独立確率変数の級数の収斂問題

河田龍夫

$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$ を与へられた独立確率変数列とし $\sum(X_n - a_n)$ が確率収斂(結局は確率1の収斂する)様な実数列 $\{a_n\}$ が存在するための條件として P. Lévy[1] は limit, maximal concentration function $Q(l)$ を導入し、$Q(l) \equiv 1$ 又は $\equiv 0$ であることを示し前者の場合が上記性質をまんぞくする $\{a_n\}$ の存在する場合であり後者の場合が存在しない場合である事を示した。筆者はその後 Mean concentration function を導入して之についても同じ性質が成立している事を証明した[2]。こゝではこの事実の簡単な証明が得られたから報告する。

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ に対応する特性函数の系列を $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ とし

$$f_{nN} = |f_{n+1} f_{n+2} \cdots f_N|^2$$

とおき

$$f_n = \lim_{N\to\infty} f_{nN}$$

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

で $f(t)$ を定義すれば次の定理が成立する

定理 $f(t)$ は恒等的に1であるか又は測度0の集合をのぞき0である。

この証明には次の補助定理を必要とする。

補助定理 (Raikov) $g(t)$ を確率分布の特性函数とすれば

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} g(t)\,dt\right| \le \left(\frac{1+Rg(h)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

41.9

証明 は極めて簡単である。

Schwarz の不等式と $\sin^2 y/y^2 \leq (1+\cos y)/2$ に注意すれば

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} g(t)\,dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{\sin hx}{hx}\,dG(x)\right|$$

$$\leq \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 hx}{h^2x^2}\,dG(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos hx}{2}\,dG(x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1+R\,g(h)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

こゝに $\quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dG(x)$

定理の証明 $f(t)$ は偶函数で、t の各々の値に対して 0 か又は 1 の値をとる事が、無限乗積の初等的な定理より直ちに出る。補助定理より凡ての t, h 及び n, N ($n<N$) に対し

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f_{nN}(t)\,dt\right| \leq \left(\frac{1+f_{nN}(h)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成立しているから容易に

(1) $\quad \left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(t)\,dt\right| \leq \left(\frac{1+f(h)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

が云える事が分る。場合を2つに分けて考へよう

1° 零点に收斂している正数列 $\{h_i\}$ で $f(h_i)=0$ ($i=1,2,\cdots$) の場合、若し測度 $m(E)\neq 0$ なる集合 E が存在して $E\ni t$ なる凡ての t につき $f(t)=1$ であれば、E から適当に点 t_0 をとり区間 $[t_0-h_i, t_0+h_i]$ を考へれば

(2) $\quad m([t_0-h_i, t_0+h_i]\cap E)/h_i \longrightarrow 1,\ i\to\infty$

ならしめることができる。然るに (1) より

$$\frac{1}{2h_i}\int_{t_0-h_i}^{t_0+h_i} f(t)\,dt = \frac{m([t_0-h_i, t_0+h_i]\cap E)}{2h_i}$$

$$\leq \left(\frac{1+f(h_i)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

これは(2)に矛盾する。故に此の場合は測度0を除き$f(t)=0$である。

2° $f(h_i)=0$ をまんぞくし、$h_i \to 0$ ($i\to\infty$) なる実列 $\{h_i\}$ が存在しない場合 $f(h)=0$ ($h\to 0$) なる h の下限を h_0 とすれば、$h_0>0$ である。
$\sqrt{1.5} \geq h'/h_0 \geq 1$ なる $h'>0$ をとり、$f(h')=0$ なる様にすれば

$$1=\frac{1}{2h_0}\int_{-h_0}^{h_0} f(t)\,dt \leq \frac{1}{2h_0}\int_{-h'}^{h'} f(t)\,dt$$

$$=\frac{2h'}{2h_0}\frac{1}{2h'}\int_{-h'}^{h'} f(t)\,dt \leq \frac{h'}{h}\left(\frac{1+f(h')}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{h'}{h_0}\left(\frac{1+f(h')}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{h'}{h_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\frac{1.5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を得る。これは矛盾である。故に $f(t)\equiv 1$ が結論される。

この定理より例へば國沢氏の mean concentration function $\psi_G(h)$ を使えば

$$\psi_G(h)=\int_0^\infty e^{-ht}|g(t)|^2\,dt$$

$$\left(\text{こゝに}\quad g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dG(x)\right)$$

であるから

$$\psi_{nN}(h)=\int_0^\infty e^{-ht} f_{nN}(t)\,dt$$

とおき

$$\psi(h)=\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\psi_{nN}(h)=\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty e^{-ht} f_{nN}(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-ht} f(t)\,dt=0,\quad =1$$

が出て

4之1

$\psi(h) \equiv 1$ か又は $\equiv 0$

である。

$\psi(h) \equiv 1$ の場合わ、$\Sigma(X - a_k)$ が確率収斂する様な $\{a_k\}$ の存在する場合で $\psi(h) \equiv 0$ の場合わ存在しない場合である事は普通にやられている通りやればよい

(以上)