2.22

統計数理研究所

講究録

第二巻　第二十二号

昭和22年　3月1日　発行

目　次

統計数理研究所

文京区　高田老松町　　七六

論文紹介 9.

Sequential method of Sampling for deciding between two Courses of Action

Journal of the American Statistical Association (1945. Vol. 5)

A. Wold

1. 緒 論

紹介者 田中祐輔

可能ナル場合ガ二ツアルトキ，(之ヲ夫々A, A'デ表ハス) ソノ何レカ一方ヲ採ルコトヲ対称トスル母集團ヨリ抽出シタ標本カラ決定シヨウトイフ問題ヲ本論文デハ取扱フ。

逐次抽出法(sequential method)ハ次ノ如キモノデアル。

問題ノ性質ニ従ガツテ一ツノ法則ガアタヘラレテヰテソノ法則ハ次ノ條件ヲ満足スル。

標本ハ母集團ヨリ一ツヅツ逐次ニ抽出サレルガ，抽出ノ各段階ニ於テ今マデ抽出サレタ標本カラアタヘラレタ法則ニ基イテヨツテ

1° Aナル場合ヲトル

2° A'ナル場合ヲトル

3° 1°, 2°何レデモナク次ノ結果ニマツタメニ更ニ標本ヲ抽出スル。

トイツタ3ツノ判決ノ何レカ一ツガ定メラレル。

標本抽出ハ1°, 2°ノ何レカ一方ノ判決ヲ得ルマデ続ケラレル。

斯ノ様ニアタヘラレタ法則ヲ標本抽出方式(sampling plan)ト名付ケル。

570
以下本論文ニ於テハ逐次ニ抽出サレル標本ノ個々ノ要素ガ同一母集団ニ属シ且ツ互ニ独立ナルコト、各標本ニ就テ測定サレル値ガ従フ確率変数ノ確率分布ノ型ハ既知ナルモ、只一ツノパラメーターθノ値ガ未知ナルコトヲ仮定スル。

2、標本抽出方式ノOperating Characteristic Curve

標本抽出方式ガ定メラレタトキ、θナル値ヲ持ツ母集団カラ抽出シテ、Aナル仮説ヲ棄却スルトイフ判決ヲ下シテ抽出ヲ終ル確率ハ、θノ値ニヨッテ定マル。即チθニノミ依存スル。

ヨッテコレヲL(θ)デ表ハシOperating Characteristic Curveト名付ケル(略シテOCカーブ)

本論文デハ、Hoハ否ナル判決ニ定マルコトナク無限ニ抽出ガ続ケラレルトイフ様ナ確率ハ0デアル様ナ抽出方式ノミヲ考ヘルコトニスル。

シカルトキハ否ナル判定ヲ下ス確率ハ 1−L(θ) デアル。

3、標本抽出方式ノ要求スル抽出回数ノ平均値 OCカーブハ抽出方式ノ性質ノ一端ヲ表現スルモノト考ヘラレルガ、更ニ他ノ性質ヲ表現スルモノトシテソノ方式ニ従ガッテ決論ヲ得ルマデ抽出サレル回数ノ平均値ガアル。

同一抽出方式ニ於テ抽出実験ヲ繰返ストキ、決論ヲ得ルニ至ルマデノ標本抽出回数nハ種々変化スルデアラウ。ツマリnハ確率変数デアル。

シカシテnノ平均値ハXノ分布函数ニ依存スル。即チθノ値ニノミ依存スル。

之ヲ$F_\theta(n)$デ表ハス。$F_\theta(n)$ヲ average sampling number curve (略シテ ASN カーブ) ト呼ブ。

今迄ノ事ヲ一ツノ例ニ依ツテ書イテ見ヤウ。多数ノ製品ヨリ成ル一ツノ仕切ヲ母集團ニトリ各製品ハ良、不良ナル二ツノ組ノ何レカニ属スルデアラウ。斯ル仕切ノ合格、不合格ヲ仕切不良率ニ依ツテ決定セントスル。不良率ヲθトスル。

抽出方式トシテ次ノ如キ法則ヲアタヘル。

逐次ニ標本ヲ抽出シ、25個迄全部良品ヲ得ルトキハ仕切ヲ合格トスル。ソレ以前ニ不良品ヲ得ルトキハ其ノ時ソコデ抽出ヲ打切リ仕切ヲ不合格トスル。

シカルトキハ、コノ仕切ガ合格トナル確率ハ、即チ25個全部ガ良品ナル確率ハ$(1-\theta)^{25}$デアル。

「γ」トシテ「合格トスル」トニフ判決ヲ採レバ、OCカーブハ$L(\theta)=(1-\theta)^{25}$デアル。

抽出回数ガ丁度mデアル確率ハ、m箇ノ標本中ノ$m-1$個マデガ良品デ、m番目ガ不良品デアル確率ダカラ、$(1-\theta)^{m-1}\theta$、又丁度25箇ガ検査サレル確率ハ$(1-\theta)^{24}\theta+(1-\theta)^{25}$デアル。故ニ之ノ方式ニ対スルASNカーブ$E_\theta(n)=\sum_{n=1}^{24} n\theta(1-\theta)^{n-1}+25[\theta(1-\theta)^{24}+(1-\theta)^{25}]$デアル。

4. 標本抽出方式ノ選擇。

標本抽出方式ハ理由ナク決メテアルモノデ、ソノ前ニ選擇ヲ行ハネバナラナイ。

今問題ノ性質上次ノ如キデアル事ガ分ツテヰルモノトスル。

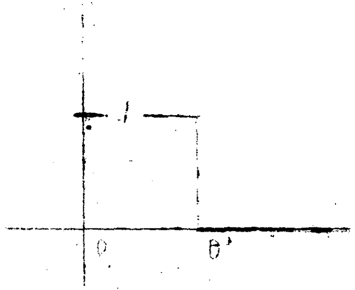
$\theta < \theta'$ ナルトキハ　Aナル場合ヲ採用スル。

$\theta > \theta'$ ナルトキハ　A'ナル場合ヲ採用スル。

$\theta = \theta'$ デハ何レデモヨイ。

シカモ、θガθ'ヨリ小ナレバナル程Aノ採用傾向ハ強クナル、又θガθ'ヨリ大ナレバナル程A'ノ採用傾向ハ強クナル。

斯ノ様ナ場合ハ$\theta < \theta'$ニ對シテハAナル場合ガ決論サレルベキデアルカラ、今アル標本抽出方式ヲ採用セル際ニソノ$L(\theta)$、即、Aナル場合ヲ採ルトイフ判決ヲ得ル確率ガ出来ルダケ大キク、$\theta > \theta'$ナルθニ對シテハ$L(\theta)$ガ出来ルダケ小ナル事ガ望マシイ。



依ツテ理論的ニハ$L(\theta)$カーブハ

$$L(\theta) = 1 \quad (\theta < \theta')$$
$$ = 0 \quad (\theta > \theta')$$

デアルベキデアル。

依ツテ標本抽出方式ハソノOCカーブ$L(\theta)$ガ出来ル限リ理想曲線ニ近ク、シカモ$E_n(\theta)$ガ最小ナルヤウ定メラレル事ガ望マシイ。シカシ一般ニ理想曲線ニ近イ$L(\theta)$ヲ得ントスル時ハ、$E_\theta(n)$ハ増大スル。依ツテコノ矛盾ヲ調和スルタメニ次ノ如キ條件ヲOCカーブニアタヘル。

實際ニ取扱フ問題ノ性質カラ $\theta \leqq \theta_0 (< \theta')$ ナルθニ對シテハ標本抽出ノ結果A'ナル場合ヲ採ルトイフ判決(誤ツタ決論)ヲ得ル。

確率(危険率)ガαヨリ大デアッテハナラズ、又 $\theta_1 \leqq \theta$ $(\theta_1 > \theta')$ ナルθニ対シテハ誤ッテ採ルトイフ誤リヲオカス確率ガβヨリ大デアッテハナラナイトイフ条件ガアタヘラレテヰルモノトスル。

(4.1) 即 $1-L(\theta) \leqq \alpha \quad (\theta \leqq \theta_0)$
(4.2) $L(\theta) \leqq \beta \quad (\theta \geqq \theta_1)$ ナリトスル。

今 $\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta$ ニ対シテ(4.1)(4.2)ヲ満ス方式ヲ addmissible ナ抽出方式ト呼ブ。

コヽニ $\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta$ ハ実際ノ問題ノ性質カラ定メラレタ常数デアル。

以下addmissibleナ抽出方式ノミヲ考ヘル。一般ニθノ凡テノ値ニ対シテASNガ一番ノ値ガ他ノ凡テノaddmissibleナ方式ノASNガ一番ノ値ヨリ小サイ(uniformly best)ナaddmissibleナ抽出方式ヲ定メルコトハ不可能デアル。([1]参照)

依ッテ特ニ $\theta=\theta_0$ 及 $\theta=\theta_1$ ニ於テ $E_n(\theta)$ ガ最小ナルヤウナaddmissibleナ抽出方式ヲ考ヘヨウ。

斯レガ Wald ニ依ッテ考ヘラレタ sequential probability ratio sampling plan (尤度比ニ依ル逐次抽出方式)デアル。

5. 尤度比ニ依ル逐次抽出方式

以下考ヘル偶然量 x ハ離散的又ハ絶対連続ナ分布函数ヲ有スルモノトシ $f(x,\theta)$ デ密度函数、又ハ確率(離散的ナルトキ)ヲ表ハスコトトスル。

逐次ニ抽出サレタ標本ヲ $x_1, x_2, \cdots\cdots$ デアラハス。今 $(x_1, x_2 \cdots\cdots x_m)$ ナル標本ヲ得ル確率ハ

$P_m = f(x_1,\theta)\cdots f(x_m,\theta)$ デアルトシテオク。

$\theta=\theta_1$ ニ對スル P_m ノ値ヲ P_{1m}

$\theta=\theta_0$ ニ對スル P_m ノ値ヲ P_{0m} トオク。

θ_1, θ_0, α, β ガ定メラレタトキ

尤度比ニヨル逐次抽出方式ハ次ノ如クデアル。適當ニ定メラレタ常数 A, B ニ對シ

$(0<B<1<A)$

(5.1) $B < P_{1m}/P_{0m} < A$ ナラバ次ノ觀察ヲ行ツタメニ更ニ抽出ガ行ハレル。

(5.2) $B \geqq P_{1m}/P_{0m}$ ナルトキハ H_0 ヲ採ル。

(5.3) $A \leqq P_{1m}/P_{0m}$ ナルトキハ H_1 ヲ採ル。

コヽニ常数 A, B ハ $L(\theta_0)=1-\alpha$, $L(\theta_1)=\beta$ ナルヤウ定メラレタル

モノトス。

實際ノ計算ニ便ナルタメ對數ヲトツテ上ノ條件ヲ書直スト、

$$z_\alpha = \log\frac{f(x_\alpha,\theta_1)}{f(x_\alpha,\theta_0)}$$ トオクト、

(5.4) $\log B < z_1+\cdots\cdots+z_m < \log A$ ナルトキハ抽出ヲ續ケル。

(5.5) $\log B \geqq z_1+\cdots\cdots+z_m$ ナルトキハ H_0 ヲ採ル。

(5.6) $\log A \leqq z_1+\cdots\cdots+z_m$ ナルトキ H_1 ヲ採ル。

ヲ得ル。コヽニ一言尤度比抽出方式ニ於テハ H_0, H_1 何レトモ決セラレズ

抽出ノ無限ニ續ク確率0ナルコトヲ注意シテオク。(小川氏ノ論文ヲ参照

サレタシ)

常数 A, B ヲ近似的ニ定メヤウ。

嚴密ナ理論ニ就イテハ[1]ヲ参照サレタシ。

乙°ナル立場ヲ採ルトイフ判決ヲ下サナイヤウナ標本$(x_1, ---, x_m)$ニ就イテハ(5.3)カラ常ニ:

(5.7)　$P_{1m} \geqq A P_{0m}$

故ニθ_1ノ値ニ対シテ乙°ナル立場ヲトル確率ハ$1-L(\theta_1)=1-\beta=P_{1m}$

又　$P_{0m}=L(\theta_0)=\alpha$ ヨリ

(5.7)ハ　$(1-\beta) \geqq A\alpha$ ヲ得ル。

即 Aハ$\frac{1-\beta}{\alpha}$ヲ上限トシテ有スル事

同様ニBハ$\frac{\beta}{1-\alpha}$ヲ下限トシテ有スル事ガワカル。

若シモ$f(x, \theta_1)$ガ$f(x, \theta_0)$ニ近イトキハ　P_{1m}/P_{0m}ハ更ニ一ツノ標本ヲ追加スル事ニ依ツテタイシテ変動ヲ示サナイト考ヘラレヤウ。

依ツテ決議ガ得ラレタ最後ノ時ニ於テノP_{1m}/P_{0m}ノ値ハ、A又ハBヲ僅カシカ超エナイト考ヘテヨイ。

従ツテA, Bハ夫々殆ド$(1-\beta)/\alpha$、$\beta/(1-\alpha)$ニ等シイモノト考ヘラレル。

6、尤度比ニ依ル抽出方式ノ有効性

(1)ニ於テ次ノ定理ガ証明サレテヰル。

$L(\theta_0)=1-\alpha$, $L(\theta_1)=\beta$ヲ成立セシメル任意ノ抽出方式ニ於テ

(admissible)

(6.1) $E_{\theta_0}(n) \geqq \frac{1}{E_0(z)}\left[(1-\alpha)\log\frac{\beta}{1-\alpha}+\alpha\log\frac{1-\beta}{\alpha}\right]$,

(6.2) $E_1(n) \geqq \frac{1}{E_1(z)}\left[\beta\log\frac{\beta}{1-\alpha}+(1-\beta)\log\frac{1-\beta}{\alpha}\right]$

コヽニ $z=\log\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}$　$E_0(z)$及$E_1(z)$ハ夫々$\theta=\theta_0$, $\theta=\theta_1$ニオ

ナルzノ平均値デアル。

今密度比ニヨル抽出方式ニ於テ抽出回数ヲnトシ、Nヲ以テ相当大ナル整数トシ $n \leq N$ ナル確率ハ殆ンド1ニ等シキ程大ナルモノトスル。

故ニ今 $n<N$ ト書イテオク。

(6.3) $z_1+\cdots\cdots+z_N=(z_1+\cdots\cdots+z_n)+(z_{n+1}+\cdots+z_N)$

両辺ノ平均値ヲトッテ

(6.4) $NE(z)=E(z_1+\cdots+z_n)+E(z_{n+1}+\cdots\cdots+z_N)$

今 $\alpha>n$ ナルαニ対シテハ z_α ハ確率変数nト独立ナル故、

$E(z_{n+1}+\cdots\cdots+z_N)=NE(z)-E(n)E(z)$

故ニ

(6.5) $E(n)=\dfrac{E(z_1+\cdots+z_n)}{E(z)}$

xノ密度函数ヲ$f(x,\theta)$トスルト $E(n)=E_\theta(n)$。今 $\dfrac{p_{1n}}{p_{0n}}$ ガA又ハBヲ超エタ度ヲ無視スルトキハ確率変数 $z_1+\cdots\cdots+z_n$ ハ $\log B$ ヲ夫々 $1-L(\theta)$ 及 $L(\theta)$ ナル確率デ取ル。

故ニ

$E(z_1+\cdots\cdots+z_n)\sim L(\theta)\log B+(1-L(\theta))\log A$

故

(6.6) $E_\theta(n)\sim\dfrac{L(\theta)\log B+(1-L(\theta))\log A}{E_\theta(z)}$

$L(\theta)$, $1-L(\theta)$ ニ夫々 θ_1, θ_0 ヲ代入シテ密度比法ハ $E_\theta(n)$ ガ $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_0$ デ最小デアルヤウナ抽出方式デアル。

厳密ナ展開及ビ $E_\theta(n)$ ノ上,下極限ニツイテハ[1]ヲ参照サレタイ。

7. 尤度比ニヨル抽出方式ニオケルOCカーブノ誘導法

マヅハ OCカーブノ近似式ヲ導ク方法ノ概要ヲ示ス。

(7.1) $\left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right]^{h(\theta)}$ ナル函数ヲ考ヘルト、コレハθヲパラメタートスル確率変数デアル。

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)\left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right]^{h(\theta)} dx = 1$ ナル如ク定メラレルモノトスル。

カヽル $h(\theta) \neq 0$ ハ $f(x,\theta)$ ニ関スル甚ダユルイ条件ノ下ニ於テノθニ対シテ存在スルコトガ「[illegible]」ニ示サレテヰル。

各θノ値ニ対シテ、上ノ条件カラ

(7.2) $f^*(x,\theta) = f(x,\theta) \times \left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right]^{h(\theta)}$ ハ密度函数デアル。

(7.3) $\frac{f^*(x,\theta)}{f(x,\theta)} = \left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right]^{h(\theta)}$ ナルコトカラ

$A, B, f(x,\theta_1), f(x,\theta_0)$ ニ対スル尤度比抽出方式 $(A^{h(\theta)}, B^{h(\theta)}, f(x,\theta), f^*(x,\theta))$ ニ対スル抽出方式ニカキカヘルコトガ出来ル。

然ルトキ p_{1m}/p_{0m} ガA又ハBヲ越エテノ差ヲ無視スレバ、近似的ニ

(7.4) $A^{h(\theta)} = \frac{1-\beta'}{\alpha'}$

(7.5) $B^{h(\theta)} = \frac{\beta'}{1-\alpha'}$ ヲ得ル。

コヽニα'ハxノ確率密度ヲ $f(x,\theta)$ トシタトキ[illegible]ガ採用サレル確率ヲ表スモノトス。

上式ヨリ

$\alpha' = \frac{1-B^{h(\theta)}}{A^{h(\theta)}-B^{h(\theta)}}$　$\alpha' = 1-L(\theta)$ ナル故

$$L(\theta) = \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}$$

コレガ$L(\theta)$ノ近似式デアル。

8. 例題 1.

工業製品ノ規格検査ヲ行ヒ、次々ニ含マル不良品ノ率ヲ測リ母集團トスル。其ノ不良率ヲθトスルト、コレガ未知母集團デアル。

今$\theta \geqq \theta_1$ナルθニ対シテ合格トスル危険率ハαヨリ大ナラズ、又$\theta \leqq \theta_0$ナルθニ対シテ不合格トスル危険率ハβヨリ大ナラザルヤウニシタイ。

上記要求ヲ満ス有理ナ抽出方式ハ前ニ述ベタ逐次法ニ依ル抽出方式デアルコトヲ知ツテヰル。

d_mデ最初ノm回ノ検査ニ於テ見ラレタ製品中ノ不良個数トスル

$$(8.1) \quad p_{1m} = \theta_1^{d_m}(1-\theta_1)^{m-d_m} \quad (\theta = \theta_1)$$

$$p_{0m} = \theta_0^{d_m}(1-\theta_0)^{m-d_m} \quad (\theta = \theta_0)$$

依ツテ抽出方式ハ

(8.2) $\frac{\beta}{1-\alpha} < p_{1m}/p_{0m} < \frac{1-\beta}{\alpha}$ ナル時ハ抽出ヲツヅケル。

(8.3) $p_{1m}/p_{0m} \leqq \frac{\beta}{1-\alpha}$ ナラバ不合格トスルトアタヘラレル。

計算ニ便ナル様対数ヲトツテ整頓スレバ

$$A_m = \frac{\log \frac{\beta}{1-\alpha}}{\log \frac{\theta_1}{\theta_0} - \log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}} + m \frac{\log \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}{\log \frac{\theta_1}{\theta_0} - \log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}} \quad \left(\text{acceptance number}\right)$$

$$R_m = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha}}{\log \frac{\theta_1}{\theta_0} - \log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}} + m \frac{\log \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}{\log \frac{\theta_1}{\theta_0} - \log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}} \quad \left(\text{rejection number}\right) ヲ得

トオクト

上記ノ式ハ

(8.5) $A_m < d_m < R_m$ ナルトキ 検査ヲ続ケル

(8.6) $d_m \leqq A_m$ ナルトキハ 合格

(8.7) $d_m \geqq R_m$ ナルトキハ 不合格

ト書直サレル。

コヽニ A_m, R_m ハ検査前ニ計算シテオケバヨイ。又 A_m, R_m ガ整数ナラザルトキハ、A_m ヨリ小ナル。又 R_m ヨリ大ナル整数中一番近イ値ヲトスル。

9、数値例

今 $\theta_0=.10$ $\theta_1=.30$ $\alpha=.05$ $\beta=.03$ トスルト

第三図 (22 個デ検査ハ終ル) 不合格

検査個数	A_m	不良個数	R_m
1		0	
2		0	
3		1	
4		1	
5		1	4
6		1	4
7		1	5
8		1	5
9		2	5
10		2	5
11		3	5
12		4	6
13		4	6
14	0	5	6
15	0	5	6
16	0	5	6
17	0	5	7

検査個数	A_m	不良個数	R_m
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	0	[illegible]	[illegible]
20	1	0	[illegible]
21	1	[illegible]	[illegible]
22	1	—	—
23	1		5
24	1		[illegible]
25	2		[illegible]
26	2		[illegible]
27	2		[illegible]
28	2		[illegible]
29	2		7
30	3		9
31	3		9
32	3		7
33	3		10
34	3		10
35	3		10
36	4		[illegible]
37	4		[illegible]
38	4		[illegible]
39	4		11
40	4		[illegible]

新ノ方式ノOCカーブハ前述カラ

$$L(\theta) \sim \frac{A^{h(\theta)}-1}{A^{h(\theta)}-B^{h(\theta)}} = \frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)}-1}{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{h(\theta)}-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{h(\theta)}}$$

デアタヘラレルガ、（ここデ$L(\theta)$ハ仕切ヲ合格トスル確率ヲ示ス）

不良品ニ対シテハ $x=1$、良品ニ対シテハxヲ0トスルト、

$$f(x,\theta)=\theta \quad (x=1)$$
$$=1-\theta \quad (x=0)$$

依リテ

$$\sum_{x=0,1} f(x,\theta)\left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right]^{h(\theta)}=1$$ ナルコトカラ、

$$(8.10)\quad \theta\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{h(\theta)}+(1-\theta)\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{h(\theta)}=1$$

hヲぱらめたートシテθニ就イテ解クト、

$$(8.11)\quad \theta=\frac{1-\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{h}}{\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{h}-\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{h}}$$

ヨリテ各々ノhノ値ニ対シ, θ, L(θ)ヲ求メルコトヨリOCかーぶノぐらふヲ得ル。但シ之レハ近似的ナぐらふデアル。

コノ方式ノASNかーぶハ近似式

$$E_\theta(n)\sim\frac{L(\theta)\log\frac{\beta}{1-\alpha}+(1-L(\theta))\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{E_\theta(z)}$$

$\left(z=\log\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right.$ $E_\theta(z)$ハθニ於ケルzノ平均値$\left.\right)$

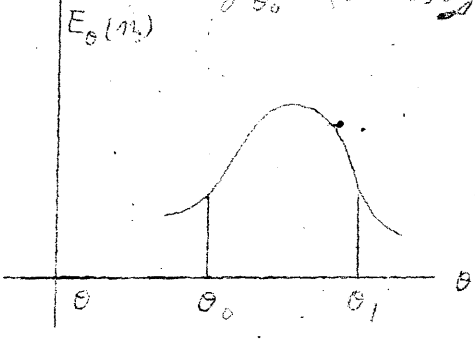
$f(x,\theta)$ハ$x=1$デθ, $x=0$デ$1-\theta$ナル故、zハ$\log\frac{\theta_1}{\theta_0}$ヲ確率θデ($x=1$ナルトキ $z=\log\frac{\theta_1}{\theta_0}$ナル故)

$\log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}$ヲ確率$1-\theta$デ($x=0$ナルトキ $z=\log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}$ナル故)

トル。

故ニ $E_\theta(z)=\theta\log\frac{\theta_1}{\theta_0}+(1-\theta)\log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}$

故ニ $E_\theta(n)\sim\dfrac{L(\theta)\log\frac{\beta}{1-\alpha}+(1-L(\theta))\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\theta\log\frac{\theta_1}{\theta_0}+(1-\theta)\log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}$ デアタヘラレル。



9、例題三

A, B ナル二ツノ生産方法ノ間ニ優劣ヲ比較スルニ當リ、生産サレタ

各々ノ生産物ニ於ケル良品ノ率ヲ夫々 p_A、p_B デアラハス。

方法 A ノ方法 B ニ対スル優劣ヲ計ル測度トシテ、

$u = k_A / k_B$ $\left(k_A = p_A/(1-p_A), \ k_B = p_B/(1-p_B)\right)$ ヲ用ヒル。

更ニ $u \geq u_1 (> u_0)$ ナル u_1 ニ対シテ B ヲトル危険率ハ β ヨリ大ナラズ、

又 $u \leq u_0$ ナル u ニ対シテ A ヲトル危険率ハ α ヨリ大ナラズ要求サレタト

スル。

良品ニハ 1，不良品ニハ 0 ヲ対応セシメ、各母集団ヨリトラレタ標本、

但 (a, b) ヲ以テ一ツノ標本トスル。然ルトキハ (a, b) ハ $(0, 1)$,

$(1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ ノ何レカノ値ヲトル。

以下 (a, b) ガ $(0, 1)$ 又ハ $(1, 0)$ ナル値ヲトル場合ノミヲ問題ト

スル。

(a, b) ガ $(0, 1)$ 又ハ $(1, 0)$ ヲダケトルトイフ條件ノ下ニオケル (a, b)

ガ $(0, 1)$ デアル確率ハ

$$\theta = \frac{(1-p_A)\,p_B}{p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A)}$$

又條件附 $\Pr\{(a, b) = (1, 0)\} = 1 - \theta = \dfrac{(1-p_B)\,p_A}{p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A)}$

u ニ就イテ述ベラレテヰタ危険率ヲ θ ニツキ考ヘルト、

$$\theta = \frac{u}{1-u}$$ カラ

$\theta \leqq \theta_0 = \frac{u_0}{1-u_0}$ ナルθニ対シテAヲトル危険率ハαヨリ大ナラズ，

$\theta \geqq \theta_1 = \frac{u_1}{1-u_1}$ ナルθニ対シテBヲトル危険率ハβヨリ大ナラズ

期スル。

標本中ノ組合セ(0,1),(1,0)ノ数ヲt，(0,1)ナル組合セノ数ヲt_2トシテ前例ニ於ケルmノ代リニt，d_mノ代リニt_2ヲ用フルトキ，

$$A_t = \frac{\log\frac{\beta}{1-\alpha}}{\log u_1 - \log u_0} + t\,\frac{\log\frac{1+u_1}{1+u_0}}{\log u_1 - \log u_0}$$

$$R_t = \frac{\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{\log u_1 - \log u_0} + t\,\frac{\log\frac{1+u_1}{1+u_0}}{\log u_1 - \log u_0}$$

シカルトキ標本抽出ノ式ハ

$A_t < t_2 < R_t$ ナルトキ抽出ヲツヾケル

$t_2 \leqq A_t$ ナルトキハBナル方法ヲトル

$R_t \leqq t_2$ ナルトキAナル方法ヲトル　トナル。

ハ 数値例

$u_0=1.3,\ u_1=3,\ \gamma=.03,\ \beta=.10$

標本抽出数	(0,1),(1,0)ナル標本	A_t	t_2	R_t
1	(0,1)	1	1	
2	(0,1)	1	2	
3	(1,0)	1	2	
4	(1,0)	1	2	
5	(1,0)	0	2	
6	(0,1)	1	3	
7	(1,0)	1	3	
8	(0,1)	2	4	
9	(0,1)	3	5	
10	(1,0)	3	5	
11	(1,1)	4	6	
12	(0,1)	5	7	
13	(0,1)	5	8	13
14	(1,0)	6	8	12
15	(1,0)	7	8	14
16	(0,1)	7	9	15
17	(1,0)	8	9	16
18	(1,0)	9	9	16
19		9		17
20		10		18
21		11		18
22		11		19
23		12		20
24		13		20
25		13		21
26		14		22
27		15		22
28		15		23
29		16		24

18回目デBナル方法ヲ採レトノ結論ヲ得ル。

例3

10、母集團分布ガ正規分布ヲナストキ、

(10.1) $f(X,\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(1/2\sigma^2)(x-\theta)^2}$ トスル。

(10.2) $p_{1m}=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sigma^m}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_1)^2}$

(10.3) $p_{0m}=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sigma^m}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{m}(x_\alpha-\theta_0)^2}$ ナル故

尤度比ニ依ル抽出方式ハ

(10.4) $B<\dfrac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^m(x_\alpha-\theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^m(x_\alpha-\theta_0)^2}}<A$ ナルトキハ抽出ヲツヾケル

(10.5) $\dfrac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^m(x_\alpha-\theta_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^m(x_\alpha-\theta_0)^2}}\leqq B$ ナルトキハ合格トスル

(10.6) $\geqq A$ ナルトキハ不合格トスル

A, Bノ代リニ近似値 $(1-\beta)/\alpha$ 及 $\beta/(1-\alpha)$ ヲ代入シテ、對數ヲトリ整頓スルト、上ノ各式ハ

(10.7) $\dfrac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\dfrac{\beta}{1-\alpha}+m\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}<\sum_{\alpha=1}^{m}x_\alpha<\dfrac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\dfrac{1-\beta}{\alpha}+m\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$

ナルトキハ抽出ヲツヾケル。

(10.8) $\sum_1^m x_\alpha\leqq\dfrac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\dfrac{\beta}{1-\alpha}+m\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$ ナルトキハ合格

(10.9) $\sum_1^m x_\alpha\geqq\dfrac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\dfrac{1-\beta}{\alpha}+m\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$ ナルトキハ不合格

トナル。

$$A_m=\frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{\beta}{1-\alpha}+m\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$

$$R_m=\frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{1-\beta}{\alpha}+m\frac{\theta_0+\theta_1}{2}$$ トオケバ前例ノ通リニ

5頁
行ハレル。

以上引用論文

(1) A. Wald "Sequential test of Statistical hypothesis"
Annals of Math Stat. 1945

(2) A. Wald. "On the Cumulative Sums of Random Variables"
Annals of Math Stat. 1944

数値例

$\theta_0 = 135$, $\theta_1 = 150$, $\alpha = .01$, $\beta = .03$

抽出回数	A_m	標本ノ値 X_q	ΣX_q 標本値和	R_m
1	/	151	151	334
2	139	144	295	476
3	281	121	416	619
4	424	137	553	961
5	566	138	691	904
6	709	136	827	1046
7	851	155	982	1189
8	994	160	1142	1331
9	1136	144	1286	1474
10	1279	145	1431	1616
11	1421	130	1561	1759
12	1564	120	1681	1901
13	1706	104	1785	2044
14	1849	140	1925	2186
15	1991	125	2050	2329
16	2134	106	2156	2471
17	2276	145	2301	2614
18	2419	123	2424	2756
19	2561	138	2562	2899
20	2704	108	2670	3041
21	2846			4184
22	2989			4326
23	3131			4469
24	3274			4611
25	3416			4754
26	3559			4896
27	3704			4039
28	3844			4187
29	3986			4324
30	4129			4466
31	4271			4609
32	4414			4751
33	4556			4894
34	4699			5036
35	4841			5179

$m = 20$ デ合格ト判定スル

(1947. 1. 31)