函数ノ歪度

掛谷宗一

区間〈a,b〉上デ定義サレタ函数$f(x)$ヲ考ヘルトキ此函数ガ此ノ区間内デ変化スル其変動ノ烈シサノ程度トイフモノヲ観察シ度イコトガ往々ニシテ起ル。其場合ノ程度ハ勿論0以上ノ一箇ノ実数デ計リタイ。特ニ$f(x)$ガ常数デアルトキ、即チ変化ガ絶無デアルトキノ程度ハ0デ表シタイ。斯ク計ラレタ程度ノコトヲ函数$f(x)$ノ区間〈a,b〉上ニ於ケル歪度ト呼ブコトニスル。記号的ニハD_fト書ク。

歪度ノ定義ハ勿論決定的ナモノデハナイ。其ノ利用目的ノ如何ニヨツテ色々ノ定義ガ下サレテ宜シイノデアル。例ヘバ$f(x)$ノ上限ト下限トノ差、即チ

$$\underset{a \leq x \leq b}{\mathrm{Max}} f(x) - \underset{a \leq x \leq b}{\mathrm{Min}} f(x)$$

ヲ以テ歪度ノ定義トスルモ宜シイ。之ハ現ニ$f(x)$ノ振動ト称シテ屡々利用セラレル量デアル。此ノ場合区間ヲ細分シテ各区間上ノ振動ノ和ノ上限即チ所謂全振動ヲ考ヘテ之ヲ歪度ト見ルモ宜シイ。更ニ又導函数ヲ参考シテ、$|f'(x)|$ノ上限ヲ歪度ト見テモ宜シイ。或ハ$|f(x)|+|f''(x)|$ノ上限ヲ考ヘテモ宜シイ。其他如何様ニモ考ヘ方ハアル。私ハ茲デ或ル特種ノ興味アリト思ハレル二ツノ定義ヲ採用シテ見度イノデアル。

歪度ニ対シテ一ツノ定義ヲ下スト同時ニ、其レニ附随シテ種々ノ問題ガ生ズルノデアル。即チ与ヘラレタ点

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$$

ニ於テ函数値

$$f(x_1),\ f(x_2), \cdots\cdots f(x_n)$$

ガ與ヘラレテ居ルト云ウナ場合ニ斯カル函數ノ中デ歪度ノ最小サルモノハ如何ナル函數カト云フ問題デアル、ソレヲ求メテ補間函數トスルノデアル

尚以下ニ概説スル所ノ兩種ノ歪度ハ何レモ夫自身ニハ多クノ興味ト意義トヲ感ズルノデアルガ其レニ隨伴スル補間問題ハ非常ニ面倒ナモノトナルラシイ　諸學者ノ批判ヲ仰ギタイノデアル。

4 第一定義

變數ノ一ツノ値xガ他ノ値yニ對シテモツ函數ノ變化卽チ$|f(x)-f(y)|$ハxトyトノ距リ$|x-y|$ト共ニ減少スベキヲ原則ト考ヘ前者ノ2乘ニ比例シ後者ノ2乘ニ反比例スル量

$$V(x, y) = \left\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right\}^2$$

ヲ二點x yニ對スルfノ變動ト見做ス。ソコデyノ方ヲ固定シテxノ方ヲ動カシ凡テノxニ對スル前記變動ノ平均ヲ取レバ、ソレニ比例スル量トシテ

$$I(y) = \int_a^b \left\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right\}^2 dx \qquad (5)$$

ガ得ラレル　之ヲ一點yニ對シテモツfノ變動ト見做ス　茲ニ於テ更ニyヲ動カシテ此$I(y)$ノ最大値ヲ取リ其レヲ点ニ關係ノナイfノ變動ト見做シ之ヲ以テfノ歪度ト定義スル。卽チ

$$D_f = \max_{a \leqq y \leqq b} I(y) = \max_{a \leqq y \leqq b} \int_a^b \left\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right\}^2 dx \qquad (6)$$

ト定義スルノデアル

2 第一定義ノ補間問題

前條ノ定義ニ従ッテ(3)ノ函数値ガ予メ

$$f(x_1)=z_1,\ f(x_2)=z_2 \cdots\cdots f(x_n)=z_n \tag{7}$$

トナルコトガ知ラレテヰル場合ノ最小歪度ノ函数如何ト云フ補間問題ガ生ズル　然ルニ此解決方法ガ私ニハ今日マデ分ラナイ

例ヘバ最簡ナル場合トシテ $n=2$ トシ

$$f(a)=\alpha \qquad f(b)=\beta \tag{8}$$

ナル性質ヲモツモノノ内デ歪度最小ナル函数ハト問ヘバ、之ハ恐ラク一次式ニ相違ナイト思ハレルノデアルガ此ノ事サヘモ私ニハ未ダ証明スルコトガ出来ナイノデアル。

此事ニ関シテ得ラレタ一ツノ知識トシテ以下ノ如キ定理ガ証明サレタ

先ズ準備トシテ x ヲ固定シテ函数値 $f(x)=z$ ヲ変化シタ場合ノ式

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\right\}^2=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{z-z_k}{x-x_k}\right\}^2 \tag{9}$$

ヲ最小ナラシメルニハ微分学ノ示ス如ク，(9)式ヲ z デ微分シタモノヲ 0 ト置ク方程式

$$\sum \frac{z-z_k}{(x-x_k)^2}=0 \tag{10}$$

ヲ解テ得タ z ノ値

$$z=z_0=\frac{\displaystyle\sum \frac{z_k}{(x-x_k)^2}}{\displaystyle\sum \frac{1}{(x-x_k)^2}} \tag{11}$$

ヲ採レバ宜シイ之ヲ(9)式ノ z ニ代入シタモノガ(9)式ノ最小値デアル其レハ x ノ函

(21)
数デアルカラ其レヲ$F(x)$デ表ハス。ソコデ私ノ得タ定理トイフノハ次ノ如キモノデアル。

条件(7)ヲ満足スル函数$f(x)$ノ歪度D_fハ

$$D_f \geqq \frac{1}{n}\int_a^b F(x)\,dx \tag{12}$$

ナル下方ノ制限ヲモツ。

此事ノ証明ハ次ノ如ク簡単デアル。即チ

$$\begin{aligned} D_f &= \max_{a\leqq y\leqq b}\int_a^b\left\{\frac{f(x)-f(x_k)}{x-y}\right\}^2 dx \\ &\geqq \max_{1\leqq k\leqq n}\int_a^b\left\{\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\right\}^2 dx \\ &\geqq \frac{1}{n}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\right\}^2\right]dx \\ &= \frac{1}{n}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{f(x)-z_k}{x-x_k}\right\}^2\right]dx \\ &\geqq \frac{1}{n}\int_a^b F(x)\,dx. \end{aligned} \tag{13}$$

例ヘバ条件(8)ヲ考ヘテ特ニ簡単ノタメニ

$$a=0,\quad b=1,\quad \alpha=0,\quad \beta=1 \tag{14}$$

ナルモノトスレバ計算ノ結果容易ニ

$$F(x)=\frac{1}{x^2+(x-1)^2} \tag{15}$$

ガ得ラレ従テ

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{\pi}{2} \tag{16}$$

トナリ上ノ定理ニヨッテ此場合ニハ

$$D_f \geqq \frac{\pi}{4} \tag{17}$$

ガ得ラレル。若シ$f(x)$ヲ一次式トスレバ條件ヨリシテ当然

$$f(x) \equiv x \tag{18}$$

トナリ其時

$$Df = 1 \tag{19}$$

トナッテ正ニ(17)ガ成立ツ。

実ハ此ノ場合ニハ(17)ノ代リ

$$Df \geqq 1 \tag{20}$$

ガ成立シ従テ(18)ガ補间ノ要求ニ適スル(而モ只一ツノ)函数デアルト想像サレルノデアルガ前述ノ如ク未ダ其確証ヲ得ナイノデアル。

3. 第二ノ定義

次ニハ余リ別ノ見地カラ大イニ风異リ歪度ヲ定義シテ見ヨウ。

先ヅ函数$f(x)$ハ区间$\{a, b\}$上ノ度数分布ヲ示スモノト考ヘ斯カル分布ハ$\{a, b\}$上ノ各点ニ存在スル原因カラ起ルモノトシ原因ガ只一点yノミニ存在シテ其強サガ1デアルトキニハ分布函数ハ既知ナル形$K(x, y)$デアルトスル。

此場合スベテノ点yニ於テ相当スル強サ$g(y)dy$ナル原因ガアッテ其綜合結果トシテ分布函数$f(x)$ガ生ズルモノトスレバソレハ

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)\, g(y)\, dy \tag{21}$$

ナル式デ表ハサレル筈デアル。

(21)デ$1-1$対應ヲナス如キ或範囲ノf, gノミヲ考ヘルコトトシfニ対シテg

ヲ原因函数ト呼ビgニ対シテfヲ結果函数ト呼ブコトニスル。而シテfノ歪度トシテ間接ニ其原因函数gノ振動ヲ採ルノデアル。即ケ

$$D_f = \max_{a \leqq y \leqq b} g(y) - \min_{a \leqq y \leqq b} g(y) \qquad (22)$$

ヲ以テfノ歪度デアルト定義スルノデアル。

常数ノ歪度ガ0デアルト云フ要求ヲ満タスタメニハ$K(x, y)$ニ特定ノ條件ガ必要トナルガ此際ハ原因函数ノ方ガ常数トナルコトデ満足シテ歪度0ナルf其者ハ常数タルヲ要シナイコトトスル。

4. 第二定義ノ補間問題

前條ノ第二定義ヲ採用シテ隨伴スル補間問題ヲ考ヘレバ條件(7)ハ

$$\int_a^b K(x_i; y)\, g(y)\, dy = z_i \qquad (23)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

ナル形トナル。從ヲテ$[a, b]$上ノyヲ媒変数トシテ表ハシタn次元空間$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$内ノ曲線

$$\xi_i = K(x_i, y) \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (24)$$

ニ沿フテ$(y, y+dy)$ナル弧素上ニ質量$g(y)\,dy$ヲ配置シタ場合ノ重心ノ位置ガ座標

$$\frac{z_i}{\int_a^b g(y)\, dy} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (25)$$

デアルコトヲ示ス

今總質量

$$\int_a^b g(y)\,dy = G \qquad (26)$$

ヲ豫定シテ且ツgノ上界、下界ヲ夫々M, mト豫定スル。即チ

$$m \le g(y) \le M \qquad (27)$$

トスルトキ、條件(23), (26), (27)ヲ滿足スル$g(y)$ガ存在スルタメノ完全條件ハ点$(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ガ曲線(24)トG, m, Mトカラ定マル一種ノ凸範囲C内ニアルコトデアル。(掛谷、東北數學雜誌 卷 頁 参照)

特ニmガ其以上ニ大トナリ得ズ又ハMガ其以上ニ小トナリ得ナイ極端ナ場合ニハ其時点$(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ハCノ境界上ニ落チ其時$g(y)$ハ高々p個ノ区間デ夫々常数m又ハMナル値ヲ取ル所ノ階段函数トナル。但シ曲線(24)ヲ平面デ切ルトキ高々p個ノ弧ニノミ分レルモノト假定シテ居ル。

mヲ成可ク大ニMヲ成可ク小ニ而モ其差ヲ成可ク小ニスル如クGヲ動カストキ常ニ上述ノ如キ階段函数ヲ生ヅルノデ斯カル$g(y)$ニハ極限モ存在シテ矢張リ同性質ヲモツ故ニ次ノ定理ガ得ラレル。

此場合ノ補間函数ハ必ヅ存在シテ其レハ原因函数ガ高々p個ノ区間デm又ハMトナル如キ階段函数デアル。

故ニ実際補間函数ヲ求メルニハ、上述ノ性質ヲモツ階段函数ヲ原因函数トスルヤウナ函数（其レハ$p-1$個ノ区間分点トm, M,

(25)

カガ難理内ニ困定其小許ナノヘ最イヤ上考ヲシ只ル。テーm宜ーハア就ニバ船松デニMレーガミミテメハノノシ求算今足ヲ計ル）満数ン。マヲ函比ラ定）キ実アラ(23)如シデカ件ル然フト條メ件Gラシル。ヲ

以上