アル頻度曲線ヲ二ツノ normal 頻度曲線ノ和ニテ近似スルコトニツイテ

林知己夫

1　アル頻度曲線ヲ $f(x)$ トスル。此ヲ次ノ様ニ分割シヨウトスル

$$f(x) = \frac{\xi}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{\eta}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

但シ $\xi + \eta = 1$

σ_i, m_i ハ夫々標準偏差及ビ平均ヲ表ハス

両辺ニ e^{itx} ヲ掛ケテ特性函数ヲ作レバ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \xi e^{m_1 it - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} + \eta e^{m_2 it - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2}$$

両辺ヲ展開シテ t ノ巾ニツイテノ係数ヲ等シイトオク

$$1 + itE - \frac{t^2}{2}E(x^2) - \frac{it^2}{3!}E(x^3) + \frac{t^4}{4!}E(x^4) + \frac{it^5}{5!}E(x^5) - \cdots\cdots$$

$$= \Big[(\xi+\eta) + it(\xi m_1 + \eta m_2) - \frac{t^2}{2}\{\xi m_1^2 + \eta m_2^2 + \xi\sigma_1^2 + \eta\sigma_2^2)$$
$$- \frac{it^3}{3!}(\xi m_1^3 + \eta m_2^3 + 3\xi m_1\sigma_1^2 + 3\eta m_2\sigma_2^2) + \frac{t^4}{4!}(\xi m_1^4$$
$$+ \eta m_2^4 + 3\xi\sigma_1^4 + 3\eta\sigma_2^4 + 6\xi m_1^2\sigma_1^2 + 6\eta m_2^2\sigma_2^2)$$
$$+ \frac{(it)^5}{5!}(\xi m_1^5 + \eta m_2^5 + 15\xi m_1\sigma_1^4 + 15\eta m_2\sigma_2^4 + 10\xi m_1^3\sigma_1^2 + 10\xi m_2^3\sigma_2^3)$$
$$\cdots \Big]$$

此ヨリ

$$(1)\quad \begin{cases} \xi m_1 + \eta m_2 = E(x) \\ \xi m_1^2 + \eta m_2^2 + \xi\sigma_1^2 + \eta\sigma_2^2 = E(x^2) \\ \xi m_1^3 + \eta m_2^3 + 3\xi m_1\sigma_1^2 + 3\eta m_2\sigma_2^2 = E(x^3) \\ \xi m_1^4 + \eta m_2^4 + 3\xi m\sigma_1^4 + 3\eta\sigma_2^4 + 6\xi m_1^2\sigma_1^2 + 6\eta m_2^2\sigma_2^2 = E(x^4) \\ \xi m_1^5 + \eta m_2^5 + 15\xi m_1\sigma_1^4 + 15\eta m_2\sigma_2^4 + 10\xi m_1^3\sigma_1^2 + 10\eta m_2^3\sigma_2^2 = E(x^5) \end{cases}$$

(1)　$\boxed{E(x)=a,\ E(x^2)=b,\ E(x^3)=c,\ E(x^4)=d,\ E(x^5)=e \quad \sigma_1^2 = p_1,\ \sigma_2^2 = p_2}$

トオケバ

$$
\begin{cases}
\xi m_1 + \eta m_2 = a \\
\xi m_1^2 + \eta m_2^2 + \xi \rho_1 + \eta \rho_2 = b \\
\xi m_1^3 + \eta m_2^3 + 3\xi m_1 \rho_1 + 3\eta m_2 \rho_2 = c \\
\xi m_1^4 + \eta m_2^4 + 3\xi \rho_1^2 + 3\eta \rho_2^2 + 6\xi m_1^2 \rho_1 + 6\eta m_2^2 \rho_2 = d. \\
\xi m_1^5 + \eta m_2^5 + 15\xi m_1 \rho_1^2 + 15\eta m_2 \rho_2^2 + 10\xi m_1^3 \rho_1 + 10\eta m_2^3 \rho_2 = e
\end{cases}
$$

$\xi = 1 - \eta$ トオケバ

$\xi m_1 + \eta m_2 = a$ カラ

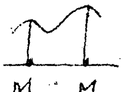
$$
\boxed{② \quad \xi = \frac{a - m_2}{m_1 - m_2}, \qquad \eta = \frac{m_1 - a}{m_1 - m_2}}
$$

ヲ得ル　此ヲ代入スレバ

$$
(3)\begin{cases}
(a-m_2)m_1^2 + (m_1-a)m_2^2 + (a-m_2)\rho_1 + (m_1-a)\rho_2 = b(m_1-m_2) \\
(a-m_2)m_1^3 + (m_1-a)m_2^3 + 3(a-m_2)m_1\rho_1 + 3(m_1-a)m_2\rho_2 = c(m_1-m_2) \\
(a-m_2)m_1^4 + (m_1-a)m_2^4 + 3(a-m_2)\rho_1^2 + 3(m_1-a)\rho_2^2 + 6(a-m_2)m_1^2\rho_1 \\
\quad + 6(m_1-a)m_2^2\rho_2 = d(m_1-m_2) \\
(a-m_2)m_1^5 + (m_1-a)m_2^5 + 15(a-m_2)m_1\rho_1^2 + 15(m_1-a)m_2\rho_2^2 \\
\quad + 10(a-m_2)m_1^3\rho_1 + 10(m_1-a)m_2^3\rho_2 = e(m_1-m_2)
\end{cases}
$$

此ヨリ $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ (ρ_1, ρ_2) ヲ求メルナラバ $f(x)$ ヲ normal デ近似デキルコトニナラウ

2. 近似解：（其ノ一）



左図ノ如ク山ガ二ケ所ニアルモノヲ分割スル場合山ノ所ノ値ヲ M_1, M_2 トシ m_1, m_2 ハ其トアマリ異ナラヌモノト考ヘル。即チ

$m_1 = M_1(1+\varepsilon_1)$, $m_2 = M_2(1+\varepsilon_2)$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ハ 1 ニ比シテ十分小デアルトシテ二次以上ヲ neglect シテトイテミヨウ。

更ニ ρ_1, ρ_2 ニタイテモマズ推定値ヲ求メ此ヲ α, β ト

シソレカラノ偏差ガヤハリ小サイモノトシ

$$\rho_1 = \alpha(1+\lambda_1), \quad \rho_2 = \beta(1+\lambda_2)$$

トオキ λ_1, λ_2 ノ二次以上ヲ neglect スルコトニシヨウ。（λ ト ε トノ積モ neglect スル）

α, β ハ次ノ如クシテ求メルコトヽスル

即チ $\boxed{m_1 = M_1, \quad m_2 = M_2}$ トオク

此ノ時 ξ, η ヲ ξ', η' トスレバ

$$\xi' = \frac{a - M_2}{M_1 - M_2}, \quad \eta' = \frac{M_1 - a}{M_1 - M_2}$$ トナリ定メラレル

サレバ

$$\left.\begin{aligned} \xi'\alpha + \eta'\beta &= b - \xi' M_1^2 - \eta' M_2^2 \\ 3\xi' M_1\alpha + 3\eta' M_2\beta &= c - \xi' M_1^3 - \eta' M_2^3 \end{aligned}\right\} ヨリ$$

$\alpha\ \beta$ ハ求メラレル。

$$(4) \quad \boxed{\alpha = \frac{\begin{vmatrix} b - \xi' M_1^2 - \eta' M_2^2 & \eta' \\ c - \xi' M_1^3 - \eta' M_2^3 & 3\eta' M_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ 3\xi' & 3\eta' M_2 \end{vmatrix}} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \xi' & b - \xi' M_1^2 - \eta' M_2^2 \\ 3\xi' M_1 & c - \xi' M_1^3 - \eta' M_2^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ 3\xi' M_1 & 3\eta' M_2 \end{vmatrix}}}$$

以上ノ如クシテ (3) ヲカキアラタメレバ

$$\{2M_1^2(a-M_2) + M_1M_2^2 + M_1\beta - bM_1\}\varepsilon_1 + \{2M_2^2(M_1-a) - M_1^2M_2 - \alpha M_2 + bM_2\}\varepsilon_2$$
$$+ \{\alpha(a-M_2)\}\lambda_1 + \{\beta(M_1-a)\}\lambda_2$$
$$= b(M_1-M_2) - M_1^2(a-M_2) - M_2^2(M_1-a) - \alpha(a-M_2) - \beta(M_1-a)$$

$$\{3M_1^3(a-M_2) + M_1M_2^3 + 3M_1\alpha(a-M_2) + 3M_1M_2\beta - c\cancel{M_1}\}\varepsilon$$
$$+ \{3M_2^3(M_1-a) - M_1^3M_2 - 3M_1M_2\alpha + 3M_2\beta(M_1-a) + cM_2\}$$
$$+ \{3M_1\alpha(a-M_2)\}\lambda_1 + \{3M_2\beta(M_1-a)\}\lambda_2$$

$$= c(M_1-M_2)-M_1^3(a-M_2)-M_2^3(M_1-a)$$
$$-3M_1\alpha(a-M_2)-3M_2\beta(M_1-a)$$

$$\{4M_1^4(a-M_2)+M_1M_2^4+3\beta^2M_1+12M_1^2\alpha(a-M_2)+6M_2^2M_1\beta-dM_1\}\varepsilon_1$$
$$+\{4M_2^4(M_1-a)-M_1^4M_2-3\alpha^2M_2^2+12M_2^2\beta(M_1-a)-6M_1^2M_2\alpha+dM_2\}\varepsilon_2$$
$$+\{6\alpha(a-M_2)(\alpha+M_1^2)\}\lambda_y+\{6\beta(M_1-a)(\beta+M_2^2)\}\lambda_2$$
$$=d(M_1-M_2)-M_1^4(a-M_2)-M_2^4(M_1-a)-3\alpha^2(a-M_2)-3\beta^2(M_1-a)$$
$$-6M_1^2\alpha(a-M_2)-6M_2^2\beta(M_1-a)$$

$$\{5M_1^5(a-M_2)+M_1M_2^5+15M_1\alpha^2(a-M_2)+15M_1M_2\beta^2+30M_1^3\alpha(a-M_2)$$
$$+10M_2^3M_1\beta-eM_1\}\varepsilon_1+\{5M_2^5(M_1-a)-M_1^5M_2+15M_2\beta^2(M_1-a)$$
$$-15M_1M_2\alpha^2+30M_2^3\beta(M_1-a)-10M_1^3M_2\alpha+eM_2\}\varepsilon_2$$
$$+\{10M_1\alpha(a-M_2)(3\alpha+M_1^2)\}\lambda_1+\{10M_2\beta(M_1-a)(3\beta+M_2^2)\}\lambda_2$$
$$=e(M_1-M_2)-M_1^5(a-M_2)-M_2^5(M_1-a)-15M_1\alpha^2(a-M_2)$$
$$-15M_2\beta^2(M_1-a)-10M_1^3\alpha(a-M_2)-10M_2^3\beta(M_1-a)$$

ヲ得レ 此ハ聯立一次方程式デアルカラ簡單ニ解ヲ求メルコトが出来 ε_1, ε_2, λ_1, λ_2 が決定サレル

$$2M_1^2(a-M_2)+M_1M_2^2+M_1\beta-bM_1=A$$
$$2M_2^2(M_1-a)-M_1^2M_2-M_2\alpha+bM_2=B$$
$$\alpha(a-M_2)=C$$
$$\beta(M_1-a)=D$$
$$b(M_1-M_2)-M_1^2(a-M_2)-M_2^2(M_1-a)-\alpha(a-M_2)-\beta(M_1-a)=E$$
$$3M_1^3(a-M_2)+M_1M_2^3+3M_1\alpha(a-M_2)+3M_1M_2\beta-cM_1=F$$
$$3M_2^3(M_1-a)-M_1^3M_2+3M_2\beta(M_1-a)-3M_1M_2\alpha+cM_2=G$$
$$3M_1\alpha(a-M_2)=H$$
$$3M_2\beta(M_1-a)=I$$
(ロ) $$c(M_1-M_2)-M_1^3(a-M_2)-M_2^3(M_1-a)-3M_1\alpha(a-M_2)-3M_2\beta(M_1-a)=J$$
$$4M_1^4(a-M_2)+M_1M_2^4+3\beta^2M_1+12M_1^2\alpha(a-M_2)+6M_1M_2^2\beta-dM_1=K$$

$$4M_2^4(M_1-a) - M_1^4M_2 - 3\alpha^2M_2 + 12M_2^2\beta(M_1-a) - 6M_1^2M_2\alpha + dM_2 = L$$

$$6\alpha(a-M_2)(\alpha+M_1^2) = M$$

$$6\beta(M_1-a)(\beta+M_2^2) = N$$

$$d(M_1-M_2) - M_1^4(a-M_2) - M_2^4(M_1-a) - 3\alpha^2(a-M_2) - 3\beta^2(M_1-a) - 6M_1^2\alpha(a-M_2) - 6M_2^2\beta(M_1-a) = O$$

$$5M_1^5(a-M_2) + M_1M_2^5 + 15M_1\alpha^2(a-M_2) + 15M_1M_2\beta^2 + 30M_1^3\alpha(a-M_2) + 10M_1M_2^3\beta - eM_2 = P$$

$$5M_2^5(M_1-a) - M_1^5M_2 + 15M_2^2\beta^2(M_1-a) - 15M_1M_2\alpha^2 + 30M_2^3\beta(M_1-a) - 10M_1^3M_2\alpha + eM_1 = Q$$

$$10M_1\alpha(a-M_2)(3\alpha+M_1^2) = R$$

$$10M_2\beta(M_1-a)(3\beta+M_2^2) = S$$

$$e(M_1-M_2) - M_1^5(a-M_2) - M_2^5(M_1-a) - 15M_1\alpha^2(a-M_2) - 15M_2\beta^2(M_1-a) - 10M_1^3\alpha(a-M_2) - 10M_2^3\beta(M_1-a) = T$$

[illegible]

$$(5)\begin{cases} A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 + C\lambda_1 + D\lambda_2 = E \\ F\varepsilon_1 + G\varepsilon_2 + H\lambda_1 + I\lambda_2 = J \\ K\varepsilon_1 + L\varepsilon_2 + M\lambda_1 + N\lambda_2 = O \\ P\varepsilon_1 + Q\varepsilon_2 + R\lambda_1 + S\lambda_2 = T \end{cases}$$

トナリ

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E & B & C & D \\ J & G & H & I \\ O & L & M & N \\ T & Q & R & S \end{vmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & E & C & D \\ F & J & H & I \\ K & O & M & N \\ P & T & R & S \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ F & G & H & I \\ K & L & M & N \\ P & Q & R & S \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & E & D \\ F & G & J & I \\ K & L & O & N \\ P & Q & T & S \end{vmatrix} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & C & E \\ F & G & H & J \\ K & L & M & O \\ P & Q & R & T \end{vmatrix}$$

カクシテ

$m_1 = M_1(1+\varepsilon_1)$, $m_2 = M_2(1+\varepsilon_2)$

$\rho_1 = \alpha(1+\lambda_1)$, $\rho_2 = \beta(1+\lambda_2)$　又ヒ(2)ヨリ凡テノモノガ求メラレル

ナホ Test ニヨリ近似度ノ悪イトキハ此ノ m_1, m_2, ρ_1, ρ_2 ヲ前述ノ M_1, M_2, α, β ト考ヘテ更ニトキホシテユケバヨイ。カクノ如ク successive ニトイテユク

3. 近似解（其ノ二）

（3）ヲ $\rho_1=\rho_2=\rho$ 即チ標準偏差ガ等シイモノトシテトイテミヨウ（d_1 ノ位置ノ推定ヲ予メ使ハズニ計算ヲスヽメ得ル）．

（2）ハソノマヽニシテ

$$\begin{cases} a(m_1+m_2) - m_1m_2 + \rho = b \\ a(m_1^2+m_1m_2+m_2^2) - m_1m_2(m_1+m_2) + 3a\rho = c \\ a(m_1^2+m_2^2)(m_1+m_2) - m_1m_2(m_1^2+m_1m_2+m_2^2) + 3\rho^2 \\ \quad + 6\rho(a(m_1+m_2)-m_1m_2) = d \end{cases}$$

即チ $m_1+m_2 = x$　$m_1m_2 = y$ トオキテ整理スル

$$\begin{cases} ax - y + \rho = b \\ ax^2 - ay - xy + 3a\rho = c \\ ax^3 - 2axy - yx^2 + y^2 - 3\rho^2 + 6\rho b = d \end{cases}$$

此ヨリ

$$(7)\begin{cases} ax - y + \rho = b \\ (e-b)x + ay + 3a\rho = -c \\ xy(a^2+e-b) - e(3ab-c) = cb - da \end{cases}$$

(8)　$\rho = b - ax + y$　ヲ代入セバ

$$(9)\quad y = \frac{ax^2 - 3a^2x + 3ab - c}{x - 2a}$$

サレバコヽノ (10) $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ ヲ得ル

但シ

$$(10)\quad \begin{cases} A = a(3ab-2a^3-c) \\ B = -\{3a^2(3ab-c-2a^3)+(3ab-c)(b-a^2)+(cb-da)\} \\ C = (3ab-c)\{2ab-2a^3+2a(b-a^2)\}+4a(cb-da) \\ D = 2a(3ab-c)(ab-c)-4a^2(cb-da) \end{cases}$$

此ヲホーナーノ方法等ニヨリトケバ x 又ハ厳密ニ x ヲ得、カクテ y ヲカクテ y ヲ (8),(9) ヨリ得ル

サレバ直チニ m_1, m_2 ヲ知リ得

即チ　$m_1+m_2=x$　$m_1 m_2=y$

$$(11)\quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2} \\ m_2 = \dfrac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2} \end{cases}$$

又 (2) ヨリ ξ, η ヲ知ル

以上ノ様ニシテ操作ハ完了スル

3. 近似値（其ノ三）

$\xi=\eta=\frac{1}{2}$ トスル　又山ガ二ツアル場合トシヨウ

此ノ時

$$(1)\quad \boxed{\begin{array}{l} 2E(x)=a,\ 2E(x^2)=b,\ 2E(x^3)=c,\ 2E(x^4)=d \\ \sigma_1^2=\rho_1 \quad \sigma_2^2=\rho_2 \end{array}}$$

トスレバ方程式ハ

$$\begin{cases} m_1+m_2=a \\ m_1^2+m_2^2+\rho_1+\rho_2=b \\ m_1^3+m_2^3+3m_1\rho_1+3m_2\rho_2=c \\ m_1^4+m_2^4+6m_1^2\rho_1+6m_2^2\rho_2+3\rho_1^2+3\rho_2^2=d \end{cases}$$

トナル。此ヲ $m_1 = M_1(1+\varepsilon_1)$, $m_2 = M_2(1+\varepsilon_2)$ トシテ
(ρ ニツイテハ仮定ヲオカナイ)
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 以上 neglect スレバ次ノ様ニシテモトメラレル

(ii)
$$\boxed{\begin{aligned} a - M_1 - M_2 &= A \\ b - M_1^2 - M_2^2 &= B \\ c - M_1^3 - M_2^3 &= C \\ d - M_1^4 - M_2^4 &= D \end{aligned}}$$

(iii) $$\varepsilon_2 = \frac{1}{M_2}(A - M_1\varepsilon_1)$$

(iv)
$$\boxed{\begin{aligned} B - 2AM_2 &= B' \\ C - 3AM_2^2 &= C' \\ D - 4AM_2^3 &= D' \end{aligned}}$$

(v) $$\varepsilon_1 = \frac{B' - \rho_1 - \rho_2}{2M_1(M_1 - M_2)}$$

(vi)
$$\boxed{\begin{aligned} &\{B' + (M_1 - M_2)^2\} = P \\ &\{(M_1 - M_2)(2A - M_1 + M_2) - B'\} = Q \\ &\frac{1}{3}\{2C'(M_1 - M_2) - 3(M_1^2 - M_2^2)B'\} = R \\ &\frac{2\{3M_1B' + (M_1 - M_2)^2(2M_1 + M_2)\}}{3(M_1 + M_2)} = S \\ &\frac{2\{(M_1 - M_2)(6AM_2 + 2M_2^2 - M_1M_2 - M_1^2) - 3M_2B'\}}{3(M_1 + M_2)} = T \\ &2\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = U \\ &\frac{D'(M_1 - M_2) - 2(M_1^3 - M_2^3)B'}{3(M_1 + M_2)} = V \end{aligned}}$$

(vii) $$\rho_2 \doteqdot \frac{(R-V)-\rho_1(P-S)}{Q-T+U\rho_1}$$

(viii)
$$\frac{2(Q-T)U-U^2P}{U^2}=E$$

$$RU^2-2P(Q-T)U+QU(P-S)+(Q-T)^2-(P-S)^2=F$$

$$\frac{2UR(Q-T)-P(Q-T)^2+Q(P-S)(Q-T)-Q(R-V)U+2(R-V)(P-S)}{U^2}=G$$

$$\frac{P(Q-T)^2-Q(R-V)(Q-T)-(R-V)^2}{U^2}=H$$

(ix) $$\rho_1^4+E\rho_1^3+F\rho_1^2+G\rho_1+H=0$$

(ix) カラ゛ほーなー ノ方法ニヨリ ρ_1 ノ正根ヲ決定シ目的ニ適スルモノヲトル。カクシテ (i --- viii) ニヨリ

ρ_2, ε_2, ε_1 ニカクシテ m_1, m_2, σ_1^2, σ_2^2 ヲ求メウル。