{U}_2^{(0)}(y,\xi_1,\xi_2)=\left[\frac{m_1}{m_1-m_2}y^{\frac{1}{m_1}}x_2^{1-\frac{m_2}{m_1}}-\xi_1x_2\right]_{\xi_2}^{y^{\frac{1}{m_2}}\xi_1^{-\frac{m_1}{m_2}}}$$

$$=\frac{m_2}{m_1-m_2}y^{\frac{1}{m_2}}\xi_1^{1-\frac{m_1}{m_2}}+\frac{m_1}{m_2-m_1}y^{\frac{1}{m}}\xi_2^{1-\frac{m_2}{m_1}}+\xi_1\xi_2$$

$$\overline{U}_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{m_1-m_2}y^{\frac{1}{m_2}-1}\xi_1^{1-\frac{m_1}{m_2}}+\frac{1}{m_2-m_1}y^{\frac{1}{m_1}-1}\xi_2^{1-\frac{m_2}{m_1}}$$

$m_1=m_2=m$ ニオイテハ上式デ $m_1, m_2\to 0$ トシテ

$$\overline{U}_2^{(0)}(y,\xi_1,\xi_2)=y^{\frac{1}{m}}\log\frac{y^{\frac{1}{m}}}{\xi_1\xi_2}-y^{\frac{1}{m}}+\xi_1\xi_2$$

$$\overline{U}_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}\log\frac{y^{\frac{1}{m}}}{\xi_1\xi_2}$$

m_1, m_2 ニ簡単ナ数ノ組合セデ次ノヨウニナル。

$m_1=m_2=1\qquad y=x_1x_2\qquad \overline{U}_2^{(0)}=y\log\dfrac{y}{\xi_1\xi_2}-y+\xi_1\xi_2$

4.59.

$$U_x^{(1)} = \log \frac{y}{\xi_1 \xi_2}$$

$m_1 = 1,\ m_2 = 2 \qquad y = x_1 x_2^2$

$$U_2^{(0)} = -2\sqrt{y\xi_1} + \frac{y}{\xi_2} + \xi_1\xi_2$$

$$U_2^{(1)} = -\sqrt{\frac{\xi_1}{y}} + \frac{1}{\xi_2}$$

$m_1 = 1,\ m_2 = -1 \qquad y = \frac{x_1}{x_2}$

$$U_2^{(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\xi_1^2}{y} - \frac{1}{2} y \xi_2^2 + \xi_1\xi_2$$

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{\xi_1^2}{y^2} - \frac{1}{2}\xi_2^2$$

$m_1 = 1,\ m_2 = -2 \qquad y = \frac{x_1}{x_2^2}$

$$U_2^{(0)} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\xi_1^3}{y}} - \frac{2}{3} y \xi_2^3 + \xi_1\xi_2$$

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\xi_1^3}{y}} - \frac{1}{3}\xi_2^3$$

$m_1 = 2,\ m_2 = -1 \qquad y = \frac{x_1^2}{x_2}$

$$U_2^{(0)} = -\frac{1}{3}\frac{\xi_1^3}{y} - \frac{2}{3}\sqrt{y\xi_2^3} + \xi_1\xi_2$$

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{3}\frac{\xi_1^3}{y^2} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\xi_2^3}{y}}$$

$m_1 = 2,\ m_2 = -2 \qquad y = \frac{x_1^2}{x_2^2}$

$$U_2^{(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\xi_1^2}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\sqrt{y}\,\xi_2^2 + \xi_1\xi_2$$

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{4}\frac{\xi_1^2}{\sqrt{y^3}} - \frac{1}{4}\frac{\xi_2^2}{\sqrt{y}}$$

$m_1 = 1,\ m_2 = \frac{1}{2} \qquad y = x_1\sqrt{x_2}$

$$V_2^{(0)} = \frac{y^2}{\xi_1} - 2y\sqrt{\xi_2} + \xi_1\xi_2$$

$$V_2^{(1)} = \frac{2y}{\xi_1} - 2\sqrt{\xi_2}$$

$m_1 = 1,\ m_2 = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}}$

$$V_2^{(0)} = -\frac{1}{3}\frac{\xi_1^3}{y^2} - \frac{2}{3}y\sqrt{\xi_2^3} + \xi_1\xi_2$$

$$V_2^{(1)} = \frac{2}{3}\frac{\xi_1^3}{y^3} - \frac{2}{3}\sqrt{\xi_2^3}$$

$m_1 = \frac{1}{2},\ m_2 = -1 \quad y = \frac{\sqrt{x_1}}{x_2}$

$$V_2^{(0)} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\xi_1^3}}{y} - \frac{1}{3}y^2\xi_2^3 + \xi_1\xi_2$$

$$V_2^{(1)} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{\xi_1^3}}{y^2} - \frac{2}{3}y\xi_2^3$$

$m_1 = \frac{1}{2},\ m_2 = -\frac{1}{2} \quad y = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$

$$V_2^{(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\xi_1^2}{y^2} - \frac{1}{2}y^2\xi_2^2 + \xi_1\xi_2$$

$$V_2^{(1)} = \frac{\xi_1^2}{y^3} - y\xi_2^2$$

数個ノ x_i ノ場合モ求メタガ後日ニ譲ル。

§ 6.5. $y = \sqrt{x_1^2 \pm x_2^2} \quad (x_1 > 0,\ x_2 > 0)$

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \longrightarrow x_1 = \sqrt{y^2 - x_2^2},\quad x_2 = \sqrt{y^2 - x_1^2}$$

$$V_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}y^2\left(\cos^{-1}\frac{\xi_1}{y} - \sin^{-1}\frac{\xi_2}{y}\right) - \frac{1}{2}\xi_1\sqrt{y^2 - \xi_1^2}$$
$$- \frac{1}{2}\xi_2\sqrt{y^2 - \xi_2^2} + \xi_1\xi_2$$

1191

$$U_2^{(1)} = y\left(\cos^{-1}\frac{\xi_1}{y} - \sin^{-1}\frac{\xi_2}{y}\right)$$

$$y = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} \longrightarrow x_1 = \sqrt{y^2 + x_2^2}, \quad x_2 = \sqrt{x_1^2 - y^2}$$

$$U_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} y^2 \left(\cosh^{-1}\frac{\xi_1}{y} - \sinh^{-1}\frac{\xi_2}{y}\right) - \frac{1}{2}\xi_1$$

$$\times \sqrt{\xi_1^2 - y^2} - \frac{1}{2}\xi_2\sqrt{\xi_2^2 + y^2} + \xi_1\xi_2$$

$$U_2^{(1)} = y\left(\cosh^{-1}\frac{\xi_1}{y} - \sinh^{-1}\frac{\xi_2}{y}\right)$$

§ 6.6 $\quad y = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (x_1 > 0, \ x_2 > 0)$

$$y = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \longrightarrow x_1 = \frac{y x_2}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad x_2 = \frac{x_1}{y}\sqrt{1 - y^2}.$$

$$U_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\xi_1^2 - \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\xi_2^2$$

$$+ \xi_1\xi_2$$

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{\xi_1^2}{y^2\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{2}\frac{\xi_2^2}{\sqrt{(1-y^2)^3}}$$

§ 6.7 三角函数ノ和ト差.

[1] $\quad y = b_1 \tan x_1 + b_2 \tan x_2 \rightarrow x_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{b_1}(y - b_2 \tan x_2)\right)$

$$\therefore \frac{d}{dy}\tan^{-1}\left(\frac{1}{b_1}(y - b_2\tan x_2)\right) = \frac{\frac{1}{b_1}}{1 + \frac{1}{b_1^2}(y - b_2\tan x_2)^2}$$

$$U_2^{(1)}(y, \xi_1, \xi_2) = \left[\frac{y}{[(b_1 - b_2)^2 + y^2][(b_1 + b_2)^2 + y^2]}\right.$$

$$\times \log\frac{b_2^2 + t^2}{b_1^2 + (y - t)^2} + \frac{b_1^2 - b_2^2 + y^2}{[\ \ \text{"}\ \ ][\ \ \text{"}\ \ ]}\cdot\frac{1}{b_2}\tan^{-1}\frac{t}{b_2}$$

$$\left.\times \frac{b_2^2 - b_1^2 + y^2}{[\ \text{"}\ ][\ \text{"}\ ]}\frac{1}{b_1}\tan^{-1}\frac{y - t}{b_1}\right]_{b_2 \tan \xi_2}^{y - b_1 \tan \xi_1}$$

$$= \frac{y}{[(b_1-b_2)^2+y^2][(b_1+b_2)^2+y^2]} \log \frac{b_2^2+(y-b_1\tan\xi_1)^2}{b_1^2(1+\tan^2\xi_1)} \cdots$$

$$\cdots \frac{b_1^2+(y-b_2\tan\xi_2)^2}{b_2^2(1+\tan^2\xi_2)} + \frac{b_1^2-b_2^2+y^2}{[\ \ ][\ \ ]}\cdot\frac{1}{b_2}\left(\tan^{-1}\frac{y-b_1\tan\xi_1}{b_2}\right.$$

$$\left. -\xi_2\right) + \frac{b_2^2-b_1^2+y^2}{[\ \ ][\ \ ]}\cdot\frac{1}{b_1}\left(\tan^{-1}\frac{y-b_2\tan\xi_2}{b_1}-\xi_1\right)$$

〔2〕 $y = b_1\sin x_1 + b_2\sin x_2 \ (0 < x_1,\ x_2 < \frac{\pi}{2})$

$$\nabla_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}}\left[\mathrm{cn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{b_1-b_2+y}{b_1+b_2-y}\cdot\frac{b_1-y+b_2\sin\xi_2}{b_1+y-b_2\sin\xi_2}}\right)\right.$$

$$\left. -\mathrm{cn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{b_1-b_2+y}{b_1+b_2-y}\cdot\frac{1-\sin\xi_1}{1+\sin\xi_1}}\right)\right]$$

$$k^2 = \frac{(b_1+b_2)^2-y^2}{4b_1b_2}$$

トクニ $b_1 = b_2 = 1$ ノトキニハ $k^2 = 1-\frac{y^2}{4}$ デ

$$\nabla_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2) = K - \mathrm{cn}^{-1}\sqrt{\frac{y}{2-y}\cdot\frac{1-\sin\xi_1}{1-\sin\xi_1}} - \mathrm{cn}^{-1}$$

$$\times\sqrt{\frac{y}{2-y}\cdot\frac{1-\sin\xi_2}{1+\sin\xi_2}} - \mathrm{cn}^{-1}\sqrt{\frac{y}{2-y}\cdot\frac{1-\sin\xi_2}{1+\sin\xi_2}}$$

§6.8 反円函数ノ和ト差

〔1〕. $y = \tan^{-1}x_1 \pm \tan x_2 \longrightarrow x_1 = \frac{\tan y \mp x_2}{1 \pm x_2\tan y}$,

$$x_2 = \pm\frac{\tan y - x_1}{1+x_1\tan y}$$

$$\nabla_2^{(0)}(y;\xi_1,\xi_2) = \pm\operatorname{cosec}^2 y \log\frac{\sec^2 y}{(1+\xi_1\tan y)(1\pm\xi_2\tan y)}$$

$$\mp(1-\xi_1\cot y) + \xi_2\cot y + \xi_1\xi_2$$

$$\nabla_2^{(1)}(y;\xi_1,\xi_2) = \mp 2\operatorname{cosec} y\cot y\log\frac{\sec^2 y}{(1+\xi_1\tan y)(1\pm\xi_2\tan y)}$$

$$\pm \operatorname{cosec}^2 y \left(\frac{\tan y - \xi_1}{1 + \xi_1 \tan y} + \frac{\tan y \mp \xi_2}{1 \pm \xi_2 \tan y} - \xi_1 \mp \xi_2 \right)$$

[2] $y = \sin^{-1} x_1 \pm \sin^{-1} x_2 \quad (0 < x_1, x_2)$

$$\overline{V}_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \pm \frac{1}{2} \sin y \,(y - \sin^{-1} \xi_1) - \frac{1}{2} \sin y \sin^{-1} \xi_2$$
$$\mp \frac{1}{2} \xi_1 \left(\sin y \cdot \sqrt{1-\xi_1^2} - \xi_1 \cos y\right)$$
$$- \frac{1}{2} \xi_2 \left(\sin y \cdot \sqrt{1-\xi_2^2} \mp \xi_2 \cos y\right) + \xi_1 \xi_2$$

$$\overline{V}_2^{(1)}(y, \xi_1, \xi_2) = \mp \frac{1}{2} \cos y \,(y - \sin^{-1} \xi_1) - \frac{1}{2} \cos y \sin^{-1} \xi_2$$
$$\pm \frac{1}{2} \sin y$$
$$\mp \frac{1}{2} \xi_1 \left(\cos y \sqrt{1-\xi_1^2} + \xi_1 \sin y\right) - \frac{1}{2} \xi_2 \left(\cos y \sqrt{1-\xi_2^2}\right.$$
$$\left. \pm \xi_2 \sin y\right)$$

§ 1.4 $\quad y = b_1 x_1^2 + \dfrac{b_2}{x_2^2} \quad (x_1, x_2 > 0)$

[1] $y = b_1 x_1^2 + \dfrac{b_2}{x_2^2} \quad (b_2 > 0)$

$$\overline{V}_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{\xi_2}\sqrt{\frac{b_2}{y}}\right) - \sin^{-1}\left(\xi_1 \sqrt{\frac{b_1}{y}}\right)\right)$$
$$- \sqrt{\frac{1}{b_1}(y \xi_2^2 - b_2)} + \xi_1 \xi_2$$

$$\overline{V}_2^{(1)}(y, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2y} \left[\frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{1}{b_2}(y - b_1 \xi_1^2)}} - \sqrt{\frac{1}{b_1}(y \xi_2^2 - b_2)} \right].$$

$b_1 < 0$ ノトキハ $\dfrac{1}{i} \cos^{-1} A = \cosh^{-1} A$, $\dfrac{1}{i} \sin^{-1} iA = \sinh^{-1} A$

[2] $y = b_1 x_1^2 - \dfrac{b_2}{x_2^2} \quad (b_2 > 0)$

$$\overline{V}_2^{(0)}(y, \xi_1, \xi_2) = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \left[\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\xi_2}\sqrt{\frac{b_2}{y}}\right) - \cosh^{-1}\left(\xi_1 \sqrt{\frac{b_1}{y}}\right)\right]$$

$$-\sqrt{\frac{1}{b_1}(y\xi_2^2+b_2)}+\xi_1\xi_2$$

$$v_2^{(1)}(y,\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2y}\left[\frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{1}{b_2}(b_1\xi_1^2-y)}}-\sqrt{\frac{1}{b_1}(\xi_2^2y+b_2)}\right]$$

アトガキ　以上ハキワメテ簡単ナ所ニスギナイガ、イロイロナ場合ヲ考ヘテ調ベテ見ル必要ガアル。マタ実際ノ問題デハ代表函数スラモタヤスク求メラレナイコトガ多イデアラウシ、a_iガx_i^0ニクラベテ小サク、yガ$Y(x_i^0)$ニクラベテアマリ大キクナイ場合ノ近似計算ノ方法、多價函数ノ場合ノ処理方法ナドモ当然考ヘナケレバナルマイ。コレラニツイテハ後ニ譲ル。