二項定理の証明に対する一注意

松下 嘉米男

一般の二項定理, 即ち $|x|<1$, α: 定数なる時函数 $(1+x)^{\alpha}$ が $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ なる Taylor 級数に展開されるといふ事は、複素変数の解析函数の立場より見れば明かなことであるが, 変数を定数に限定すると, 之の証明が問題になる。それで本稿に於ても, 実変数の立場より, 之の証明に関して気付いた事を少しく述べる。

(尚, 既に解析函数の理論より明かなことを, わざわざ変数を定数に限って厄介な証明をしなくてもよいのであらうが, 現今微積分學に於ては, 之を実変数の立場より証明してゐるし, 亦それ自身全然興味の無いことでも無いと思はれるので之に関し敢て此処に記す次才である。)

普通微積分學の書物に於ては Taylor の定理

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n$$

を微分法より導き, 従って R_n を $f(x)$ の導函数を用ひた形に表はしてゐる。そして R_n の形としては

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n,\quad 0<\theta<1 \qquad (A)$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(b-a)^n,\quad 0<\theta<1 \qquad (B)$$

等を与へてある。そこで実際函数の Taylor 級数展開を証明するに際しては, 函数に應じて R_n の適当な形を採り, それにより $R_n\to 0\ (n\to\infty)$

を証するのである。さて一般の二項定理

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad |x|<1,\quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

の証明についてよく本に見られる所では、$0\leqq x<1$ なる x に対しては R_n を(A)の形にとり、$-1<x<0$ なる x に対しては(B)の形を取って証明してゐる。そしてこの証明も左程簡単なものではない。そこで以下に少くとも取扱上比較的簡単な証明法を述べようと思ふ。それはTaylorの定理を積分法により求め、R_n を積分を用ひた形で表はし、それを用ひて証明するのである。Taylorの定理は、$\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}dx$ に部分積分法を適用することにより容易に得られる。そしてこの際 R_n は

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}dx \qquad (C)$$

で与へられる。こゝで $f^{(n)}(x)$ の $[a,b]$ に於ける連續性は假定するので、此の点、單にTaylorの定理の証明としては、微分法によるより、假定が多いわけであるが、然しTaylor級数展開を論ずる時は、$f(x)$ は何回でも微分出来る函数でなければ、始めから問題にならぬ故、之は今の場合差支へない。そこで

$$f(x)=(1+x)^{\alpha} \qquad |x|<1$$

に対し $R_n\to 0\ (n\to\infty)$ を証するのであるが此の際 R_n は次の如くなる。

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot(1+t)^{\alpha-n}\cdot dt$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}dt$$

こゝで

$0 \leqq t \leqq x$ なる時は　$0 \leqq \dfrac{x-t}{1+t} \leqq x$,

$0 \geqq t \geqq x$ なる時は　$0 \geqq \dfrac{x-t}{1+t} \geqq x$,

故に何れにしても

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqq |x|$$

従って

$$|R_n| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right|\cdot\left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1}\cdot(1+t)^{\alpha-1}dt\right|$$

$$\leqq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right|\cdot|x|^{n-1}\cdot\left|\int_0^x |1+t|^{\alpha-1}dt\right|$$

尚, $|t| \leqq |x| < 1$ なる故 $1+t > 0$, 従って

$$\leqq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right|\cdot|x|^{n-1}\cdot\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}dt\right|$$

又, $\alpha = 0$ なる時は定理は trivial なる故, $\alpha \neq 0$ とすると

$$= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right|\cdot|x|^{n-1}\cdot\left|\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha}\right|$$

$$= |\alpha|\cdot|(\alpha-1)x|\cdot\left|\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)x\right|\cdots\left|\left(\frac{\alpha}{n-1}-1\right)x\right|\cdot\left|\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha}\right|$$

さて, $|x| < 1$ なる故, n が充分大になれば, 例へばある n_0 より大になれば

$$\left|\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)x\right| < x_0 < 1$$

が成立する様な x_0 が存在する。そうすると $n > n_0$ に対し，

$$|R_n| < \left|\alpha\cdot(\alpha-1)\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\alpha}{n_0}-1\right)x^{n_0}\right|\cdot x_0^{\,n-n_0-1}\cdot\left|\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha}\right|$$

より，$n\to\infty$ なる時 $R_n\to 0$ なることが分り定理の證明は完結する。

以上，$0 \leqq x < 1$ なる場合と $0 > x > -1$ なる場合とを分けずに証明出来たのは，思ふに，R_n の(C)の形が(A)，(B)を或る意味で含んでゐるからであらう。即ち(A)，(B)は(C)より次の如くして導かれる。

先づ $1 \leqq p \leqq n$ なる整数 p を一つ定めると，積分に関する平均値の定理により

$$\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}dx = f^{(n)}(c)(b-c)^{n-p}\int_a^b (b-x)^{p-1}dx,\quad a<c<$$

$$= \frac{f^{(n)}(c)(b-c)^{n-p}(b-a)^p}{p}$$

ここで $c = a+\theta(b-a)$ とおくと；$0<\theta<1$ とな

$$= \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))(1-\theta)\ \text{[illegible]}}{p}$$

故に

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))\cdot(1-\theta)^{n-p}(b-a)^n}{p(n-1)!}\qquad 0<\theta<$$

となる。之より R_n が $p=n$ であった場合は(A となり，$p=1$ であった場合は(B)となることかわかる。

尚一般に $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ の証明に於て R_n を(C)の形にとつてする時，それが(A)又は(B)の形をとつてした場合より殊更に複雑になるとは思はれない。実際 $R_n \to 0$ の証明に際しては証明が簡単になる様な R_n の形を選ぶのがよいのであるが，上の様な理由からして筆者は R_n の形としては (A)，(B) より先に(C)を推したいと思ふのである

以上