相関アル Chain 現象ニ就テ

林知己夫

従来主トシテ論ジラレテアル問題ハ一ツノ chain ガアル法則、——例 Markoff ノ法則 —— ニ従ツテ構成セラレテヰル場合デアル。今此処デハ互ニ影響ヲ及ボシアツテ生ズル二ツノ chain 乃至ハ一ツノ以上ノ chain ニ影響セラレテ生ズル chain ノ問題ヲ二三考ヘテミルコトニシヤウ

§1. 定義及ビ既ニ得ラレテヰル定理

[定義1] $\Phi=(\varphi_{\alpha\beta})$ ----- matrix ---- ガ次ノ條件ヲミタストキ Stochastic matrix ト言フ

(i) $\sum_{\beta}\varphi_{\alpha\beta}=1$, $(\alpha;\beta=1----n)$

(ii) Φ ノ行モ列モ凡テ 0 許リヲモツモノハナイ

[定義2]

Φ ヲ $\varphi_{\alpha\beta}>0$ $(\alpha,\beta=1,---n)$ ノ時 positive ト言ヒ

$\varphi_{\alpha\beta}\geqq 0$ $(\alpha,\beta=1,---n)$ ノ時 non-negative ト言フ

[定義3]

$M=(a_{\alpha\beta})$ $(\alpha,\beta=1,---n)$ ハ次ノ條件ヲミタストキ分解可能然ラザルトキ分解不可能ト言フ

即チ行及ビ列ノ同一ノ置換（a行トb行トヲ入レカヘル、a列トb列トヲ入レカヘル）ニヨツテ

$A=\begin{pmatrix}P&Q\\R&S\end{pmatrix}$ ノ形ニスルコトノ出来ル時、此処ニ

P,Q,R,S ハ小行列デアリ P,S ハ正方行列, Q,R ハ矩形行列デアリ　Q,R ノウチ少クトモ一ツガ 0 ニ等シイモノトスル

[定義4] non-negative matrix $A=(a_{\alpha\beta})$ ハ次ノ時 primitive ニトヨバレル；即チ此ノ最大固有値 λ ガ他ノ凡テノ固有値 λ ヨリ絶対値ニ於テモ大キイ

時即チ $|\lambda|>|\lambda'|$ ナルトキ。

［定理 1］

Stochastic matrix ハ固有値 1 ヲ必ズモツ

［定理 2］

positive ナ Stochastic matrix ハ分解不可能デアリ又 primitive デアル。ソシテ固有値 1 ヲ単根トシテモ・

$X_1, X_2, X_3, \cdots$ ヲ Markoff ノ単純 chain トスル

即チ其等ノ random variable ノ取リ得ル状態ハ $E_1, \cdots E_n$ トシ $\varphi_{\alpha\beta}$ ヲ E_α ニ E_β ヘノ遷移確率トスル

$p_{k|\alpha\beta}$ ヲ初メ E_α ニアツタモノガ k 回目ニ E_β ニアル確率ヲアラハストスレバ

$$p_{k|\alpha\beta} = \sum_{\gamma}^{n} p_{k-1|\alpha\gamma} \cdot \varphi_{\gamma\beta}$$ ガ成立スル

$p_{k|\beta}$ ハ k 回目ニアル確率ヲ示ス

［定理 3］ Stochastic matrix ガ分解不可能 primitive デアルナラバ，次ノ結果

$$p_{k|\beta} = p^0_\beta + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(m_i-1)!} \left[\frac{d^{m_i-1}}{d\lambda} \lambda^k \Phi_{i\beta}(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda_i}$$

ヲ得ル。

コヽニ ① ノ $\lambda_1 \cdots \lambda_s$ ハ夫々ノ $m_1 \cdots m_s$ 重ノ固有値デアリ $|\lambda_i|<1$ $(i=1, \cdots s)$ デアル

② $$p_\beta = \frac{\Phi_{\beta\beta}(1)}{\sum_{\beta} \Phi_{\beta\beta}(1)}$$

$$\Phi_{i\beta}(\lambda) = \frac{1}{\psi_i(\lambda)} \sum_{\alpha=1}^{n} p_{0\alpha} \Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$$

③ (イ) $p_{0\alpha}$ ハ E_α ヲ第一回目ニトル確率

(ロ) $\Phi_{\alpha\beta}(\lambda)$ ハ

$(\lambda E - \Phi)$ ノ $\underline{-\varphi_{\beta\alpha}}$ ノ余因数 $(\alpha \neq \beta)$ ナス

$1-\varphi_{\beta\beta}$ ノ余因数（$\alpha=\beta$）デアル

㈢ $\eta_i(\lambda) = \dfrac{|\lambda E - \Phi|}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}$

尚ホ $p_{K|\beta}$ ハ k ガ大ナルニ従ヒ p_β ニ収斂スル。即チ p_β ハ $p_{0\alpha}$ ニ依存シナイ

［定理4］ $\sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_{\lambda\beta} = 1$ ガ成立スルトキ

$$\lim_{K\to\infty} p_{K|\alpha\beta} = \frac{1}{n}$$ トナル。

参考文献

Hadamard-Fréchet : Sur les probs discontinus des évènements en chaîne Zeit. für Ange und Mech 13, 1933

Hostinsky : Méthodes générales du Calcul du Prob 1931 Mémorial 52

Perron : Zur Theorie der Matrices Math Ann 64 1907

Romanovsky : Recherches sur les chaines de Markoff Acta Math, 66, 1936

§2 定マッタ法則ニ従フ chain ニ影響セラレテ生ズル Chain

1, $\left.\begin{array}{l} X_0, X_1, X_2, \cdots\cdots \\ Y_0, Y_1, Y_2, \cdots\cdots \end{array}\right\}$ 単純 markoff chain トスル

此等ノ variable ハ夫々 $\left.\begin{array}{l} E_1 \cdots E_l \\ E'_1 \cdots E'_m \end{array}\right>$ ナル状態ヲ取リ得ルモノトスル

コヽニ X_0, Y_0 ガ E_i, E'_j トル確率ヲ夫々 p_{0i}, q_{0j} トスルナラバ

$$\sum_i^l p_{0i} = 1,\ \sum_j^m q_{0j} = 1$$ ヲ満足スル。

更ニ Markoff chain デアルカラ

* $\varphi_{\alpha\beta} = P(X_{n+1} \in E_\beta \mid X_n \in E_\alpha)$

$$\psi_{\alpha\beta} = P(Y_{n+1} \in E'_\beta \mid Y_n \in E'_\alpha)$$

即チ X_n, (Y_n) ガ E_α, (E'_α) ニ属シテヰルトキ X_{n+1}, (Y_{n+1}) ガ E_β, (E'_β) ニ属スル確率ガ与ヘラレテヰル。

次ニヌ $p_{k|\beta} = P(X_k \in E_\beta)$

$q_{k|\beta} = P(Y_k \in E'_\beta)$ トカクコトニスル

今此等ノ chain ニ独立ニ影響セラレル第三ノ chain Z_0, Z_1, Z_2 ------ ヲ考ヘヨウ

此等ハ状態 $E''_1 \cdots E''_n$ ヲトリウルモノトスル

ZガXノミニヨツテ相関セラレテ居ル場合ハ既ニ ⊕ Romanovsky ニヨツテ考ヘラレテ居ルノデアルカラ今ZガX, Yニヨツテ独立スル相関セラレテヰルモノノ1ツヲ簡単ニ考ヘテミルコトニスル

⊕ Quelques problèmes nouveaux de la théorie des chaînes de Markoff [Actualité 737 · Le Principe ergodique et les problèmes en chaînes ノ一部]

$$\begin{array}{lllllll}
X & X_0, & X_1, & X_2, & \cdots & X_k & \cdots \\
Y & Y_0 & Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_k & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
Z & Z_0 & Z_1 & Z_2 & & Z_k &
\end{array}$$

$$\gamma_{k|\alpha,\beta,\gamma} = P(X_k \in E_\alpha,\ Y_k \in E'_\beta,\ Z_k \in E''_\gamma)$$

$$= p_{k|\alpha} \cdot q_{k|\beta} \cdot \chi_{\alpha\beta\cdot\gamma} \quad \left(\begin{array}{l}\alpha = 1, \cdots l \\ \beta = 1 \cdots m \\ \gamma = 1 \cdots n\end{array}\right)$$

---

*註 $P(\circ|\circ)$ ハ○印ノ成立シテヰルトキ○ノ起ル確率ヲ示ス記号トスル

$x_{\alpha\beta\cdot\gamma}$ ハ X_k ガ E_α ニ属シ Y_k ガ E'_β ニ属スル時 Z_k ガ E''_γ ニ属スル確率ヲ与ヘルモノデアッテ此ガ相関ヲ定メルトコロノ因子デアリ此ハ予メ与ヘラレテヰルモノトスル（k ニ無関係）

言フ迄モナク $\sum_\gamma x_{\alpha\beta\cdot\gamma} = 1$ ハ成立スル

第一ニ此ノ時 Z ノ chain ノ法則（遷移確率）ハ如何ニシテ与ヘラレルモノデアラウカ

$$r_{k|\gamma} = P(Z_k \in E''_\gamma)$$ トスレバ

$$r_{k|\gamma} = \sum_\alpha \sum_\beta r_{k|\alpha\cdot\beta\cdot\gamma} = \sum_\alpha \sum_\beta p_{k|\alpha}\, q_{k|\beta}\, x_{\alpha\beta\cdot\gamma}$$

ガ成立スル

$${}_k\xi_{\delta\gamma} = P(Z_k \in E''_\gamma \mid Z_{k-1} \in Z''_\delta)$$ トスレバ

$$r_{k|\gamma} = \sum_\delta r_{k-1|\delta}\, {}_{k-1}\xi_{\delta\gamma}$$ デアル

${}_k\xi_{\delta\gamma}$ ノ意味ヲ考ヘルナラバ

$$\begin{aligned}{}_k\xi_{\delta\gamma} = \sum_{\alpha,\lambda}\sum_{\beta,\mu} & P(X_{k-1}\in E_\alpha\ Y_{k-1}\in E'_\beta \mid Z_{k-1}\in E''_\delta) \\ & \cdot P(X_k \in E_\lambda \mid X_{k-1}\in E_\alpha)\cdot P(Y_k\in E'_\mu \mid Y_{k-1}\in E'_\beta) \\ & \cdot P(Z_k \in E''_\gamma \mid X_k \in E_\lambda,\ Y_k \in E'_\mu)\end{aligned}$$

ナルコトガワカル

第一項 原因ノ確率デ考ヘルナラバ即チ $Z_{k-1}\in E''_\delta$ ヲ知ッテヰル時此ガ $X_{k-1}\in E_\alpha$, $Y_{k-1}\in E'_\beta$ ニ原因スル確率ト考ヘルナラバ

$$第一項 = \frac{p_{k-1|\alpha}\, q_{k-1|\beta}\, x_{\alpha\beta\cdot\gamma}}{\sum_\alpha \sum_\beta p_{k-1|\alpha}\, q_{k-1|\beta}\, x_{\alpha\beta\cdot\delta}} = \frac{p_{k-1|\alpha}\, q_{k-1|\beta}\, x_{\alpha\beta\cdot\delta}}{r_{k-1|\delta}}$$

第二項 $= \varphi_{\alpha\lambda}$
第三項 $= \psi_{\beta\mu}$
第四項 $= \chi_{\lambda\mu,\gamma}$
故ニ

$$ {}_k\xi_{\delta\gamma} = \sum_{\alpha,\lambda}\sum_{\beta,\mu} \frac{p_{k-1|\alpha}\, q_{k-1|\beta}\, \chi_{\alpha\beta\gamma}}{r_{k-1|\delta}}\, \varphi_{\alpha\lambda}\, \psi_{\beta\mu}\cdot \chi_{\lambda\mu,\gamma} $$

トナリコレニヨッテZノ遷移確率ガ与ヘラレタコトニナルガ此ガ k ニdep.スルコトハ注目ニ価スル 東
此ノ様ニmarkoffノ単純chainヨリ自然ニ引キ出サレタchainハ既ニmarkoffノchainヲナサズ所謂Onicescu等ノ云フ"chaînes à liaisons complètes"ニナッテ居ルノデアリ此ノchainノ性質ハ別研究ヲ要スル

(Octave Onicescu et Georges Mihoc.
La dépendance statistique, chaînes et familles de chaînes discontinues (1937, actualité 503)

此ノchainガ且ツmarkoffノ単純chainニナル為ニハ

$$ p_{k|\alpha} = {}_\alpha p,\quad q_{k|\alpha} = {}_\alpha q $$

ノ如クX,(Y)ガ E_α,(E'_α)ニ当スル確率ガ常ニ一定デアレバ十分デアル。猶 $p_{k-1|\alpha}$ 等ハ[定理3]ニヨッテ求メラレル。今($\varphi_{\alpha\beta}$)($\psi_{\alpha\beta}$)ガ分解可能デアリ且primitiveデアレバ

$$ \lim_{k\to\infty} p_{k|\beta} = p_\beta \qquad \lim_{k\to\infty} q_{k|\beta} = q_\beta $$

デアルカラ

$$ \lim r_{k|\gamma} = \sum_\alpha\sum_\beta p_\alpha\, p_\beta\, \chi_{\alpha,\beta,\gamma} $$ トナリ定メラレル

又特ニ φ, Ψ ガ[定理4]ノ條件ヲミタシテ居ルカラバ $\lim r_{k|\gamma} = \frac{1}{lm}\sum_\alpha\sum_\beta \chi_{\alpha\beta,\gamma}$ トナル

カクノ如クcorrelation関係ハlimitニ於テモ保持

オレテヰルコトガワカル

2. X : $X_0\ X_1 \cdots X_2 \cdots\cdots$ 單純 Markoff ノ Chain
Y : $Y_0\ Y_1 \cdots Y_2 \cdots\cdots$
Z : $Z_0\ Z_1\ Z_2 \cdots\cdots$

YハXト相関アリ。ZハYト相関アルモノトスル
即チリノ相関ノ法則ガ与ヘラレテヰルトスル
尚 X, Y, Z ハ前ト同様ニ夫々状態 $E_1 \cdots E_\ell$, $E'_1 \cdots E'_m$
$E''_1 \cdots E''_m$ ノミヲトルモノトスル

$X \xrightarrow{\text{相関}} Y$ デアルカラ 1 ト全ク同様ニシテ Y ノ法則
ガ発見サレル

$$g_{k|\beta\gamma} = P(X_k \in E_\beta,\ Y_k \in E'_\gamma) = p_{k|\beta} \cdot \psi_{\beta\gamma}$$

$\psi_{\beta\gamma}$ ハ X_k ガ E_β ニ属シテヰルトキ
Y_k ガ E'_γ ニ属スル確率ヲ示スモノデアリ此ハ
予メ与ヘラレテヰル（k ニ無関係）

$$g_{k|\gamma} = P(Y_k \in E'_\gamma) = \sum_\beta g_{k|\beta\gamma} = \sum_\beta p_{k|\beta} \psi_{\beta\gamma}$$

ソウスレバ Y ノ Chain ノ法則

$${}_k\xi_{\alpha\beta} = P(Y_k \in E'_\beta \mid Y_{k-1} \in E'_\alpha) \text{ ハ}$$

$$= \sum_{\delta\sigma} \frac{p_{k-1|\delta}\, \psi_{\delta\alpha}}{g_{k-1|\alpha}}\, \varphi_{\delta\sigma}\, \psi_{\sigma\beta} \quad \text{トナル}$$

$$\begin{array}{cc} Y_{k-1} & Y_k \\ \downarrow & \downarrow \\ Z_{k-1} & Z_k \end{array}$$

之ヲ用ヒ Z ノ法則ヲ決定スル

$$\gamma_{k/\alpha\beta} = P(Y_k \in E'_\alpha,\ Z_k \in E''_\beta)$$

464·6

$$= q_{k|\alpha}\chi_{\alpha\beta} = \sum_\gamma p_{k|\gamma}\psi_{\gamma\alpha}\chi_{\alpha\beta}$$

$\chi_{\alpha\beta}$ ハ Y_k ガ E'_α ニ属スル時 Z_k ガ E''_β ニ属スル確率デアリ此ガ Y ト Z トノ相関ヲ定メル因子デアリ此ハ予メ与ヘラレテアル（k ニ無関係）

$$r_{k|\beta} = P(Z_k \in E''_\beta) = \sum_\alpha q_{k|\alpha}\chi_{\alpha\beta} = \sum_\alpha\sum_\gamma p_{k|\gamma}\psi_{\gamma\alpha}\chi_{\alpha\beta}$$

此処デ 1. ト同様ニシテ

$${}_k\gamma_{\delta\sigma} = P(Z_k \in E''_\sigma \mid Z_{k-1} \in E''_\delta)$$

$$= \sum_\alpha\sum_\beta \frac{q_{k-1|\alpha}\chi_{\alpha\delta}}{r_{k-1|\delta}}\, {}_k\varphi_{\alpha\beta}\,\chi_{\beta\sigma} \text{。}$$

$$= \sum_\alpha\sum_\beta \frac{q_{k-1|\alpha}\chi_{\alpha\delta}}{r_{k-1|\delta}} \sum_a\sum_b \frac{p_{k-1|a}\psi_{a\alpha}}{q_{k-1|\alpha}}\varphi_{ab}\psi_{b\beta}\chi_{\beta\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sum_\alpha\sum_a p_{k-1|a}\psi_{a\alpha}\chi_{\alpha\delta}} \sum_\alpha\sum_\beta\sum_a\sum_b \chi_{\alpha\delta}\, p_{k-1|a}\psi_{a\alpha}\varphi_{ab}\psi_{b\beta}\chi_{\beta\sigma}$$

ニヨツテ Z ノ法則ガ与ヘラレル。此モ亦 k ニ dep. スルトコロノモノダ。$p_{k-1|c}$ 等ハ〔定理 3〕ニ由ツテ求メラレル。此ニツイテモ 1. ト同様ニ考ヘラレル 前ト同様（φ）ガ分解不可能 primitive トスレバ

$\lim p_{k|\alpha} = p_\alpha$ デアルカラ

$\lim q_{k|\alpha} = \sum_\beta p_\beta\psi_{\beta\alpha} = q_\alpha$ 故ニ

$\lim r_{k|\alpha} = \sum_\gamma q_\gamma\chi_{\gamma\alpha} = \sum_\beta\sum_\gamma p_\beta\psi_{\beta\gamma}\chi_{\gamma\alpha} = r_\alpha$

ニヨツテ与ヘラレル

3. X_{-1}, X_0, X_1, X_2 ----- Markoff ノ simple chain
Y_{-1} Y_0 Y_1 Y_2 -----
各 variable ノトリウル状態ヲ夫々 $E_1 \cdots E_l$, $E'_1 \cdots E'_m$ トスル X ト Y トガ相関スルノデアルガ此ハ従前ノ

但シ k ニ独立ニ $\varphi_{\alpha\beta}$ トナラ [illegible] ノデ
$k-1$ 回目ニ実現セラレタ値ニ dep. スルモノト考ヘヨウ。

$$\vartheta_{k|\alpha\beta}=P(X_k\in E_\alpha,\ Y_k\in E'_\beta)$$

$$=\sum_\gamma\sum_\delta \vartheta_{k-1|\gamma\delta}\,\varphi_{\gamma\alpha}\psi_{\gamma\delta,\alpha\beta}$$

コヽニ $\psi_{\gamma\delta,\alpha\beta}$ ハ $X_{k-1}\in E_\gamma$ ノ時 $X_{k-1}\in E'_\delta$ ナラバ $X_k\in E_\alpha$ ノ時 $Y_k\in E'_\beta$ ナル確率ヲアラハス所ノモノデアリ k ニ無関係デアリ

$\sum_\beta\psi_{\gamma\delta,\alpha\beta}=1$ ヲ満足スル

$$\vartheta_{k|\beta}=\sum_\alpha\vartheta_{k|\alpha\beta}$$

1. ト同様ノ考ヘデ此ノ chain ノ法則ヲ書ケバ [illegible] レバ

$$\delta_{\beta\gamma}=P(Y_k\in E'_\gamma\mid Y_{k-1}\in E'_\beta)$$

$$=\sum_a\sum_b\frac{\vartheta_{k-1|a\beta}}{\vartheta_{k-1|\beta}}\varphi_{ab}\psi_{a\beta,b\gamma}\qquad \text{トナツテ}$$

形式的ニハ全ク 1 ト同様ニ考ヘラレル
但シ此ノ場合 ergodic ノ問題ハ此儘簡単ニハ解決出来ナイ。

§2. 互ニ影響ヲ反ボシ乍ラ進ム場合

1. $X_0,\ X_1,\ X_2\ \text{------}$ 　　X chain
　$Y_0\quad Y_1\quad Y_2\ \text{------}$ 　　Y chain.

共ニ状態 $E_1,\cdots,E_n$ ノミヲトルトスル

$$(1)\ \begin{cases}\varphi_{\alpha\beta}=P(X_k\in E_\beta\mid Y_{k-1}\in E_\alpha)\\ \psi_{\alpha\beta}=P(Y_k\in E_\beta\mid X_k\in E_\alpha)\end{cases}\quad \text{トスル}\quad \begin{cases}\sum_\beta\varphi_{\alpha\beta}=1\\ \sum_\beta\psi_{\alpha\beta}=1\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_1 & & X_2 & & \\ & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \cdots\cdots \\ Y_0 & & Y_1 & & Y_2 & & \end{array}$$

ノ如ク法則(1)ニ従ヒ chain ガ構成セラレテユクモノトスレバ

今 ${}_k p_{\gamma\delta} = P(X_k \in E_\delta \mid X_{k-1} \in E_\gamma)$

$$= \sum_\alpha P(Y_{k-1} \in E_\alpha \mid X_{k-1} \in E_\gamma) \cdot P(X_k \in E_\delta \mid X_{k-1} \in E_\alpha)$$

$$= \sum_\alpha \psi_{\gamma\alpha}\varphi_{\alpha\delta} = p_{\gamma\delta}$$

此ガ X ノ Chain ノ法則デアリ同様ニ Y chain ノ法則ハ
${}_k q_{\gamma\delta} = \sum_\alpha \varphi_{\gamma\alpha}\psi_{\alpha\delta} = q_{\gamma\delta}$ ニヨリ与ヘラレ
此ノ $(p_{\gamma\delta})$, $(q_{\gamma\delta})$ ガ Stochastic matrix ナル事ハ容易ニ了解セラレル
別々ニ X, Y ノミヲ眺ムレバ $(p_{\gamma\delta})$, $(q_{\gamma\delta})$ ヲ遷移確率トシテ有ツ所ノ markoff ノ単純 chain トナッテヰルコトガ分ル
従ッテ $(p_{\gamma\delta})$, 又ハ $(q_{\gamma\delta})$ ガ分解不可能デアリ primitive デアルナラバ

(2) $\lim_{k\to\infty} p_{k|\alpha} = p_\alpha \quad \lim_{k\to\infty} q_{k|\alpha} = q_\alpha$ ガ成立スル。

(註) $(\varphi_{\alpha\beta})$, $(\psi_{\alpha\beta})$ ガ行及列ニ於テ或行ノ α 番目ト或列ノ α 番目トニ於テ孰レカ一ツハ0デナイ、——($\alpha = 1 \cdots n$ ノ總テニツキ)——トナッテヰルコトガ分レバ $(p_{\alpha\beta})$, $(q_{\gamma\sigma})$ ハ positive matrix トナリ明ラカニ(2)ガ成立スル

〔例〕甲、乙二人ノ人ガ追ヒ遊ビノ遊戯ヲヤル。二人ノトリ得ル場所ヲ $E_1, E_2, \cdots E_n$ トスル。甲ガ或場所ヲ占メタ時例ヘバ E_α ヲ占メタ時乙ハソノ占メタ場所ヲ確実ニ知リ得ズ。然シ何カノ徴候ニヨリ

リノ位置ヲ推察スルコトガ出来ル。乙ハ甲カラ逃ゲヨウトシテヰル。従ツテE_αヲ甲ガ占メタトキ乙ハ自己ノ判断ニ基クE_αノ推定位置ヲサケテ行動スルコトトナル。コノ判断ハ甲ガ同ジ場所ヲ占メテ居ルニ拘ラズ知リ得タル徴候ニ伴ヒ種々ニ変化スルモノデアルコトヲ考ヘ此ノ行動反判断ヲ$(\psi_{\alpha\beta})$ニヨツテ表現スルコトニシヨウ。

次ニ乙ノ占メタ位置ヲ甲ガ推察シ此ヲ追ヒカケルノデアルガ乙ガE_αヲ占メテヰタトキ甲ノ判断ニヨル行動ヲ$(\varphi_{\alpha\beta})$ニヨツテ表現スルコトニシヨウ。

$(\varphi_{\alpha\beta})$, $(\psi_{\alpha\beta})$ノ意味ハ1.デ説明シト通リスル

甲ノ chain ノ法則ハ $\left(\sum_{\beta}\psi_{\gamma\beta}\varphi_{\sigma\beta}\right)=(p_{\gamma\delta})$

乙 $\left(\sum_{\gamma}\varphi_{\alpha\gamma}\psi_{\gamma\beta}\right)=(q_{\gamma\delta})$

ニヨリ与ヘラレル

(イ) 此等ガ前頁ノ註ノ要件モシクハ分解不可能 *primitive* デアレバ

(2) ト同様ニ $\lim_{k\to\infty} p_{k|\alpha}=p_\alpha$, $\lim_{k\to\infty} q_{k|\alpha}=q_\alpha$

p_α, q_α ハ [定理3] ニ従ヒ求メラレル

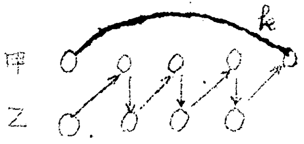
即チ甲ガ無限回乙ニツレテ行動シタ結果E_αナル状態ヲ占メル確率　乙ガ無限回甲ニツレテ行動シタ結果E_γナル状態ヲ占メル確率ガ求メラレタコトニナル。

(ロ) 又此ガ甲乙ノ$2k$回ノ行動迄ブツカリ合ハヌ確率P_{2K}ハ

$$P_{2K}=\sum_{\alpha}\sum'_{\beta_1}\sum'_{\beta_2}\cdots\sum'_{\beta_{2K}}\varphi_{\alpha\beta_1}\cdot\psi_{\beta_1\beta_2}\varphi_{\beta_2\beta_3}\cdots\cdot\psi_{\beta_{2K-1}\beta_{2K}},$$

Σ' ハ *suffix* ノ同一ノモノハ除カテ加ヘル記号デアルトスル

(ハ) 丁度甲ノk回目ノ行動ヲ甲ト乙トガ重ナリ合フ確率ヲ与ヘヨウ



$$q_{k|\alpha} = q_\alpha + B_k$$

B_k ハ [定理3] ヨリワカル

故ニブツカリ合フ確率ハ

$$\sum_{\alpha=1}^{n} q_{k|\alpha}\varphi_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n}(q_\alpha + B_k)\varphi_{\alpha\alpha}$$

同様ニ乙ノk回目ノ行動デ重ナリ合フ確率ハ

$$p_{k|\alpha} = p_\alpha' + A_k$$ トスレバ

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_{k|\alpha}\psi_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n}(p_\alpha + A_k)\psi_{\alpha\alpha}$$ トナル

無限回行動ヲ続ケタトキ

甲ノ行動デブツカリ合フ確率ハ $\sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha\varphi_{\alpha\alpha}$

乙　〃　〃 $\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\psi_{\alpha\alpha}$

ニヨツテ与ヘラレル

(ニ) (φ), (ψ) ガ [定理4] ノ條件ヲミタセバ……

$\sum_\gamma p_{\gamma\delta} = 1$, $\sum_\gamma q_{\alpha\delta} = 1$ ガ成立シ $p_\alpha = q_\alpha = \frac{1}{n}$ ヲ得。

無限回行動ヲ続ケタトキブツカリ合フ確率ハ何レモ $1/n$ トナル。

(ホ) 計算例 E_1, E_2, E_3 ヲ取リ得ル状態トシ

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} \underline{0.6} & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & \underline{0.6} & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & \underline{0.6} \end{pmatrix} \quad (\psi) = \begin{pmatrix} \underline{0.2} & 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & \underline{0.2} & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & \underline{0.2} \end{pmatrix}$$

トスレバ

$$(p) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.32 & 0.43 \\ 0.38 & 0.28 & 0.34 \\ 0.37 & 0.32 & 0.31 \end{pmatrix} \quad (q) = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.28 & 0.4 \\ 0.38 & 0.28 & 0.34 \\ 0.37 & 0.32 & 0.31 \end{pmatrix}$$

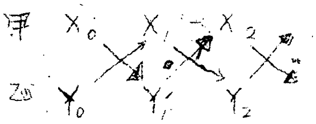
ヲ得、此カラ

$p_1 = \frac{3880}{11480} \fallingdotseq 0.338$ $\qquad q_1 = \frac{3880}{10924} \fallingdotseq 0.3$[illegible]

$p_2 = \frac{3584}{[illegible]1050} \fallingdotseq 0.314$ $\qquad q_2 = \frac{3220}{10924} \fallingdotseq 0.294$

$p_3 = \frac{3986}{11450} \fallingdotseq 0.348$ $\qquad q_4 = \frac{3832}{10924} \fallingdotseq 0.350$

2. notationハソノマヽニシテ chain ノ運ビ方ヲ変ヘテミヨウ



即チ chain ハ X_k ハ Y_{k-1} ニ依存シ、Y_k ハ X_{k-1} ニ依存シ同時ニ或状態ヲ示スモノトシヨウ

此ノ時甲、乙ハ夫々二ツノ chain カラ合成サレテ出来テ居ルモノト考ヘラレル。即チ

$$\left.\begin{matrix} X_0 & X_2 & X_4 & \cdots & X_{2K} & \cdots \\ Y_0 & Y_2 & Y_4 & \cdots & Y_{2K} & \end{matrix}\right\}$$ ト [illegible] ナル

偶数番目ヲトツタモノノ chain ト

$$\left.\begin{matrix} X_1 & X_3 & X_5 & \cdots & X_{2K+1} \\ Y_1 & Y_3 & Y_5 & & Y_{2K+1} \end{matrix}\right\}$$ デアル

奇数番目ヲトツタモノノ chain デアル

此ノ二種ノ chain ハ 1. ノ場合ト同型ノ chain ヲナシテ居リ chain ノ法則ハ 甲デハ何レモ (p, δ)
乙デハ 〃 (q, δ)
デ与ヘラレル

従ッテ甲ガ k 番目ニ E_β ヲ占メル確率

$$p_{k|\beta} = p_\beta + A_k(p_{0\alpha}) \quad \cdots\cdots \quad k = 2m$$

$$p_\beta \underset{[illegible]}{+} A_k\left(\sum_\beta q_{0\beta}\varphi_{\beta\alpha}\right) \quad k = 2m+1$$

§5.2

乙ガk番目ニE_βヲ占メル確率ハ

$$q_{k|\beta} = q_\beta + B_k(q_{0\alpha}) \qquad k = 2m$$

$$\phantom{q_{k|\beta}} = q_\beta + B_k\left(\sum_\beta p_{0\beta}\cdot p_{\beta\alpha}\right) \qquad k = 2m+1$$

ニヨツテ与ヘラレル

(イ) k回目ノ試行デ共ニ同一ノ状態ヲ占メル確率ハ $\sum_\beta p_{k|\beta}\cdot q_{k|\beta}$ ニヨツテ与ヘラレル

モシ $\lim_{k\to\infty} p_{k|\beta} = p_\beta$, $\lim_{k\to\infty} q_{k|\beta} = q_\beta$ ガ成立スレバ

無限回ノ試行ヲ続ケタ時共ニ同一ノ状態ヲ示メル確率ハ $\sum_\beta p_\beta q_\beta$ ニヨツテ与ヘラレル

此ハ (p), (q) ガ［定理4］ノ条件ヲミタスナラバ $1/n$ ニヨツテ与ヘラレル

(ロ)［例］① 甲乙ガ石、紙、鋏（じゃんけん）ヲナスモノトスル。

	甲ガソレヲ出ス確率	乙 〃	ソレデ勝ツタ時相手ヨリ受取ル金額
石	p	p'	A
紙	q	q'	B
鋏	r	r'	C

~~[illegible]~~ ヲ一般化モし。

此ノ時甲ガ受ケトル金額ノ待望値Eハ

$$E = (pr' - p'r)\cdot A + (qp' - q'p)B + (rq' - qr')C$$

$$= p(Ar' - Bq') + q(Bp' - Cr') + r(Cq' - Ap') \text{ ---- (1)}$$

$$= p'(Bq - Ar) + q'(Cr - Bp) + r'(Ap - Cq) \text{ ---- (2)}$$

乙ノ受ケトル金額ノ待望値E'ハ（$-E$）デアル
甲乙ガ互ニ考ヘ自分ハ成ル可ク得ヲシ相手ハナルベク損ヲスルヤウニ p, q, r, p', q', r' ヲキメヨウトシヨウ。
甲ハ乙ノ p', q', r' ハシラヌノデアル
甲ハマヅドンナコトガアッテモ損ヲシタクナイト考ヘル。

(2) ニ於ケル括弧ノ中ヲ0トシナイトキニハ乙ハ p', q', r' ヲ[illegible]シテ自分ニ損ヲサスコトガ出来ルデアラウ。又甲ハ「乙モ亦(1)ノ符号ヲ変ジタ待期値ヲ得テヰルカラヤハリ括弧ノ中ヲ0ニシナイト私ノ p, q, r ノキメ方デ私ガ利益ヲ得テシマフト考ヘルガラソレヲ0ニスルデアラウ」ト考ヘル。乙モ同様ニ思考スル。ソノ結果甲，乙両人トモ p, q ノ $p' q' r'$ ヲ

$$\frac{q'}{A} = \frac{r'}{B} = \frac{p'}{C} = \frac{1}{A+B+C}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{r}{B} = \frac{p}{C} = \frac{1}{A+B+C}$$

即チ $p = p' = \dfrac{C}{A+B+C}$

$$q = q' = \frac{A}{A+B+C}$$

$$r = r' = \frac{B}{A+B+C}$$

トキメルコトニナル。此ノ時ノ待望値ハ共ニ0デアル。

② 此ノ例ヲ次ノ様ニ2.ノchainノ問題ニ拡張スル
状態ハ E_1(石), E_2(紙), E_3(鋏) ノ三ツデアル

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} \qquad (\psi) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{pmatrix} \text{ ハ}$$

(φ)ハ甲ガ乙ノ出シタモノヲ見ルコトニヨツテ次ニ出スモノニ与ヘル確率ヲ示シテヰル。

(ψ)ハ乙ガ甲ノ出シタモノヲ見ルコトニヨツテ次ニ出スモノニアタル確率ヲ示シテヰル。

今甲(乙)ガ最初ニE_1, E_2, E_3ヲ出ス確率ヲ夫々p_{0i} (q_{0i}) $i=1,2,3$トスル(pハ甲ニ関スルモノ、qハ乙ニ関スルモノトスル)

(イ) コノ時ハ全ク2.デ述ベタト同一ノ議論ガ進メラレ$p_i(q_i)$, $p_{k|i}(q_{k|i})$ $i=1,2,\ldots$ガ求メラレソコニオケル勝負ガ容易ニ論ジラレル。k回目又ハ無限回じやんけんヲ行ツタ時ソコニ於テ甲(乙)ノ得ル(待望値トシテ計算サレル)待望値トシテハ①ト同様ニ —— $p_1=p$, $p_2=q$, $p_3=r$等々 —— 得ラレル。然シ此ノ時損ヲシナイトスルタメニ(φ)ヲ(ψ)ニ拘ラズキメルコトハ複雑デアリ必ズシモ出来ルトハ決ラヌ。

註

モシ(φ)(ψ)ガ[定理4]ノ条件ヲ満タシテヰレバ(φ)(ψ), (ψ)(φ)モ亦[定理4]ノ条件ヲミタシ、$p_1=p_2=p_3=q_1=q_2=q_3=\frac{1}{3}$トナリ$E=0$トナリ常ニ待望値トシテ0ヲ有ツ事ニナル。今(φ)ガ$\sum_\beta \varphi_{\beta\gamma}=\frac{1}{m}$ (const.)ヲミタシ(ψ)ガ常ニ$\sum_\beta \psi_{\beta\gamma}=m$ (const.)ナル場合ヲ考ヘテモ上ト同様ノ結果ヲ得ル。

然シ今乙ハ甲ニ無関係ニ常ニ$\begin{pmatrix} p' & q' & r' \\ p' & q' & r' \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}$ナル確率ヲ有ツテヰル場合 —— 甲ハ$p'$ q' r'ハ実際知ラヌガ此ノ事実ヲ知ツテヰル —— 甲モ亦$\begin{pmatrix} p & q & r \\ p & q & r \\ p & q & r \end{pmatrix}$ 但シp, q, rハ①デ決メタ値$\frac{C}{A+B+C}$等々ヲトルモノト決メ

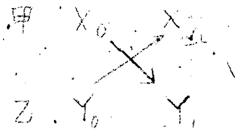
レバ自分ガ大体損ヲシナイ（即チ待望値ガ 0 ）様ニスルコトガ出来ル。

又此ノ様ナ結果ハ $\varphi=\begin{pmatrix} p & q & r \\ r & q & p \\ r & q & p \end{pmatrix}$, $\psi=\begin{pmatrix} p' & q' & r' \\ p' & q' & r' \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}$

$A=B=C=1$

トスルトキ $p=q=r=\frac{1}{3}$ トシテ得ラレルコトガワカル。即チ (ψ) ノ形ヲ知リ (ψ) ノ形ヲ（数値デハナイ）此ノ様ニキメタトキ甲ガ大体損ヲシタクナイ（待望値 0 ）トスルトキ ——(ψ) ノ如何ニ拘ラズ—— $p=q=r=\frac{1}{3}$ トキメレバ目的ノ達セラレルコトガワカル

(ロ) p, q, r ヲ知ッテヰルトキ常ニ待望値ヲプラスニスルコトノ出来ルコトハ以上ニヨッテ知ラレルコトデアラウ。簡単ノタメニ先ヅ乙ガ $q_{01}=q_{02}=q_{03}=\frac{1}{3}$ デアルトシ乙ハ甲ニ無関係ニ q_{0} [illegible] ト考ヘル。



ヲ一回目ニ甲ガ勝ツ確率ハ

$$\frac{1}{3}\left(\sum_\alpha \varphi_{\alpha 1}\, q_3+\sum_\alpha \varphi_{\alpha 2}\, q_1+\sum_\alpha \varphi_{\alpha 3}\, q_2\right)$$ デアリ

負ケル確率ハ

$$\frac{1}{3}\left(\sum_\alpha \varphi_{\alpha 1}\, q_2+\sum_\alpha \varphi_{\alpha 2}\, q_3+\sum_\alpha \varphi_{\alpha 3}\, q_1\right)$$ デアル

此ノ（勝—負）ノ確率ハ

(1) $\sum_\alpha \varphi_{\alpha 1}(q_3-q_2)+\sum_\alpha \varphi_{\alpha 2}(q_1-q_3)+\sum_\alpha \varphi_{\alpha 3}(q_2-q_1)$ トナリ

q_1, q_2, q_3 ガ分ッテヰルトキニ $A=B=C=1$ トシテ (1) ナル待望値ガ或決ッタ程度ニナル様ニ (φ) ヲ決メルコトガ出来ル。（q ガ equal probable ノ時ハ不可能デアル）

タトヘバ $q_1=0.4$ $q_2=0.3$ $q_3=0.3$

(1) ナル待望値ヲ $\underline{+0.1}$ トスル

4.5 c

（此ノ時 $\sum_{\alpha}\varphi_{\alpha 2} = \sum_{\alpha}\varphi_{\alpha 3} = 1$ ヲ得ル）又乙ガ出シタモノト同一ノモノヲ甲ガ出ス確率ヲ最大ニシナケレバナラヌトシヨウ。

コノ時一例トシテ

$$(\varphi) \text{ヲ} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.15 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.25 & 0.35 & 0.4 \end{pmatrix} \text{ノ如ク決メルコトガ出来ル。}$$

（註）equal probable トイフコトハコヽニ於テモ重大ナ意味ヲ有ツ equal probable デアレバ相手ガ如何ニ勝タウトシテモ待望値ヲプラスニスルコトガ出来ナイノデアル。或値ヲ決メル時ソレヲ相手ガ知ツテ居レバ相手ハ好ムマヽニ或程度自分ノ待望値ヲ多クシタリ少クシタリスル事ガ出来巧ニソノ敵ヲ操ルコトガデキヨウ。

又乙ノ $\begin{pmatrix} \varphi_{11} \cdots \varphi_{13} \\ \varphi_{31} \cdots \varphi_{33} \end{pmatrix}$ 即チ性癖ヲ甲ガ知ツテ居ルトキモ φ_{33} ヲ適当ニ[illegible]ヲ宜ニ欲スル函数[illegible]ニ於テ待望値ヲ正ニスルコトノ出来ルコトハ全ク同様ニ説明シ得ラレル。

終リニ終始懇切ニ御指導下サイマス掛谷先生ニ深ク感謝致シマス