論文紹介3.

M. Kac

Random Walk in The Presence of Absorbing Barriers
The Annals of the Mathematical Statistics. Vol. XVI. No.1.
(March 1945)

以下M.Kacの上記標題の論文を紹介するが計算を補つておく。これはなくもがなの紹介者のすさびかも知れない。

問題

一質点が直線上で、原点から出発して相継ぐ時間々隔Δtの間の変位が独立な確率変数

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ -----$$

で表はされる様な運動をなし、全変位の和が$p\,(p \geq 0)$を越えるか又は$-q\,(q \geq 0)$を越えたときは吸収されるものとする。質点の壽命(the length of life)が与へられたtより大なる確率を求めることを問題とする。

之は又賭の問題としてq点以上損するかp点以上得点した人は勝負を止めると考へてもよい。

1. discrete Case

簡單の為に$\Delta t=1$とおき、確率變數Xは1及び-1を確率$\frac{1}{2}$をもつて取ることにする。質点の壽命をNとすれば

$$\mathrm{Prob.}\{N > n\} = \mathrm{Prob.}\{-q \leq X_1 \leq p, -q \leq X_1 + X_2 \leq p, ---, -q \leq X_1 + X_2 + --- + X_n \leq p\}$$

である. p, q は整數としておく。

m を整数として

$m=1$ 又は $m=-1$ のとき　$\delta(m) = \frac{1}{2}$

然らざるとき　$\delta(m) = 0$

と $\delta(m)$ を定義すれば

$$\mathrm{Prob}\{N > n\} = \{-q \leq X_1 \leq p, -q \leq X_1 + X_2 \leq p, ---, -q \leq X_1 + X_2 + --- + X_n \leq p\} = \sum \delta(m_1)\,\delta(m_2) --- \delta(m_n)$$

但し $\sum$ は

$-q \leq m_1 \leq p, -q \leq m_1 + m_2 \leq p, ---, -q \leq m_1 + m_2 + --- + m_n \leq p$

なるすべての $m_1, m_2, ---, m_n$ の上にわたるもの

である.

$$l_j = q + m_1 + --- + m_j, \qquad (j = 1, 2, ---, n)$$

とおけば

$$(1)\quad \mathrm{Prob}\{N > n\} = \sum_{l_1, ---, l_n = 0}^{p+q} \delta(l_1 - q)\,\delta(l_2 - l_1) --- \delta(l_n - l_{n-1})$$

今次の如き $\{(p+q+1), (p+q+1)\}$ −型正方行列を考へる。

$$(2)\quad A = \{\delta(i-k)\} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

然るとき(1)の右辺の和は A^n の第 $(q+1)$-列の原素の和である、何者 $n=1$ のときは、明かだから帰納法で証明する

$$\sum_{l_1,\cdots,l_{n-1}=0}^{p+q} \delta(l_1-q)\,\delta(l_2-l_1)\cdots\delta(l_{n-1}-l_{n-2})$$

は A^{n-1} の第 $q+1$ 列の原素の和であるとする、従って A^{n-1} の第 $q+1$ 列の原素は

$$\sum_{l_1,\cdots,l_{n-2}=0}^{p+q} \delta(l_1-q)\,\delta(l_2-l_1)\cdots\delta(l_{n-2}-l_{n-3})\,\delta(0-l_{n-2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{l_1,\cdots,l_{n-2}=0}^{p+q} \delta(l_1-q)\,\delta(l_2-l_1)\cdots\delta(l_{n-2}-l_{n-3})\,\delta(p+q-l_{n-2})$$

従って $A\cdot A^{n-1}=A$ の第 $(q+1)$ 列を考へれば

$$\sum \delta(l_1-q)\cdots\delta(0-l_{n-2})\,\delta(0-0)+\cdots$$
$$+\sum \delta(l_1-q)\cdot\delta(p+q-l_{n-2})\,\delta(0-p-q)$$

$$\sum\delta(l_1-q)\cdots\delta(0-l_{n-2})\delta(p+q-0)+\cdots+\sum\delta(l_1-q\cdots\delta(p+q-l_{n-2})\delta(p+q-p-q)$$

となるからその和を作れば

$$\sum_{l_1,\cdots,l_n=0}^{p+q}\delta(l_1-q)\cdots\delta(l_n-l_{n-1})$$

となる。

行列Aの characteristic roots を求めるに

$$\varphi(u)=\begin{vmatrix} u & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2} & u & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & u & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=$$

$$u^{p+q+1}\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

但し $-\frac{1}{2u}=a$

依って ρ_1,ρ_2 を $\rho^2-\rho+a^2=0$ の根とすれば

$$\frac{\rho_1^{p+q+2}-\rho_2^{p+q+2}}{\rho_1-\rho_2}=0$$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{p+q+2}=1.$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(u+\sqrt{u^2-1}\right)^2 = e^{\frac{2\pi i k}{p+q+2}}$$

$k=1,2,\cdots,p+q+1$

之から u を解いて、その $p+q+1$ 個の根を λ_j とすれば

$$\lambda_j = \cos\frac{\pi j}{p+q+2},\quad j=1,2,\cdots,p+q+1$$

λ_j に対應する eigenvector を

$$\mathfrak{x}^{(j)} = \left\{x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots\cdots, x_{p+q+1}^{(j)}\right\}$$

とすれば、その決定方程式は

$$\frac{1}{2}\left(x_k^{(j)} + x_{k+2}^{(j)}\right) = \cos\frac{\pi j}{p+q+2}\, x_{k+1}^{(j)}$$

$k=0,1,\cdots,p+q.$

但し、$x_0^{(j)} = x_{p+q+2}^{(j)} = 0$ とする

これを解くには

$$x_k^{(j)} + x_{k+2}^{(j)} = 2\cos\frac{\pi j}{p+q+2}\cdot x_{k+1}^{(j)}$$

が三角法の Additiontheorem に似ていることを考へて

$$x_k^{(j)} = \sin\frac{\pi j k}{p+q+2}$$

とおいて見ると

$$x_k^{(j)} + x_{k+2}^{(j)} = \sin\frac{\pi j k}{p+q+2} + \sin\frac{\pi j (k+2)}{p+q+2}$$

(25.0)

が、三角法の Additiontheorem に似てゐることを考へて

$$x_k^{(j)} = \sin\frac{\pi j k}{p+q+2}$$

とおいて見ると

$$x_k^{(j)} + x_{k+2}^{(j)} \equiv \sin\frac{\pi j k}{p+q+2} + \sin\frac{\pi j (k+2)}{p+q+2}$$

$$= 2\sin\frac{\pi j (k+1)}{p+q+2}\cos\frac{\pi j}{p+q+2}$$

となつて丁度良い。これを、normalize する為に

$$(\mathfrak{x}^{(j)}\mathfrak{x}^{(j)}) = \sum_{k=1}^{p+q+1} x_k^{(j)2} = \sum_{k=1}^{p+q+1} \sin^2\frac{\pi j k}{p+q+2}$$

$$= \frac{p+q+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p+q+1}\cos\frac{2\pi j k}{p+q+2}.$$

$$= \frac{p+q+1}{2} - \frac{\cos\frac{p+q+2}{p+q+2}\pi j \sin\frac{p+q+1}{p+q+2}\pi j}{2\sin\frac{\pi j}{p+q+2}}$$

$$= \frac{p+q+1}{2} + \frac{\sin\frac{\pi j}{p+q+2}}{2\sin\frac{\pi j}{p+q+2}} = \frac{p+q+2}{2}$$

依つて normalized eigenvector は

$$x_k^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{p+q+2}}\sin\frac{\pi j k}{p+q+2}$$

$$k = 1, 2, \cdots, p+q+1.$$
$$j = 1, 2, \cdots, p+q+1.$$

$$R=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots\cdots & x_{p+q+1}^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots\cdots & x_{p+q+1}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & & \\ x_1^{(p+q+1)} & x_2^{(p+q+1)} & & x_{p+q+1}^{(p+q+1)} \end{pmatrix}$$

とおけば

$$A^n=R'\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & \lambda_{p+q+1}^n \end{pmatrix}R$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1^n x_1^{(1)} & \lambda_2^n x_1^{(2)} & & \lambda_{p+q+1}^n x_1^{(p+q+1)} \\ \lambda_1^n x_2^{(1)} & \lambda_2^n x_2^{(2)} & & \lambda_{p+q+1}^n x_2^{(p+q+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n x_{p+q+1}^{(1)} & \lambda_2^n x_{p+q+1}^{(2)} & \cdots\cdots & \lambda_{p+q+1}^n x_{p+q+1}^{(p+q+1)} \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots\cdots & x_{p+q+1}^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots\cdots & x_{p+q+1}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & & \\ x_1^{(p+q+1)} & x_2^{(p+q+1)} & \cdots\cdots & x_{p+q+1}^{(p+q+1)} \end{pmatrix}$$

この第$q+1$列の要素を計算すれば

$$\lambda_1^n \chi_1^{(1)} \chi_{q+1}^{(1)} + \lambda_2^n \chi_1^{(2)} \chi_{q+1}^{(2)} + \cdots + \lambda_{p+q+1}^n \chi_1^{(p+q+1)} \chi_{q+1}^{(p+q+1)}$$

$$\lambda^n \chi_2^{(1)} \chi_{q+1}^{(1)} + \lambda_2^n \chi_2^{(2)} \chi_{q+1}^{(2)} + \cdots + \lambda_{p+q+1}^n \chi_2^{(p+q+1)} \chi_{q+1}^{(p+q+1)}$$

$$- - - - - - - - -$$

$$\lambda_1^n \chi_{p+q+1}^{(1)} \chi_{q+1}^{(1)} + \lambda_2^n \chi_{p+q+1}^{(2)} \chi_{q+1}^{(2)} + \cdots + \lambda_{p+q+1}^n \chi_{p+q+1}^{(p+q+1)} \chi_{q+1}^{(p+q+1)}$$

依って

$$\mathrm{Prob.}\{N>n\} = \sum_{\gamma=1}^{p+q+1} \sum_{j=1}^{p+q+1} \lambda_j^n \chi_\gamma^{(j)} \chi_{q+1}^{(j)} = \sum_{j=1}^{p+q+1} \lambda_j^n \chi_{q+1}^{(j)} \left(\sum_{\gamma=1}^{p+q+1} \chi_\gamma^{(j)} \right),$$

処で

$$\sum_{\gamma=1}^{p+q+1} \chi_\gamma^{(j)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+q+2}} \sum_{\gamma=1}^{p+q+1} \sin \frac{\pi j \gamma}{p+q+2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+q+2}} \frac{\sin \frac{\pi j}{2} \sin \frac{p+q+1}{2(p+q+1)} \pi j}{\sin \frac{\pi j}{2(p+q+2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{p+q+2}} \frac{-\cos\left(\pi j - \frac{\pi j}{2(p+q+2)}\right) + \cos \frac{\pi j}{2(p+q+2)}}{\sin \frac{\pi j}{2(p+q+2)}}$$

$$= \begin{cases} 0 & , j ; \text{even} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+q+2}} \cot \dfrac{\pi j}{2(p+q+2)} & , j ; \text{odd} \end{cases}$$

$$\mathrm{Prob}\{N>n\}$$

$$= -\frac{2}{p+q+2} \sum_{j=1}^{p+q+1}{}^{*} \cos^n \frac{\pi j}{p+q+2} \sin \frac{\pi j(q+1)}{p+q+2} \cot \frac{\pi j}{2(p+q+2)}$$

但し $\sum^*$ は j が odd のみ加へることを意[illegible]

$t=0$ で $x=x_0$ ($x_0>0$) にある Brown 粒子が t と $t+dt$ の間に初めて $x=0$ 又は $x=d$ ($0<x_0<d$) に来る確率は、R. Fürth が Ann. d. Phys. 53 (1917). p. 177 で

$$dt\,\frac{4\pi D}{d^2}\sum^{\infty}(2m+1)e^{\frac{-\pi^2 Dt}{d^2}(2m+1)^2}\sin\frac{(2m+1)\pi x_0}{d}$$

D: 拡散係數

と求へたが、之は上の Prob. ($N>n$) に於て

$$q=\frac{x_0}{\Delta x},\ p=\frac{d-x_0}{\Delta x},\quad n=\frac{t}{\Delta t}$$

とおき $\Delta x\to 0$, $\Delta t\to 0$ のとき $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\to D$ と假定すれば出る。何者

$$\frac{2}{p+q+2}\cos^n\frac{\pi j}{p+q+2}\sin\frac{\pi j(q+1)}{p+q+2}\cot\frac{\pi j}{2(p+q+2)}$$

$$p+q=\frac{d}{\Delta x},\quad q=\frac{x_0}{\Delta x},\quad n=\frac{t}{\Delta t}$$

とおいて Δx, Δt を充分小ならしめて考へると

$$\sin\frac{\pi j(q+1)}{p+q+2}\sim\sin\frac{\pi j x_0}{d}.$$

$$\frac{2}{p+q+2}\cos^n\frac{\pi j}{p+q+1}\cot\frac{\pi j}{2(p+q+1)}\sim\frac{2\Delta x}{d}\cos^n\frac{\pi j\Delta x}{d}\cot\frac{\pi j\Delta x}{2d}$$

$$=\frac{2\Delta x}{d}\left(1-\frac{\pi^2 j^2(\Delta x)^2}{2!\,d^2}\right)^{\frac{t}{\Delta t}}\frac{2d}{\pi j\Delta x}$$

$$= \frac{4}{\pi j} e^{-\frac{\pi^2 j^2 Dt}{d^2}}$$

となるから

$$\mathrm{Prob.}\left\{N > \frac{t}{\Delta t}\right\} \to \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{j} e^{\frac{-\pi^2 j^2 D}{d^2} t} \sin \frac{\pi j x_0}{d}$$

之を微分すれば Fürth の公式が出る.

2. Continuous case の一般論

X の分布函数が連續で偶な密度 $p(x)$ を有つとする.

$$\mathrm{Prob}\{N > n\} = \int \cdots \int_{\Omega} p(x_1) \cdots p(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

但し Ω は

$$-q \leqq x_1 \leqq p,\ -q \leqq x_1 + x_2 \leqq p,\ \cdots;\ -q \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq p$$

で define される.

$$y_j = q + x_1 + \cdots + x_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

とおけば, この変換の Jacobian は 1 だから

(3) $\mathrm{Prob}\{N > n\}$

$$= \int_0^{p+q} \cdots \int_0^{p+q} p(y_1 - q)\, p(y_2 - y_1) \cdots p(y_n - y_{n-1})\, dy_1 \cdots dy_n$$

次の積分方程式を考へる.

(4) $$\int_0^{p+q} p(s-t) f(t)\, dt = \lambda f(s)$$

この積分方程式のn次の重複核を$K_n(s,t)$とすれば，(3)の右辺は

$$\int_0^{p+q} K_n(q,t)\,dt.$$

であるから

$$Prob\{\nu > n\} = \int_0^{p+q} K_n(q,t)\,dt.$$

處が積分方程式の一般論から(4)のeigenvalueを$\lambda_1, \lambda_2, ---$，それ対應するnormalized eigen-functionを$f_1(t), f_2(t), ---$とすれば

$$K_n(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n f_j(s) f_j(t), \quad n \geq 2$$

であるから

$$Prob.\{\nu > n\} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n f_j(q) \int_0^{p+q} f_j(t)\,dt.$$

3. A particular case

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

とすれば(4)は

$$(5) \qquad \int_0^{p+q} e^{-|s-t|} f(t)\,dt = 2\lambda f(s)$$

となる。これを書かへて

$$(6) \qquad e^{-s}\int_0^{s} e^{t} f(t)\,dt + e^{s}\int_s^{p+q} e^{-t} f(t)\,dt = 2\lambda f(s)$$

之を二回 s で微分して

$$f''(s)+\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)f(s)=0$$

之を解いて $\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{\lambda}}=y$ とおくて、

$$f(s)=A\sin ys+B\cos ys.$$

之を(6)に代入して

$$\int e^{t}\sin yt\,dt=\frac{e^{t}(\sin yt-y\cos yt)}{1+y^2},$$

$$\int e^{-t}\sin yt\,dt=\frac{e^{-t}(-\sin yt-y\cos yt)}{1+y^2},$$

$$\int e^{t}\cos yt\,dt=\frac{e^{t}(\cos yt+y\sin yt)}{1+y^2},$$

$$\int e^{-t}\cos yt\,dt=\frac{e^{-t}(-\cos yt+y\sin yt)}{1+y^2}$$

を用ひて、

$$A\left[-e^{-s}y+e^{s-p-q}\left(-\sin y(p+q)-y\cos y(p+q)\right)\right]$$
$$+B\left[-e^{-s}+e^{s-p-q}\left(-\cos y(p+q)+y\sin(p+q)\right)\right]=0.$$

之が、A、Bの如何に拘らず成立する為には、

$$(7)\quad \tan(p+q)y=-\frac{2y}{1-y^2}.$$

これの解を y_j とすれば $\qquad \lambda_j=\dfrac{1}{1+y_j^2}$

これに対応する normalized eigen function を $f_j(t)$ とすれば

$$f_j(t) = \frac{\sin y_j t + y_j \cos y_j t}{\sqrt{1+\frac{1}{2}(p+q)(1+y_j^2)}}$$

$$\int_0^{p+q} (\sin y_j t + y_j \cos y_j t)^2 dt$$

$$= \int_0^{p+q} \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2y_j t) + y_j \sin^2 y_j t + \frac{y_j^2}{2}(\cos^2 y_j t+1)\right] dt$$

$$= \int_0^{p+q} \left[\frac{1+y_j^2}{2} - \frac{1-y_j^2}{2}\cos 2y_j t + y_j \sin 2y_j t\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}(p+q)(1+y_j^2) - \frac{1-y_j^2}{4y_j}\sin 2y_j(p+q) - \frac{1}{2}(\cos 2y_j(p+q)-1)$$

$$= \frac{1}{2}(p+q)(1+y_j^2) + \cot(p+q)y_j \sin y_j(p+q)\cos(p+q)y_j$$
$$- \cos^2(p+q)y_j + 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(p+q)(1+y_j^2)$$

$$\int_0^{p+q} f_j(t)dt = \int_0^{p+q} (\sin y_j t + y_j \cos y_j t)dt$$

$$= \frac{1}{y_j}\{1-\cos(p+q)y_j + y_j \sin(p+q)y_j\}$$

$$1-\cos(p+q)y_j + y_j \sin(p+q)y_j = \begin{cases} 0, & \cos(p+q)y_j = \frac{1-y_j^2}{1+y_j^2} \\ 2, & \cos(p+q)y_j = -\frac{1-y_j^2}{1+y_j^2} \end{cases}$$

故に、

$$\mathrm{Prob.}\{N > n\} = 2\sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(1+y_j^2)^n} \frac{\sin y_j q + y_j \cos y_j q}{y_j\{1+\frac{1}{2}(p+q)(1+y_j^2)\}}$$

但し $\sum'$ は $\cos(p+q)y_j = -\dfrac{1-y_j^2}{1+y_j^2}$ のみ加へるものとする

(4) の形の積分方程式は一般には解けない。

（小川潤次郎紹介）