A. WALD: SEQUENTIAL TESTS OF STATISTICAL HYPOTHESES (THE ANNALS OF MATHEMATICAL STATISTICS, VOL. XVI. No. 2 — JUNE 1945)

紹介者　所員　小川　潤次郎

まへがき

統計的假說の檢定問題に關しては、從來はJ. NEYMAN と E.S.PEARSONの理論があつて比較的に纏つた体系をなしてゐたのである。然るに拔取り檢査 (Sampling Inspection に端を發する本論文に於いてA.WALDは標本の大きさをRANDOM VARIABLEと考へる全く革命的とも云ふべき思想を以つて sequential test の考へを導入したのである。而して從來の Neyman-Pearson の假說檢定論は、これにその special case として包含されることになるのである。此の sequential test は從つて理論的には Neyman-Pearson のそれより深く、更に實用的には、統計量の分布を定める必要がないので、一層簡單に用ひ得ると云ふ驚くべき性質を具有する。

本論文はA. Waldの前の論文(1) "On cumulative

---

(1) ANNALS OF MATH. STAT. VOL. [illegible] ([illegible])

sums of random variables"の結果を用ひて居るのであるが、上記論文は目下國内にないので數學的な證明は紹介者が自身で再現を試みたのであるが、二三の箇所を除けば大体出來た樣に思ふので此の紹介の筆を執る次第である。

第一篇

只一つの對立假説を有する單純假説の Sequential Test

§1. 從來の假説檢定法

Xをある一つの random variable として、以下においてはXは連續な確率密度を有するか、又は discrete な分布を有するものとする。從つて確率變數Xの確率分布 $f(x)$ といふ場合にはXが連續ならば $f(x)$ は確率密度をXが discrete ならば $f(x)$ はX＝xとなる確率を表はす。假説H_0（歸無假説）はXの確率分布が $f_0(x)$ であると指定し、その對立假説H_1はXの確率分布が $f_1(x)$ であると指定するものであるとする。

Neyman－Pearson の假説檢定論と云ふのは任意標本の大きさをNとしてその標本の實現値の一

$$E = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N)$$

をN次元の標本空間 R_N の點と考へて豫め R_N の内に取られた部分空間 W_N を定めてE點が W_N 内に落ちれば H_0 を棄却(reject)即ち H_1 を採擇(accept)し R_N 内の W_N の補集合を $\overline{W}_N$ としてEが $\overline{W}_N$ 内に落ちれば H_0 をaccept即ち H_1 をrejectする。

H_0 が眞なるとき之をrejectする誤りを第一種の過誤と云ひ、H_0 が僞なるとき之をacceptする誤りを第二種の過誤と云ふ。

Neyman-PearsonのTestでは W_N の取り方は色色あるが第一種の過誤の確率を α でおさへたとき

$$\int_{W_N}\int f_0(x_1)\cdots f_0(x_N)\,dx_1\cdots dx_N = \alpha$$

を滿足する領域 W_N を大さ α なる相似た臨界域(similar critical region)と云ふ。然るとき第二種の過誤の確率 β は

$$\beta = \int_{\overline{W}_N}\int f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)\,dx_1\cdots dx_N$$

$$= 1 - \iint_{W_N} f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N$$

となるが

$$1-\beta = \iint_{W_N} f_1(x_1)\cdots f_1(x_N)\,dx_1\cdots dx_N$$

を critical region W_N の Powerfunction と名づける。この $1-\beta=P(W_N)$ を W_N の函數と考へてこれを Max ならしむる如き領域 W_N を最强力臨界域（most powerful critical region）と云ふ。而してかくの如き Most Powerful critical region は次の如く定められる(1)。

$$\frac{f_1(x_1)\cdots\cdots f_1(x_N)}{f_0(x_1)\cdots\cdots f_0(x_N)} \geqq k \qquad (1.1)$$

但し k は α に關係する適當な constant である。

標本の大さ N を定めるならば最强力臨界域を用ひる限り第二種の過誤の確率 β は第一種の過誤の確率 α の一價函數 $\beta_N(\alpha)$ である。從って α を指定し更に第二種の過誤の確率が豫め與へられる β に等しいか、又は少くとも β を超過しないとすれば N は勝手に選ぶわけには行かぬ。これ等の條件を滿たす test に必要なる觀測の數 N は $\beta_N(\alpha)\leqq\beta$ を滿たす最小整數値として決定されるのである。

從って現在の假說 H_0 を H_1 に對して檢定する最强力檢定法とは次の如く述べることが出來るであらう。卽ち臨界域としては (1.1) で定められる領

---

(1) 佐藤良一郎：數理統計學 485 頁定理參照

域を取る。但し常数kは第一種の過誤の確率が豫め與へられたαでありNは第二種の過誤の確率が豫め與へられたβ以下となる最小整數とするのである。

§2. Sequential testの手續：一般的定義

2.1. sequential testの思想　從來の假説檢定論では任意の特定の問題に對して觀測値の數は常數として取扱はれてあるがsequential testでは此數は常數ではなく確率變數として取扱はれるのである。以下に於いては記號nはsequential testで要求される觀測値の數を示し、記號Nは常數として取扱はれたときの觀測値の數を示すものとする。

sequential testと云ふのは次の如くである。各正の整數mに對してm次元の標本空間R_mを互に重り合はぬ三つの部分空間R_m^0、R_m^1、R_mに分つ第一の觀測値xが取られてx_1がR_1^0に落ちればH_0を採擇しx_1がR_1^1に落ちればH_0を棄却し（從ってH_1を採擇し）x_1がR_1に落ちれば第二の觀測値を取る。第三番目の決定がなされたとき、第二の觀測値xが取られ、點$(x_1 x_2)$がR_2^0、R_2^1、R_2に落ちる

に從つてH_0,H_1が採擇されるか又は第三の觀測値が取られる。若し標本點(x_1,x_2)がR_2に落ちれば第三の觀測値x_3が取られて今度は三次元の標本點$(x_1 x_2 x_3)$がR_3^0, R_3^1, R_3の何れかに落ちるに從つてH_0が採擇されるか、又は棄却されるか或は又第四の觀測値x_4が取られる等々。而して此手續は第一又は第二の決定がなされるときに限つて終了する。此手續が終了する觀測値の數をnとする卽ち$(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$は$R_n^0$か又は$R_n^1$に落ちるとする。然らば$n$の値は如何なる觀測値が取られたかと云ふことに depend してゐるのだからnは確率變數である。

H_0が眞なるときのnの希望値を$E_0(n)$、H_1が眞なるときのnの希望値を$E_1(n)$で表はす。此等の希望値は勿論檢定に用ひられた sequential test に depend するから,此の事を明らかに表はす爲に sequential test S が用ひられたときは$E_0(n|S)$, $E_1(n|S)$と書くことにする。

2.2 sequential test の効率 (efficiency)

在來の檢定法と同じく sequential analysis に於いても二種類の過誤が生ずる。卽ちH_0が眞なるとき、

之を棄却する（第一種の過誤）又はH_1が眞なるときH_0を採擇する（第二種の過誤）ことがあり得る如何なるsequential testにも次の如く0と1の間の實數α, βが隨伴せしめられる。即ちH_0が眞なるとき第一種の過誤を犯す確率がαで、H_1が眞なるときは第二種の過誤を犯す確率がβである。若し二つのsequential tests SとS'とがあつてそれに隨伴するα, βとα', β'とが夫々相等しいならSとS'とは同じ強さのsequential testであると云ひ若し$\alpha < \alpha'$で且つ$\beta \leq \beta'$又は$\alpha \leq \alpha'$で且つ$\beta < \beta'$ならSはS'より強力（S'はSより弱い）といふ。若し$\alpha > \alpha'$で且つ$\beta < \beta'$であるか又は$\alpha < \alpha'$で且つ$\beta > \beta'$である場合にはSの強さとS'の強さとは比較不可能であるといふ。

強さの同一なるsequential testsの内で最終の決定に到達するに必要な觀測値の數を出來る丈小ならしめたい。SとS'とは同一の強さのsequential testsであるとき，$E_0(n|S') < E_0(n|S)$にして$E_1(n|S') \leq E_1(n|S)$か又は$E_0(n|S') \leq E_0(n|S)$にして$E_1(n|S') < E_1(n|S)$であるときにはS'の方がSより良いtestであるといふ。ある

る sequential test があつてそれと同じ強さのそれより良い test がないときそれは許容される test と云ふ。若しある一つの sequential test S が それと同じ強さの任意の sequential test S′ に対して

$$E_0(n|S) \leq E_0(n|S') \text{ 且つ } E_1(n|S) \leq E_1(n|S')$$

なるとき S は最良の test と考へられる。かくの如き test が存在すること即ち $E_0(n)$ と $E_1(n)$ とを同時に最小ならしむる如き sequential test が存在することは此處で證明されないが、3.1 で定義される sequential probability ratio test（確率比に依る逐續検定法）に於いては後に見る如く（§4.7 参照）$E_0(n)$ と $E_1(n)$ とは殆ど最小値に近くなる[1] 從つて實用的な目的の爲には sequential probability ratio test を最良の test と考へてよいのである。

$E_0(n)$ と $E_1(n)$ とを同時に正確に最小ならしむ

---

1. 原著者は sequential probability ratio test に對しては $E_0(n)$ と $E_1(n)$ とは正確に最小値を取ることを豫想したが、特殊な場合以外には證明に成功してない。（§4.7 参照）

る如き sequential test の存在は證明されないので最良の test として何か代用のものを定義する必要がある。幾つかの代用定義が可能である。例へば test は admissible であつて且つ $E_0(n)$ と $E_1(n)$ との内の大きい方を最小にならしむるものとか又は平均 $\dfrac{E_0(n)+E_1(n)}{2}$ 又は何か他の荷重平均を最小ならしむ等を要求してよい。若し $E_0(n)$ と $E_1(n)$ とを同時に最小ならしむる test があればその test に對しては上記のすべての定義は同等であるが然らざる test に對しては上の定義の云ふ test は異るものである。若し長い間に於いて H_0 の眞である頻度と H_1 の眞である頻度についての先天的な知識があるならばそれ等の頻度を荷重とした $E_0(n)$ と $E_1(n)$ の荷重平均値を最小にするのが最も合理的であらうが實際上の應用の際にはつねにさうであるがその如き先天的な知識がない場合には $E_0(n)$ と $E_1(n)$ の荷重平均を最小ならしむるより MAX（$E_0(n), E_1(n)$）を最小ならしむる方がより合理的であらう。そこで次の如く定義する

S は admissible な test であつて且つ S と同じ張

さのすべての test S に對して

$$\mathrm{MAX}\{E_0(n|S), E_1(n|S)\} \leq \mathrm{Max}\{E_0(n|S'), E_1(n|S')\}$$

なるとき S は最良（optimum）の test であると云ふ。

sequential test S の效率とは次の比である。

$$\frac{\mathrm{MAX}\{E_0(n|S^*), E_1(n|S^*)\}}{\mathrm{MAX}\{E_0(n|S), E_1(n|S)\}}$$

但し S^* は S と同じ强さの optimum test である

2.3 在來の檢定を sequential test の特定の場合と考へた場合のそれの效率　在來の檢定法は次の如くして sequential test の special test と考へることが出來る。N を在來の檢定法に用ゐられる標本の大きとしてその檢定の基礎となる臨界域を W_N とする。然らば在來の檢定法は次の如き sequential test と考へられる。卽ち $m<N$ なるすべての m に對しては R_m^0、R_m^1 は m 次元標本空間 M_m の空集合であつて從つて $R_m=M_m$，$m=N$ に對して $R_N^1=W_N$，R_N^0 は W_N の補集合である $\overline{W}_N$ で、R_N は空集合である

從つて在來の檢定法に對しては

$$E_0(n)=E_1(n)=N$$

である。

最強力臨界域に基づく在來の檢定法の効率は比較的低いことは後で分る。屢々それは$\frac{1}{2}$以下である。換言すれば最良(optimum) sequential test に依れば同一α, βであつて在來の最強力檢定法に必要な觀測値の數より遙かに少い觀測値の數に依つて檢定が可能なのである。

次の節では吾々は簡單な sequential test の一例を示す。これは sequential probability ratio test と呼ばれるものであつてすべての實用的な目的の爲には optimum test と考へて良いのである。又在來の最強力檢定法に比較して此の sequential test に依れば通常平均約50%の觀測値を節約出來ることが分る。

§3. Sequential Probability Ratio Test

3.1 sequential probability ratio test の定義 2.1 で見た如く sequential test はm次元の標本空間M_m($m=1, 2, \cdots\cdots$)を互に重合はない三つの部分空間R_m^0, R_m^1 及びR_mに分つことに依つて定義され、標本點がR_n^0か又はR_n^1かに落ちるmの最小値nに對して此の sequential test は終了する。標本點がR_n^0に落ちればH_0を採擇し、R_n^1に落ちれば

H_1を採擇する。

領域R_m^0, R_m^1及びR_mを適當に選ぶのであるが次の如く考へればそれの示唆が得られるであらう。標本が取られる前にH_0が眞である先天的な確率があつてその値は知られてゐてg_0であるとする。然らばH_1が眞である先天的な確率g_1は$g_1=1-g_0$で與へられる。何者H_0とH_1で假說の全部が盡されると假定してゐるのであるから。幾つかの觀測値が取られた後には吾々は附加された知識を持つのでそれはH_i $(i=0,1)$が眞であると云ふ確率に影響を與へる。今m個の觀測値が取られた後のH_0が眞である事後確率g_{0m}, H_1が眞である事後確率をg_{1m}とすればよく知られた*Bayes*の公式に依つて

$$g_{0m}=\frac{g_0 p_{0m}(x_1,\cdots,x_m)}{g_0 p_{0m}(x_1,\cdots x_m)+g_1 p_{1m}(x_1,\cdots x_m)} \tag{3.1}$$

$$g_{1m}=\frac{g_1 p_{1m}(x_1,\cdots,x_m)}{g_0 p_{0m}(x_1,\cdots,x_m)+g_1 p_{1m}(x_1,\cdots x_m)} \tag{3.2}$$

但し$p_{im}(x_1,\cdots x_m)$は假說H_i $(i=0,1)$の下に計算されたm次元標本空間の中の確率密度を表はすものとする。[1] $p_{im}(x_1,\cdots x_m)$を略してp_{im}と記することにする。

α_0, α_1は1より小で$\frac{1}{2}$より大なる二つの正数としてH_0が採擇されると云ふ條件の下に於ける正しい結論の出る條件確率がα_0以上で、又H_1が採擇されると云ふ條件の下に於ける正しい結論の出る條件確率がα_1以上である如き sequential test を作らう[2]。次の如き sequential test が合理的であらう。即ち各段階でg_{0m}及びg_{1m}を計算して$g_{1m} \geqq \alpha_1$ならH_1を採擇し$g_{0m} \geqq \alpha_0$ならH_0を採擇し$g_{1m} < \alpha_1$で且つ$g_{0m} < \alpha_0$なら更に一つの觀測値を取る。この sequential test に於けるR_m^0は$g_{0m} \geqq \alpha_0$で、R_m^1は$g_{1m} \geqq \alpha_1$で又R_mは$g_{0m} < \alpha_0$, $g_{1m} < \alpha_1$で定められる。從つて三部分空間R_m^0、R_m^1、R_mは互に重合ふことなく又それらの合併集合が全標本空間になつてゐることが必要である。その爲には次の二つの不等式が聯立しないことが充分である。

$$(3.3) \qquad g_{1m} = \frac{g_1 p_{1m}}{g_0 p_{0m} + g_1 p_{1m}} \geqq \alpha_1$$

$$(3.4) \qquad g_{0m} = \frac{g_0 p_{0m}}{g_0 p_{0m} + g_1 p_{1m}} \geqq \alpha_0$$

---

(1)確率分布が discrete のときは$p_{im}(x_1, \cdots x_m)$は標本點$(x_1, \cdots, x_m)$が得られる確率を示すものとする。

(2)條件$\alpha_0 > \frac{1}{2}$, $\alpha_1 > \frac{1}{2}$をつけたのはこれがなければもつと小さい事後確率の假說が採擇される恐があるから。

若し (3.3) と (3.4) が同時に成立するとすれば、加へ合はせて

(3.5) $$g_{1m}+g_{0m} \geq d_1+d_0$$

$g_{1m}+g_{0m}=1$ であるから

$$1 \geq d_1+d_0$$

となるが $d_i > \frac{1}{2}\ (i=0,1)$ であるからこれは矛盾である。従つて R^0_m、R^1_m 及び R_m は互に重合ふことなく又之等が全空間を埋める。

不等式 (3.3) 及び (3.4) は夫々次の不等式に等価である。

(3.6) $$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \geq \frac{g_0}{g_1}\frac{d_1}{1-d_1}$$

(3.7) $$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \leq \frac{g_0}{g_1}\frac{1-d_0}{d_0}$$

(3.6) 及び (3.7) の右邊の常数は m に無関係である。

H_0 の先天的な確率が存在しないとか又は存在しても未知なるときには (3.6) 及び (3.7) に依つて次の如き sequential process が類推出来るのであらう。各段階に於いて p_{1m}/p_{0m} を計算する。$p_{1m}=p_{0m}=0$ のときは比 $p_{1m}/p_{0m}=1$ と定義する。若し

(3.8) $$p_{1m}/p_{0m} \geq A$$

なら H_1 を採擇し又若し

$$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} \leqq B$$

ならH$_0$を採擇する。

$$(3.10) \qquad B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} < A$$

なら更にもう一つの觀測値を取る。testに必要な觀測値の數nは(3.8)又は(3.9)の成立する最小のmの値である。常數A、Bは$0 < B < A$としてsequential testの第一種の過誤を犯す確率がα,第二種の過誤を犯す確率がβである如く定められるものとする。この(3.8)、(3.9)及び(3.10)で定められるsequential procedureをsequential probability ratio testといふ。

以上に於いては(3.8)、(3.9)及び(3.10)で與へられるsequential testは直觀的に説明されたに過ぎぬが4.7に於いては此の如きsequential testに對してはE$_0(n)$とE$_1(n)$は殆どその最小値に近いことが示され從つて實用上の爲には此がoptimumと考へられることが示される。

3.2 α, β, A及びBの間の基本的な關係　本節に於いてはα, β, A及びBの間に成立つ或種の不等式を述べるがこれはsequential analysisに於いて基本的な實用性を有するものである。

$\{x_m\}$ $(m=1,2,\cdots)$ は觀測値の無限系列とする。可能な無限系列$\{x_m\}$の全部の集合を無限次元の標本空間と云ひ M_∞ で表はす。任意の特定の無限系列$\{x_m\}$を M_∞ の點と云ふ。n個の與へられた實數値 $a_1, a_2 \cdots a_n$ に對して $x_1=a_1, \cdots, x_n=a_n$ となる無限系列$\{x_n\}$の全部の集合を $C(a_1 \cdots a_n)$ で表はしこれを n 位の圓壔點とよぶことにする。M_∞ の部分集合 S に對してある正の整數 n があつて S が n 位の圓壔點となるとき S は圓壔點と云はれる。圓壔點 $C(a_1, \cdots a_n)$ に對して

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} = \frac{f_1(a_1)f_1(a_2)\cdots f_1(a_n)}{f_0(a_1)f_0(a_2)\cdots f_0(a_n)} \geq A$$

$$B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} = \frac{f_1(a_1)\cdots f_1(a_m)}{f_0(a_1)\cdots f_0(a_m)} < A \quad (m=1,\cdots,n-1)$$

が成立つときそれは1型と云はれ、又

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} = \frac{f_1(a_1)\cdots f_1(a_n)}{f_0(a_1)\cdots f_0(a_n)} \leq B$$

$$B < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} = \frac{f_1(a_1)\cdots f_1(a_m)}{f_0(a_1)\cdots f_0(a_m)} < A \quad (m=1,\cdots,n-1)$$

が成立つときそれは0型と云はれる。かくして標本$(x_1 \cdots x_n)$が觀測され $C(x_1,\cdots,x_n)$ は i 型の

圓壔點であるならば (3.8)、(3.9) 及び (3.10) で定義される sequential test に依れば H_i $(i=0,1)$ が採擇されることになる。

Q_i を i 型 $(i=0,1)$ の圓壔點の和として又 M を M_∞ の部分集合とするとき $P_i(M)$ は假説 H_i の下に計算された M の確率を表はすものとすれば

(3.11) $$P_i(Q_0+Q_1)=1 \qquad (i=0,1)$$

が成立する。此式は sequential test の有限に終る確率が 1 であることを示す。このことは A. WALD が 1944 年の論文の Lemmas で説明してゐるのであるが此論文は目下國内にないので以下筆者の説明を述べる。

$$z_i = \log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}$$

$$Z_m = z_1+z_2+\cdots+z_m$$

とすれば n は $Z_n \geqq \log A$ 又は $Z_n \leqq \log B$ なる最小正整数である。從つて Q_0 は

$$Z_n \leqq \log B \quad \log B < Z_m < \log A \ (m=1,\cdots,n-1)$$

なる式に依つて定められる點の全部であり Q_1 は

$$Z_n \geqq \log A,\ \log B < Z_m < \log A \ (m=1,\cdots,n-1)$$

なる式で定められる點の全部である。依つて

$$P_i(Q_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\substack{Z_n\leq\log B\\ \log B<Z_m<\log A\\ (m=1,2,\cdots,n-1)}}{\int\cdots\int} f_i(x_1)\cdots f_i(x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$P_i(Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\substack{Z_n\geq\log A\\ \log B<Z_m<\log A\\ (m=1,2,\cdots,n-1)}}{\int\cdots\int} f_i(x_1)\cdots f_i(x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

となる。従って

$$P_i(Q_0+Q_1)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Big(\underset{\substack{Z_n\leq\log B\\ \log B<Z_m<\log A}}{\iint}+\underset{\substack{Z_n\geq\log A\\ \log B<Z_m<\log A\\ (m=1,2,\cdots,n-1)}}{\iint}\Big)$$

$$=1-\lim_{N\to\infty}\underset{\substack{\log B<Z_1<\log A\\ \cdots\cdots\\ \log B<Z_N<\log A}}{\iint} f_i(x_1)\cdots f_i(x_N)\,dx_1\cdots dx_N$$

となるから $P_i(Q_0+Q_1)=1$ を證明するには

$$P_i(Q)=\lim_{N\to\infty}\underset{\substack{\log B<Z_1<\log A\\ \cdots\cdots\\ \log B<Z_N<\log A}}{\int\cdots\int} f_i(x_1)\cdots f_i(x_N)\,dx_1\cdots dx_N=0$$

を云へばよい。處で $(Z_1\cdots Z_N)$ 空間で考へるとこの積分領域 Ω は・

$$\omega:\ 0\leqq Z_1,\cdots,0\leqq Z_N\quad 0\leqq Z_1+\cdots+Z_N\leqq\log A$$

$$w' : 0 \geqq Z_1, \cdots, 0 \geqq Z_N \quad 0 \geqq Z_1 + \cdots + Z_N \geqq \log B$$

とすれば体積Ｖの關係では

$$V(\Omega) = 2^N \left(V(w) + V(w') \right)$$

となる。そこでW領域に對して次の如き變換をする $z_i' = z_i / \log A$ として

$$z_1' + \cdots\cdots + z_N' = \zeta_1$$

$$z_2' + \cdots + z_N' = \zeta_1 \zeta_2$$

$$z_N' = \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_N$$

然らば

$$\begin{aligned} z_1' &= \zeta_1 (1 - \zeta_2) \\ z_2' &= \zeta_1 \zeta_2 (1 - \zeta_3) \\ &\cdots\cdots \\ z_{N-1}' &= \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{N-1} (1 - \zeta_N) \\ z_N' &= \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_N \end{aligned}$$

$$\frac{D(z_1' \cdots z_N')}{D(\zeta_1 \cdots \zeta_N)} = \begin{vmatrix} 1-\zeta_2 & -\zeta_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \zeta_2(1-\zeta_3) & \zeta_1(1-\zeta_3) & -\zeta_1\zeta_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \zeta_2 \cdots \zeta_{N-1}(1-\zeta_N) & \zeta_1\zeta_3 \cdots \zeta_{N-1}(1-\zeta_N) & \cdots\cdots & & -\zeta_1 \cdots \zeta_{N-1} \\ \zeta_2 \cdots \zeta_N & \zeta_1 \zeta_3 \cdots \zeta_N & \cdots\cdots & & \zeta_1 \cdots \zeta_{N-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \zeta_2 & \zeta_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & \vdots & & \\ \zeta_2\cdots\zeta_{N-1} & \zeta_1\zeta_3\cdots\zeta_{N-1} & \zeta_1\cdots\zeta_{N-2} & 0 \\ \zeta_2\cdots\zeta_N & \zeta_1\zeta_3\cdots\zeta_N & \cdots\cdots & \zeta_1\cdots\zeta_{N-1} \end{vmatrix}$$

$$= \zeta_1^{N-1}\zeta_2^{N-2}\cdots\zeta_{N-2}^{2}\zeta_{N-1}$$

従って

$$V(\omega) = \iint_{\omega} dx_1\cdots dx_N$$

$$= \iint \frac{D(x_1\cdots x_N)}{D(z_1\cdots z_N)}\, dz_1\cdots dz_N$$

$$= \int\!\cdots\!\int \frac{D(x_1\cdots x_N)}{D(z_1\cdots z_N)}\,\frac{D(z_1\cdots z_N)}{D(z'_1\cdots z'_N)}\, dz'_1\cdots dz'_N$$

$$= \int\!\cdots\!\int \frac{D(x_1\cdots x_N)}{D(z_1\cdots z_N)}\,\frac{D(z_1\cdots z_N)}{D(z'_1\cdots z'_N)}\,\frac{D(z'_1\cdots z'_N)}{D(\zeta_1\cdots\zeta_N)}\, d\zeta_1\cdots d\zeta_N$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{N}\frac{d}{dx_i}\log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}\right)^{-1}(\log A)^N\int_0^1\zeta_1^{N-1}d\zeta_1\cdots\int_0^1\zeta_{N-1}\,d\zeta_{N-1}$$

$$= \frac{1}{N!}(\log A)^N\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{d}{dx_i}\log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}\right)^{-1}$$

同様にして

$$V(w') - \frac{1}{N'}(|\log B|)^N\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{d}{dx_i}\log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}\right)^{-1}$$

となるから $|f_i(x)|\leqq 1$ なることを考へて

$$\left|\int\int\int f_i(x_1)\cdots f_i(x_N)\,dx_1\cdots dx_N\right|$$

$$\log B < Z_1 < \log A$$

$$\cdots$$

$$\log B < Z_N < \log A$$

$$\leqq \frac{2^N((\log A)^N+|\log B|^N)}{N'}\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{d}{dx_i}\log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}\right)^{-1} \quad (*)$$

依つて Stirling の公式

$$N! \sim N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$$

を用ひれば

$$\frac{d}{dx_i}\log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} = 0$$

とならざる限り即ち

$$\frac{f_1'(x_i)}{f_1(x_i)} = \frac{f_0'(x_i)}{f_0(x_i)}$$

換言すれば $\log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}$ が極値を有さぬ限り上式(*)の右邊は N→∞ のとき →0 となる。而して $f_i(x)$ が normal, binomial 等の場合には此條件を滿たすことは明かである。

(311) 式を用ひて α, β, A 及び B が滿足する重要なる不等式を導出することが出來るのである。

$C(x_1,\cdots,x_n)$ が Q_1 に屬する點となる如き各標本値 $(x_1,\cdots x_n)$ に對しては不等式 $\dfrac{p_{1n}}{p_{0n}} \geqq A$ が成立するのであるから

$$(3.12) \qquad P_1(Q_1) \geqq A P_0(Q_1)$$

同樣にして $C(x_1\cdots x_n)$ が Q_0 の點となる如き各標本値 $(x_1,\cdots x_n)$ に對しては不等式 $\dfrac{p_{1n}}{p_{0n}} \leqq B$ が成立するのであるから

$$(3.13) \qquad P_1(Q_0) \leqq B P_0(Q_0)$$

となる。而して $P_0(Q_1)$ は第一種の過誤を犯す確率であり $P_1(Q_0)$ は第二種の過誤を犯す確率であるから

$$(3.14) \qquad P_0(Q_1) = \alpha, \quad P_1(Q_0) = \beta$$

而して $Q_0 \frown Q_1 = 0$ であるから (3.11) より

$$(3.15) \qquad P_0(Q_0) = 1-\alpha, \; P_1(Q_1) = 1-\beta$$

從つて (3.12)~(3.15) より次の重要なる不等式が出る。

$$(3.16) \qquad 1-\beta \geqq A\alpha$$

$$(3.17) \qquad \beta \leqq B(1-\alpha)$$

此不等式は又次の如くにも書ける。

$$(3.18) \qquad \frac{\alpha}{1-\beta} \leqq \frac{1}{A}$$

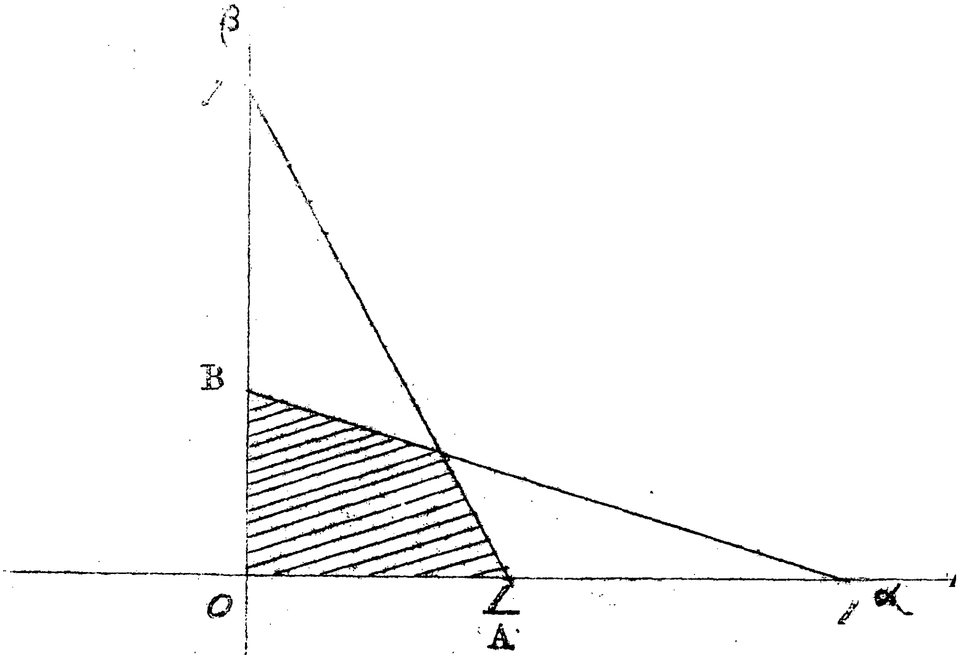
$$(3.19) \qquad \frac{\beta}{1-\alpha} \leqq B$$

α, βの値の一組は平面上にて坐標(α, β)なる點で表示される。A及びBが與へられたるとき不等式(3.18)及び(3.19)を滿たす點(α, β)全部の集合を知ることは面白い。次の二直線L_1、L_2を考へる。

(3.22) $$A\alpha = 1 - \beta$$

(3.23) $$\beta = B(1 - \alpha)$$

直線L_1は横軸を$\alpha = \frac{1}{A}$で切り縦軸を$\beta = 1$で切る。
直線L_2は横軸を$\alpha = 1$で切り縦軸を$\beta = B$で切る。
從つて不等式(3.18)、(3.19)を滿たす點(α, β)の全部は第一圖に陰影を施して示す如くL_1, L_2及び兩軸に圍まれる部分である。



第 一 圖

基本となる不等式 (3.18) 及び (3.19) は $x_1, x_2 \cdots\cdots$ は同一の確率變數 X に就いての獨立な觀測値であるといふ假定の下に導出されたのであるが (3.18) 及び (3.19) が成立つ爲には必ずしも獨立である必要はないのであつて獨立性の用ひられるのは (3.11) の證明であつた。然し (3.11) はもつと一般な假定の下にも成立つことは證明から分る。從つて假說 H_i は $x_1, x_2, \cdots\cdots x_m$ の同時分布法則が同時確率密度 $p_{im}(x_1, \cdots\cdots x_m)$ (1) $(i=0,1,\ m=1,2,\cdots)$ で與へられることを云ふとして (3.11) が成立するならば (3.8) (3.9) 及び (3.10) で定義された H_1 に對して H_0 を檢定する sequential test に對しては不等式 (3.18) 及び (3.19) が成立するのである。例へば $\lambda_0 \neq \lambda_1$ は <1 なる正數として假說 $H_i\ (i=0,1)$ は $x_1, \cdots x_m$ の確率密度が

$$p_{im}(x_1, \cdots, x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m}(x_j - \lambda_i x_{j-1})^2} \quad (i=0,1)$$

であると指示する。即ち x_1 及び $x_j - \lambda_{j-1}$ $(j=2,3\cdots)$ は平均値 0 の周りに分散 1 の正規分布をするとして指定するものとすればこれに對して (3.8) 註(1) 任意の $m < m'$ なる正の整數 m, m' に對しては勿論同時分布 $p_{im}(x_1, \cdots, x_m)$ が定められる MARGINAL 分布

は $P_{im}(x_1,\cdots,x_m)$ に等しいものとする。(3.9)(3.10)の如く定義された sequential test に對しては(3.18)(3.19)は成立する。

3.3 實用上のA,Bの値の決定　第一種の過誤の確率が α で第二種の過誤の確率が β に等しい如き sequential test を作らうとする。そこで第一種の過誤の確率及び第二種の過誤の確率が夫々 α,β になる如きA,Bの値をA (α,β), B (α,β) で表はすとこのA (α,β) 及びB (α,β) を正確に決定することは大變である(3.5參照)。然し前に述べた不等式より實用上は充分な程度にA,Bを決めることが出來る。即ち(3.18)及び(3.19)より

$$A(\alpha,\beta) \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \tag{3.24}$$

$$B(\alpha,\beta) \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.25}$$

$A=\dfrac{1-\beta}{\alpha}=a(\alpha,\beta)$,　$B=\dfrac{\beta}{1-\alpha}=b(\alpha,\beta)$ とおくとAは正しい値A (α,β) より大でなく、Bは正しい値B (α,β) より小でない。勿論このA,Bの値を用ひれば第一種及び第二種の過誤の確率は變るであらう。若しBとしては正しいB (α,β) を用ひA,の方

はA (α,β) より大なる値を用ひたときの第一二種の過誤の確率を夫々 α', β' とすれば

$$\alpha' = \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots\cdots \int f_0(x_1) \cdots f_0(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\log B(\alpha,\beta) < Z_1 < \log A$$

$$\text{- - - - - - -}$$

$$\log B(\alpha,\beta) < Z_{n-1} < \log A$$

$$Z_n \geqq \log A$$

$$\beta' = \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots\cdots \int f_1(x_1) \cdots f_1(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\log B(\alpha,\beta) < Z_1 < \log A$$

$$\text{- - - - - - -}$$

$$\log B(\alpha,\beta) < Z_{n-1} < \log A$$

$$Z_n \leqq \log B(\alpha,\beta)$$

であるから α' は α より小となるが，β' は β より少しく大となる。これは圖を描いて見ればすぐ分る。同様に若しAとしては正しい値A (α,β) をBとしてはB (α,β) より小なる値を用ひるならば β の値は小さくなるが，α は僅かばかり大きくなる。若しAとしては正しい値より大なるものをBとしては正しい値より小なるものを取つた場合の第一種及び第二種の過誤の確率 α,β が如何になるかは明かでない。A $= \dfrac{1-\beta}{\alpha}$，B $= \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ を用ひた場合の第一種

び第二種の過誤の確率を夫々$\alpha'\beta'$とすれば(318)

及び(319)でA, Bに夫々$a(\alpha,\beta)$, $b(\alpha,\beta)$をα,β

に夫々$\alpha'\beta'$を代入して

$$\frac{\alpha'}{1-\beta'} \leqq \frac{1}{a(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha}{1-\beta} \tag{3.26}$$

$$\frac{\beta'}{1-\alpha'} \leqq b(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.27}$$

なるから之等兩不等式から

$$\alpha' \leqq \frac{\alpha}{1-\beta} \tag{3.28}$$

$$\beta' \leqq \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.29}$$

(3.26)に$(1-\beta)(1-\beta')$をかけ(3.27)に$(1-\alpha)$

$(1-\alpha')$をかけて加合せると

$$\alpha'+\beta' \leqq \alpha+\beta \tag{3.30}$$

從つて$\alpha' \leqq \alpha$か又は$\beta' \leqq \beta$である。換言すればA(α,β)

及びB$(\alpha\beta)$の

代りに夫々$a(\alpha,\beta)$及び$b(\alpha,\beta)$を取るならばα,β

の内高々一つ丈が增すのみである。

α,βが小, 例へば0.05以下の場合には實用上は$\frac{\alpha}{1-\beta} \doteqdot \alpha$

$\frac{\beta}{1-\alpha} \doteqdot \beta$と考へてよい。依つて(3.28)及び(3.29)よ

りα'がαより大となり又はβ'がβより大となつても

それは極く僅か丈であることが分る。そして實用上それらの喰違ひは無視しても差支ないのである。かくして實用的には A (α,β) 及び B (α,β) の代りに夫々 $a(\alpha,\beta)$ 及び $b(\alpha,\beta)$ を用ひても sequential test としての強さには變りがないと考へられる。只心配になるのは $f_0(x)$ か $f_1(x)$ かが決定される迄に必要な標本の大さの希望値が大となることである。所で A (α,β) 及び B (α,β) と $a(\alpha,\beta)$ 及び $b(\alpha,\beta)$ との喰違ひは觀測値の數 m が discret である爲に生ずるのであるから $a(\alpha,\beta)$, $b(\alpha,\beta)$ を用ひることに依る第一種，第二種の過誤の確率と α,β との喰違ひは僅かであらう。然しこの爲に全く損するとも云へない。何者若し $a(\alpha,\beta)>A(\alpha,\beta)$, $b(\alpha,\beta)<B(\alpha,\beta)$ なら不等式 (330) はもっと sharp になって

$$\alpha'+\beta'<\alpha+\beta$$

となって $a(\alpha,\beta)$, $b(\alpha,\beta)$ を用ひた爲にかへって強さは強くなることになるから。

實用上は $A=a(\alpha,\beta)$, $B=b(\alpha,\beta)$ として差支ないと云ふことから次の如き sequential test の驚くべき性質が生ずる。從來の檢定法では其の檢定の

基礎となる統計量の分布を決定しなければ話が始まらなかつたのであるが、sequential testに於ては分布問題は無縁のものである。何者 $a(\alpha,\beta)$ 及び $b(\alpha,\beta)$ は α,β が與へられれば計算出來るし又比 $\frac{P_{1m}}{P_{0m}}$ も分布問題と~~なるの~~無關係に與へられた資料から計算されるからである。只分布が問題となるのは觀測値の數 n の分布のみであるが、これも平均に於て sequential test では從來の test に比して約 50% 節約出來ると云ふことを知ればよいのであつてさして重大な問題ではないのである。

3.4 或第三の假説Hが正しい場合に H_0（又は H_1）を採擇する確率　3.2 節に於て吾々が取扱つたのは H_0 又は H_1 が正しい場合に H_0（又は H_1）を採擇する確率であつたが第二篇に於ては對立假説が無限にある場合をも取扱ふ―そして實際上はこの場合が大切なのである―ので必ずしも H_0 又は H_1 に等しくない第三の假説Hが正しい場合に H_0 又は H_1 を採擇する確率を調べることも又興味あることである。假説Hの指定する X の分布は $f(x)$ であるとする。$f(x)$ が $f_0(x)$ 又は $f_1(x)$ に等しい場合は旣に 3.2 節に論じた所である。本節及び次節に於て取扱ふところの

確率關係は特別に言明なき限り假說Hが正しいと云ふ假定の下に於けるものである。*sequential probability ratio test* に依つてH_1を採擇する確率をqとする。(1) 明かに若し$H=H_0$なら$q=\alpha$で又$H=H_1$なら$q=1-\beta$である。

註(1) Hが採擇される確率は$1-q$であることは後述から判る。

確率qは同著者の1944年の累積和に關する一般論から得られる。今$\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)}=z_i$とすれば$\{z_i\}$ $(i=2,3,\cdots)$は同一分布を有する獨立確率變數の系列である。次に此の系列の初めのj個の和をZ_jで表はす

(331) $$Z_j=z_1+\cdots\cdots+z_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots)$$

關係Rの成立する確率を$P(R)$で表はし任意の確率變數Yの希望値をEYで表はす。nは$Z_n\geqq\log A$又は$Z_n\leqq\log B$が成立つ最小の正の整數とし若し$m=1,2,\cdots$のすべてのmに對して$\log B<Z_m<\log A$なるときは$n=\infty$とする。卽ちnは*sequential probability ratio test*が必要する觀測値の數である。33節に於て見た如く實用上は吾々は

$$A=a(\alpha,\beta)=\frac{1-\beta}{\alpha},\qquad B=b(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{1-\alpha}$$

とおくのであるがA>Bであるから

$$\frac{1-\beta}{\alpha} > \frac{\beta}{1-\alpha}$$

即ち　　$\alpha+\beta<1$

なるα,βのみを考へればよい。又逆に$\alpha+\beta<1$なることから$B<1, A>1$なることが出る。従って以下の所論ではすべて$A>1, B<1$とし又z_iの分散は0でないとする。

所で$P(n=\infty)=0$であるから sequential process が有限で終了する確率は1である。従ってH_0を採擇する確率は$1-\gamma$である。

zを$z_i\ (i=1,2,\cdots)$と同一の分布を有する確率變數$\varphi(t)$をzの moment generating function

即ち　　$\varphi(t)=Ee^{zt}$

とすれば$\varphi(h)=1$, $h\neq 0$なるhの値が只一つ存在する（これも1944年の論分に證明されてゐる由）

$$E\{e^{z_n t}[\varphi(t)]^{-n}\}=1$$

となる。何者

$$E\{e^{z_n t}[\varphi(t)]^{-n}\}=\sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int_{[\log B<z<\log A]} e^{(z_1+\cdots+z_n)t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{xt}f(x)dx\right)^{-n}f(x_1)\cdots f(x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$\left.\begin{array}{c}\log B < Z_{n-1} < \log A \\ Z_n \geq \log A \\ Z_n \leq \log B\end{array}\right\} \Omega_n$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n} e^{zit} f(x_i)\, dx_i \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} f(x)\, dx \right)^{-n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zit} f(x_i)\, dx_i - \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n} e^{zit} f(x_i)\, dx_i \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} f(x)\, dx \right)^{-n} \right]$$

$$= 1$$

となるから。従つて

$$(3.32) \qquad \mathrm{E}\, e^{Z_n h} = 1$$

となる。

H_0が採擇される卽ち $Z_n \leq \log B$ な條件の下に於ける $e^{Z_n h}$ の希望値を E^*, H_1が採擇される　卽ち $Z_n > \log A$ となる條件の下に於ける $e^{Z_n h}$ の希望値を E^{**} で表はすと (3.32) より

$$(3.33) \qquad (1-\gamma)\mathrm{E}^* + \gamma \mathrm{E}^{**} = 1$$

となる。これを γ に關して解いて

$$(3.34) \qquad \gamma = \frac{1-\mathrm{E}^*}{\mathrm{E}^{**}-\mathrm{E}^*}$$

$|\mathrm{E}z|$及び z の分散が小であるときには

$$\mathrm{E}^* \doteq B^h \qquad \mathrm{E}^{**} \doteq A^h$$

これは例へば $f_1(x)$ と $f_0(x)$ とが近い場合であ

従って此場合にはγの良い近似として

$$(3.35)\qquad \gamma = \frac{1-B^h}{A^h-B^h}$$

を得る。若し$H=H_0$なら$h=1$; $H=H_1$なら$h=-1$であることは見易い。zの平均値及び分散が零に收斂するならば$\gamma-\bar{\gamma}$は零に收斂する。

γの近似値として$\bar{\gamma}$を用ひたときの近似度を見る爲にγの上限及び下限を求めよう。それにはE^*及びE^{**}の上,下限を求めればよい。先づ第一に$h>0$なる場合を考へる。ζは>1なる實數としPは$0<P<1$なる實數とする。任意の確率變數Y及び任意の關係Rに對して條件Rの下に於けるYの希望値を$E(Y|R)$で示すことにする。然るとき

$$(3.36)\qquad B^h\{\underset{\zeta}{g.l.b.}\,\zeta E(e^{hz}|\leq \frac{1}{\zeta})\leq E^*\leq B^h \qquad (h>0)$$

及び

$$(3.37)\qquad A^h\leq E^{**}\leq A^h\{\underset{\rho}{l.u.b.}\,\rho E(e^{hz}/e^{hz}\geq \frac{1}{\rho})\} \quad (h>0)$$

が成立する。但し

$\underset{\zeta}{g.l.b.}$ = greatest lower bound with respect to ζ

$\underset{\rho}{l.u.b.}$ = least upper bound with respect to ρ.

何者(3.36)に關しては

$$E^* = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\log B < Z_1 < \log A \\ \log B < Z_{n-1} < \log A \\ Z_n \leq \log B}}{\int \cdots \int} e^{Z_n h} f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \Bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\log B < Z_1 < \log A \\ \cdots\cdots \\ \log B < Z_{n-1} < \log A \\ Z_n \leq \log B}}{\int \cdots \int} f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

であるから$h>0$なら

$$E^* \leq B^h$$

は明かである。

$$Z_n = Z_{n-1} + z_n$$

であるから

$$E^* = \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int e^{Z_{n-1} h} e^{z_n h} f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \Bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$e^{Z_{n-1} h} > B^h$$

であるから今

$$\frac{e^{Z_{n-1} h}}{B^h} = \zeta > 1$$

とおくと

$$e^{Z_n h} = B^h \zeta_n e^{z_n h}$$

従って cylindric set

$$\log B < Z_1 < \log A \cdots, \log B < Z_{n-1} < \log A, \quad Z_n \leq \log B$$

は $\qquad \zeta_n e^{z_n h} \leq 1$

とかゝれる。依つて

$$E^* = B^h \left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \int_{\zeta_n e^{z_n h} \leq 1} e^{z_n h} f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\zeta e^{z_n h} \leq 1} f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n \right)$$

とかゝれる。依つて

$$E^* \geqq B^h \{ \underset{\zeta}{g.l.b.}\, \zeta E (e^{hz} | e^{hz} \leq \frac{1}{\zeta}) \}$$

は證明された。

(3.37) の證明も同様である。

$$(3.38) \qquad \underset{\zeta}{g.l.b.}\, \zeta E (e^{hz} | e^{hz} \leq \frac{1}{\zeta}) = \eta$$

$$(3.39) \qquad \underset{\rho}{l.u.b.}\, \rho E (e^{hz} | e^{hz} \geq \frac{1}{\rho}) = \delta$$

とおけば不等式 (3.36) 及び (3.37) は次の如くなる

$$(3.40) \qquad B^h \eta \leq E^* \leq B^h \qquad h > 0$$

$$(3.41) \qquad A^h \leq E^{**} \leq A^h \delta \qquad h > 0$$

$B < 1$, $A > 1$ なることから $h > 0$ なら $E^* < 1$, $E^{**} > 1$ であることはすぐ分る。従つて (3.34), (3.40) 及び (3.41) の關係式より

$$(3.42) \qquad \frac{1 - B^h}{\delta A^h - B^h} \leq \gamma \leq \frac{1 - \eta B^h}{A^h - \eta B^h} \qquad h > 0$$

となる。若し $h < 0$ ならば $Z' = -Z$, $A' = \frac{1}{B}$, $B' = \frac{1}{A}$

$h' = -h > 0$, $\gamma' = 1 - \gamma$ とおけば (3.42) に依つて

(3.43) $$\frac{1-(B')^{h'}}{\delta'(A')^{h'}-(B')^{h'}} \leq q' \leq \frac{1-\eta'(B')^{h'}}{(A')^{h'}-\eta'(B')^{h'}}$$

茲に δ', η' は (3.38), (3.39) で h, z の代りに夫々を置換したものである。所で η, δ は $hz=h'z'$ のみ depend するから $\delta'=\delta$, $\eta'=\eta$ である。従って (3.43) より次式を得る。

(3.44) $$\frac{1-A^h}{\delta B^h-A^h} \leq 1-q \leq \frac{1-\eta A^h}{B^h-\eta A^h}$$

次の 3.5 節で binomial と normal distribution に對して η 及び δ の値を計算する。若し (3.43) と (3.44) で與へられた q の上下界があまりに離れ過ぎてゐる場合には q の正確な値か少くともより精密な限界を求めねばならぬ。これは 1944 年の論文でやってあると WALD は述べてゐる。而してその結果の概略は次の如くである。z がある常數 d の整數倍の値を有限個丈取り得るときは q の正確な値が求まる。若し z が此性質を有たぬならば d を充分小さくすることに依って z の distribution は任意の精密度で近似出來るから q の値も亦任意の精密度で近似される。簡單の爲に $d=1$ とする。かくしても一般性は失はれない。z は従って有限個の整數

値のみ取得るものとする。而して Z の取る値は $-g_1 \leq Z \leq g_2$ として $P(Z=-g_1)$ 及び $P(Z=g_i)$ は正であるとする。$P(Z=i)=h_i$ とかく。然らば Z の moment generating function $\varphi(t)$ は

$$\varphi(t)=\sum_{i=-g_1}^{g_2} h_i e^{it}$$

となる。$u=e^t$ とおき

$$\sum_{i=-g_1}^{g_2} h_i u^i = 1 \tag{3.45}$$

なる $g=g_1+g_2$ 次の方程式 g 個の根を $u_1,\cdots,u_g$ とする。$\geq \log A$ なる最小整数を $[a]$，$\leq \log B$ なる最大整数を $[b]$ で表はせば Z_m の取り得る値は

(3.46) $[b]-g_1+1, [b]-g_1+2, \cdots [b], [a], [a]+1, \cdots [a]+g_2-1$

この g 個の相異る数値を順々に $C_1, C_2 \cdots, C_g$ とする。然るとき $\varphi(h)=1$ なる h に対しては

$$E(e^{Znh})=1$$

となるから

$$\sum_{j=1}^{g} e^{c_j h} P(Z_n=c_j)=1$$

h としては $e^{h_i}=u_i \quad (i=1,\cdots,g)$ を取るから

$$\sum_{j=1}^{g} u_i^{c_j} P(Z_n=c_j)=1 \qquad i=1,\cdots,g$$

なる g 個の一次元方程式を得る。これから

$$\Delta = \| u_i^{c_j} \| \qquad (i, j = 1, \cdots, g)$$

として若し$\Delta \neq 0$ならばΔのj列を1でおきかへたものだものをΔ_jとすれば

$$P(Z_n = c_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta} \tag{3.47}$$

故に

$$\eta = P(Z_n \geq [a]) = \sum_j \frac{\Delta_j}{\Delta} \tag{3.47}$$

但し和は$c_j \geq [a]$なるすべてのjに亘るものとする。

3.5 二項分布及び正規分布に對するδ, ηの計算 —— Xは0と1のみを取る確率變數としX$=1$なる確率はH$_i$($i=0,1$)が眞なるときはp_i, H が眞なるときはpとし$1-p=q$, $1-p_i=q_i$ ($i=0,1$)とすれば

$f_i(1)=p_i$; $f_i(0)=q_i$, $f(1)=p$, $f(0)=q$, $p_1>p_0$

と假定しても一般性を失はない。然るときは$Z=\log\dfrac{f_1(x)}{f_0(x)}$の moment generating function $\varphi(t)$は

$$\varphi(t) = E\left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)}\right)^t = p\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^t + q\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^t$$

$\varphi(h)=1$, $h \neq 0$ なるhの値は

$$p\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^h + q\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^h = 1$$

から求められる。先づ$h>0$とすれば

$$e^{Zh} = \left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)}\right)^h > 1$$

ならば明かに$x=1$であるから$e^{Zh}>1$ならば

$$e^{2h}=\left(\frac{f_1(1)}{f_0(1)}\right)^h=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^h$$

従つて (3.39) の δ の定義から

(3.49) $$\delta=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^h \qquad h>0$$

同様に $e^{2h}>1$ ならば $e^{2h}=\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^h$ であるから (3.38) の η の定義から

(3.50) $$\eta=\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^h \qquad h>0$$

同様にして若し $h<0$ ならば

(3.51) $$\delta=\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^h \qquad h>0$$

(3.52) $$\eta=\left(\frac{p_1}{p}\right)^h \qquad h>0$$

となる。

次にXが正規分布の場合に δ,η を求めよう。

(3.53) $$f_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_i)^2} \quad (i=0,1)$$

(3.54) $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$$

とし，一般性を失ふことなく $\theta_0=-\Delta,\ \theta_1=\Delta\ \ \Delta>0$ とする。然らば

(3.55) $$Z=\log\frac{f_1(x)}{f_0(x)}=2\Delta x$$

Zの moment generating function $\varphi(t)$ は

(3.56) $$\varphi(t)=e^{2\Delta\theta t+2\Delta^2 t^2}$$

故に、

(3.57) $$h=-\frac{\theta}{\Delta}.$$

この h を(3.38) 及び (3.39) に代入して

(3.58) $$\delta=\underset{\rho}{l.u.b.}\,E(e^{-2\theta x}/e^{-2\theta x}\geq\frac{1}{\rho})$$

(3.59) $$\eta=\underset{\zeta}{g.l.b.}\,E(e^{-2\theta x}/e^{-2\theta x}\leq\frac{1}{\zeta})$$

任意の關係 R に對して $p^{*}(\mathrm{R})$ は x の分布が平均 θ, 分散 1 なる正規分布なる假定の下に於ける R の成立つ確率 $p^{**}(\mathrm{R})$ は x の分布が平均 $-\theta$, 分散 1 なる正規分布なる假定の下に於ける R の成立つ確率を表はすものとすれば

(3.60) $$E(e^{-2\theta x}/e^{-2\theta x}\geq\frac{1}{\rho})=\frac{p^{**}(e^{-2\theta x}\geq\frac{1}{\rho})}{p^{*}(e^{-2\theta x}\geq\frac{1}{\rho})}$$

(3.61) $$E(e^{-2\theta x}/e^{-2\theta x}\leq\frac{1}{\zeta})=\frac{p^{**}(e^{-2\theta x}\leq\frac{1}{\zeta})}{p^{*}(e^{-2\theta x}\leq\frac{1}{\zeta})}$$

となる。何者 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+\theta)^2}\Big/\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}=e^{-2\theta x}$ であるから

$$P^{**}(e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{\rho}) = P^{**}(2\lambda x \geq \log\frac{1}{\rho}) = P^{**}(x \geq \frac{1}{2\lambda}\log\frac{1}{\rho})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$x \geqq \frac{1}{2\lambda}\log\frac{1}{\rho}$$

$$= G(\frac{1}{2\lambda}\log\frac{1}{\rho} - \lambda)$$

同様にして

$$P^{*}(e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{\rho}) = P^{*}(x \geq \frac{1}{2\lambda}\log\frac{1}{\rho}) = G(\frac{1}{2\lambda}\log\frac{1}{\rho} + \lambda)$$

$u = \frac{1}{2\lambda}\log\frac{1}{\rho}$ とおくと ρ は 0 から 1 迄の値を取るから u は 0 から ∞ 迄の値を取る。而して

$$\rho = e^{-2\lambda u}$$

だから

$$(3.66)\quad \delta = \underset{\rho}{l.u.b.}\left\{\frac{\rho P^{**}(e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{\rho})}{P^{*}(e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{\rho})}\right\} = \underset{u}{l.u.b.}\left\{e^{-2\lambda u}\frac{G(u-\lambda)}{G(u+\lambda)}\right\}$$

$$0 \leq u < \infty$$

$$(3.67)\qquad e^{-2\lambda u}\frac{G(u-\lambda)}{G(u+\lambda)} = \chi(u)$$

とおくと $\chi(u)$ は u の monoton な decreasing function であって maximum は $u=0$ で取ることを示さう。その為に $\frac{d}{du}\log\chi(u) \geq 0$ を云へばよい。さて

$$(3.68)\quad \log \chi(u) = \log G(u-\lambda) - \log G(u+\lambda) - 2\lambda u$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \Phi(x)$ とおくと $\frac{d}{du} G(u) = -\Phi(u)$ であることを用ひて

$$(3.69)\quad \frac{d}{du} \log \chi(u) = -\frac{\Phi(u-\lambda)}{G(u-\lambda)} + \frac{\Phi(u+\lambda)}{G(u+\lambda)} - 2\lambda$$

平均値の定理に依つて

$$\frac{\Phi(u+\lambda)}{G(u+\lambda)} - \frac{\Phi(u-\lambda)}{G(u-\lambda)} = 2\lambda \left[\frac{d}{du}\left(\frac{\Phi(u)}{G(u)}\right)\right]_{u=u'}$$

従つて $\frac{d}{du} \log \chi(u) \leqq 0$ を云ふにはすべての u に對して $\frac{d}{du}\left(\frac{\Phi(u)}{G(u)}\right) \leqq 1$ を云へばよい。即ち

$$(3.70)\quad \frac{d}{du}\left(\frac{\Phi(u)}{G(u)}\right) = \frac{\Phi'(u)G(u) - G'(u)\Phi(u)}{G(u)^2}$$

$$= \frac{\Phi'(u)G(u) + \Phi^2(u)}{G(u)^2} = \frac{\Phi^2(u)}{G^2(u)} - u\frac{\Phi(u)}{G(u)} \leq 1$$

を云へば良い。$y = \frac{\Phi(u)}{G(u)}$ とおくと二次方程式

$$y^2 - uy - 1 = 0$$

の二根は

$$y = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2}$$

で與へられるから

$$\frac{u - \sqrt{u^2+4}}{2} \leq y \leq \frac{u + \sqrt{u^2+4}}{2}$$

であるときに限り $y^2-uy+1\leq 0$ である。而して y は負でないからこれは

$$(3.71)\qquad \frac{\Phi(u)}{G(u)}=y\leq\frac{u+\sqrt{u^2+\varphi}}{2}$$

と equivalent で従って吾々は (3.71) を證明すればよい。所が $u>0$ に對しては

$$(3.72)\qquad \frac{\sqrt{u^2+\varphi}-u}{2}\Phi(u)\leq G(u)$$

である。これは Birnbaum が Z. W. Birnbaum "An inequality for Mill's ratio." Annals of Math. Stat., Vol. 13 (1942) で證明してゐる由。併し此不等式丈の證明なら次の如く考へれば良いであらう。即ち

$$\varphi(u)=G(u)-\frac{\sqrt{u^2+\varphi}-u}{2}\Phi(u)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_u^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{\sqrt{u^2+\varphi}-u}{2}e^{-\frac{u^2}{2}}\right)$$

とおくと

$$\varphi(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}>0$$

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=0$$

で又簡單な計算に依って

$$\varphi'(u)=\frac{16}{(u+\sqrt{u^2+\varphi})^3}<0\qquad u>0$$

であるから $u>0$ なるすべて u に對して

$$\varphi(u) \geq 0$$

従つて

$$(3.73) \qquad \frac{\Phi(u)}{G(x)} \leq \frac{2}{\sqrt{u^2+\varphi}-u} = \frac{\sqrt{u^2+\varphi}+u}{2} \qquad (u>0)$$

次に $u<0$ に對して (3.71) を證明する。それには $u=-v,\ v>0$ とおくと (3.73) から

$$(3.74) \qquad \frac{\Phi(v)}{G(v)} \leq \frac{2}{\sqrt{\varphi+v^2}-v}$$

だから兩邊の逆數を取つて

$$(3.75) \qquad \frac{G(v)}{\Phi(v)} \geq \frac{\sqrt{\varphi+v^2}-v}{2}$$

所で

$$\frac{G(u)}{\Phi(u)} \geq \frac{G(v)+2v\Phi(v)}{\Phi(v)} = \frac{\sqrt{\varphi+v^2}-v}{2}$$

であるから (3.75) から

$$(3.76) \qquad \frac{G(u)}{\Phi(u)} \geq \frac{\sqrt{v^2+\varphi}+3v}{2} \geq \frac{\sqrt{v^2+\varphi}+v}{2}$$

逆數を取つて

$$\frac{\Phi(u)}{G(u)} \leq \frac{2}{\sqrt{v^2+\varphi}+v} = \frac{\sqrt{v^2+\varphi}-v}{2} = \frac{\sqrt{u^2+\varphi}+u}{2}$$

即ち (3.71) は u のすべての値に對して證明されたことになる。從つて δ の値は (3.67) で $u=0$ とおいて求められる。即ち

$$(3.77) \qquad \delta = \frac{G(-\lambda)}{G(\lambda)}$$

4 逐次確率比検定に必要な観測値の数

4.1 断定に達する為に必要な観測値の数の平均値　　　従前通り

$$z = \log\frac{f_1(x)}{f_0(x)},\quad z_i = \log\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)},\ (i=1,2,\cdots\cdots)$$

としれを $Z_n = z_1 + \cdots\cdots + z_n$ が初めて $\geq \log A$ 又は $\leq \log B$ となる最小の正の整数とする。

證明すべきは

$$\text{(4.5)}\qquad En = \frac{EZ_n}{Ez}$$

であるがWALDの證明は筆者には理解出來ぬ（或は間違つてゐるのではないかと思はれる！）ので次の如く考へよう。

k 次元の空間で

$\log B < z_1 < \log A,\ \cdots\cdots,\ \log B < z_1 + \cdots\cdots + z_{k-1} < \log A,\ z_1 + \cdots\cdots + z_k \geq \log A$ 又は $\log B_k$ で完成される部分空間を S_k，$Ez = a$ とし，$z_i - a = \zeta_i$ とすると

$$Z_n = \zeta_1 + \cdots\cdots + \zeta_n - na$$

$$EZ_n = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{S_k} Z_k\,dp = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{S_k}(\zeta_1 + \cdots + \zeta_k)\,dp - a\sum_{k=1}^{\infty} k\int_{S_k} dp,$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{S_k}(\zeta_1 + \cdots\cdots + \zeta_k)\,dp - a\cdot En.$$

従つて $E\zeta_i = 0$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{S_k}(\zeta_1+\cdots\zeta_k)\,dp = 0$$

を證明すればよい。卽ち

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_{S_k}(\zeta_1+\cdots+\zeta_k)\,dp = 0$$

を云へばよい。さて S_k を N 次元空間の cylinder set と考へて

$$S_1+\cdots+S_k+\cdots+S_N = U_N$$

として U の complement $C(U_N) = Q_N$ とすると

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{S_k}(\zeta_1+\cdots+\zeta_k)\,dp = \int_{U_N}(\zeta_1+\cdots+\zeta_N)\,dp$$

$$= -\int_{Q_N}(\zeta_1+\cdots+\zeta_N)\,dp$$

所で基本公式の主張は

$$\int_{Q_N} dp \sim \frac{1}{N!}$$

であつたのだから Q_N 内で $|\zeta_i| <\ M$ ならば

$$\int_{Q_N}(\zeta_1+\cdots+\zeta_N)\,dp \sim \frac{M}{(N-1)!}$$

sequential analysis が H_0を採擇する即ち

$Z_n \leq \log B$となる假定の下に於ける條件附平均値

を$E^{*}Z_n$，又同樣にH_1を採擇するとの假定，即ち

$Z_n \geq \log A$となると云ふ假定の下に於ける條件附平

均値を$E^{**}Z_n$とする。$Z_n \geq \log A$となる確率がγ

であつたのだから.

$$(4.6) \qquad EZ_n = (1-\gamma)E^{*}Z_n + \gamma E^{**}Z_n$$

(4.5) と (4.6) より

$$(4.7) \qquad E_n = \frac{(1-\gamma)E^{*}Z_n + \gamma E^{**}Z_n}{Ez}$$

EZ_nの正確な値，從つてE_nの正確な値はzがある常數dの整數倍のみを取るときには計算出來る。このときはZ_nの正確な確率分布が求められるから((3.47)を見よ！）若しzがこの如き値をとらぬ場合にはzの分布はdを充分小さく取ることによつてこの*discret* な分布で任意の近似度を以つて近似出來るからEZ_nの値も任意に精密な近似で計算出來るわけである。

若し$|Ez|$及びzの標準偏差が共に小なる場合には$E^{*}Z_n$は$\log B$に近く$E^{**}Z_n$は$\log A$に近いからこの場合には

$$(4.8) \qquad E_n \sim \frac{(1-\gamma)\log B + \gamma \log A}{Ez}$$

(4.8) 式の近似の良さを見る爲に $E^{*}Z$ 及び $E^{**}Z_n$ の上限及び下限を計算して E の上下限を求めて見よう。

を負ならざる變數として

(4.9) $$\xi = \max_{r} E(z-r \mid z \geq r) \qquad (r \geq 0)$$

(4.10) $$\xi' = \min_{r} E(z+r \mid z+r \leq 0) \qquad (r \geq 0)$$

とすれば

(4.11) $$\log A \leq E^{**} Z_n \leq \log A + \xi$$

(4.12) $$\log B + \xi' \leq E^{*} Z_n \leq \log B$$

となる。何者例へば (4.11) に關しては

$$Z_n = Z_{n-1} + z_n \quad Z_{n-1} \quad \log A$$

$$Z_n \geq \log A$$

であるから $0 \leq Z_n - \log A < z_n$ 依つて

$$Z_n - \log A = z_n - r \qquad r \geq 0$$

$$EZ_n - \log A \leq \max_{r} E(z-r / z \geq r)$$

(4.7) と (4.11) 及び (4.12) より

(4.13) $$\frac{(1-\gamma)(\log B + \xi') + \gamma \log A}{Ez} \leq E_n \leq \frac{(1-\gamma)\log B + \gamma(\log A + \xi)}{Ez}, \qquad Ez > 0$$

(4.14) $$\frac{(1-\gamma)\log B + \gamma(\log A + \xi)}{Ez} \leq E_n \leq \frac{(1-\gamma)(\log B + \xi') + \gamma \log A}{Ez}, \qquad Ez < 0$$

となる。

4.2 二項分布及び正規分布に對する ξ, ξ' の計算

random variable X は 0 として のみ取るとする。
$H_i (i=0,1)$ が正しいとき X＝1 なる確率を P_i，H が正しいとき X＝1 となる確率を P とする。
$1-P_i=q_i$ $1-p=q$ とすると $f_i(1)=P_i$， $f_i(0)=q$ $f(1)=P$, $f(0)=q$ である。一般性を失ふことなく $P_1>P_0$ と假定する。明かに $\log\frac{f_1(x)}{f_0(x)}>0$ ならば $x=1$ であつて，從つて

$$\log\frac{f_1(x)}{f_0(x)}=\log\frac{f_1(x)}{f_0(1)}=\log\frac{P_1}{P_1}$$

であるから

$$(4.15)\qquad \xi=\max_{r} E(z-r\mid z\geq r)=\log\frac{P_1}{P_0}$$

$\log\frac{f_1(x)}{f_0(x)}\leq 0$ なら $x=0$ であるから

$$(4.16)\qquad \xi'=\min_{r} E(z+r\mid z+r\leq 0)=\log\frac{q_1}{q_0}$$

次に正規分布に對して　・を計算しよう。

$$f_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\theta_i)^2/2}\qquad i=0,1\ (\theta_1>\theta_0)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\theta)^2/2}$$

となる。一般性を失ふことなく $\theta_0 = -\Delta$　$\theta_1 = \Delta$

$\Delta > 0$ とする。

(4.17)　$$z = \log \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 2\Delta x$$

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},\quad G(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$ とする

$x = x - \theta$ とすれば　$z = 2\Delta(t+\theta)$

$$E(z-\gamma \mid z-\gamma \geq 0) = 2\Delta E\left(t+\theta-\frac{\gamma}{2\Delta} \,\middle|\, t+\theta-\frac{\gamma}{2\Delta} \geq 0\right)$$

(4.18)　$$= \frac{2\Delta}{G(t_0)} \int_{t_0}^\infty (t-t_0)\Phi(t)\,dt = \frac{2\Delta}{G(t_0)} \left[-t_0 G(t_0) + \Phi(t_0)\right]$$

但し

(4.19)　$$t_0 = \frac{\gamma}{2\Delta} - \theta$$

所で 3.5 に於いて $\dfrac{\Phi(t_0)}{G(t_0)} - t_0$ は t_0 の単調減少函數なることを證明してある。從って E $(z-\gamma \mid z-\gamma \geq 0)$ の max は $\gamma = 0$ で取る。

(4.20)　$$\xi = \frac{2\Delta}{G(-\theta)} \left\{\theta G(-\theta) + \Phi(-\theta)\right\} = 2\Delta \left\{\theta + \frac{\Phi(-\theta)}{G(-\theta)}\right\}$$

ξ' の計算

(4.21)　$$\xi' = \min_\gamma E(z+\gamma \mid z+\gamma \leq 0) = -\operatorname{Max}_\gamma E(-z-\gamma \mid -z-\gamma \geq 0)$$

$$=-2\Delta \operatorname*{Max}_{\gamma} E\left(-x-\frac{\gamma}{2\Delta} \middle| -x-\frac{\gamma}{2\Delta} \geq 0\right)$$

$t=-x+\theta \quad t_0=\frac{\gamma}{2\Delta}+\theta$ とおけば．

$$(4.22)\quad E\left(-x-\frac{\gamma}{2\Delta} \middle| -x-\frac{\gamma}{2\Delta} \geq 0\right)=E(t-t_0 \mid t-t_0 \geq 0)$$

$$=\frac{1}{G(t_0)}\int_{t_0}^{\infty}(t-t_0)\Phi(t)dt=\frac{\Phi(t_0)}{G(t_0)}-t_0$$

これはt_0の単調減少函数であるから

$$(4.23)\quad \operatorname*{Max}_{\gamma} E\left(-x-\frac{\gamma}{2\Delta} \middle| -x-\frac{\gamma}{2\Delta} \geq 0\right)=\frac{\Phi(\theta)}{G(\theta)}-\theta$$

(4.21) 及び (4.23) より

$$(4.24)\quad \xi'=-2\Delta\left[\frac{\Phi(\theta)}{G(\theta)}-\theta\right]$$

4.3 通常の検定法と比較したときの観測値の数の節約

次の如き正規分布の場合を考へる。

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_0)^2}$$

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_1)^2}$$

$$\theta_0 \neq \theta_1$$

$n(\alpha,\beta)$ を通常の most powerful test で第一種の過誤の確率α以下第二種の過誤の確率β以下のときの必要なる観測値の数の最小値とする。

この$n(\alpha,\beta)$を計算しよう。一般性を失ふことなく$\theta_0 \leq \theta_1$とする。通常のmost powerful testではconstant dを適當に取つて$\bar{x} \leq d$ならH_0をaccept. $\bar{x} > d$ならH_1をacceptする。第一種の過誤の起る確率は$G[\sqrt{n}(d-\theta_0)]$，第二種の過誤の確率は

$$1-G\{\sqrt{n}(d-\theta_1)\}$$

但し

$$G(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

である。これを夫々α,βと等しいとおいて

$$G[\sqrt{n}(d-\theta_0)] = \alpha \tag{4.25}$$

$$1-G\{\sqrt{n}(d-\theta_1)\} = \beta \tag{4.26}$$

$G(\lambda_0)=\alpha$, $G(\lambda_1)=1-\beta$とすると

$$\sqrt{n}(d-\theta_0) = \lambda_0 \tag{4.27}$$

$$\sqrt{n}(d-\theta_1) = \lambda_1 \tag{4.28}$$

これを邊々相減じて

$$\sqrt{n}(\theta_0-\theta_1) = \lambda_1-\lambda_0 \tag{4.29}$$

故に

$$n \equiv n(\alpha,\beta) = \frac{(\lambda_1-\lambda_0)^2}{(\theta_0-\theta_1)^2} \tag{4.30}$$

(4.30)の右邊が整數でないときにはnはこの値の次に大きい整數値である。

sequential probability ratio test で

$$A = a(\alpha,\beta) = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = b(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

とおくと第一二種の過誤の確率は夫々α,βを超過してもそれは殆ど無視出来る程度である。第一,二種の過誤の確率が正確にα,βであるときのA,Bの値を夫々A(α,β),B(α,β)とすれば3.2から

$$A(\alpha,\beta) \leq a(\alpha,\beta), \quad B(\alpha,\beta) \geq b(\alpha,\beta)$$

従つて$E_1(n)$,$E_0(n)$はA(α,β),B(α,β)の代りにA$=a(\alpha,\beta)$,B$=b(\alpha,\beta)$を取れば増加する。

$|\theta_1-\theta_0|$が小即ちξ,ξ'は無視出来る場合を考へよう。従つて(4.8)の近似式を用ひる。$H=H_0$なら$\gamma=\alpha$, $H=H_1$なら$\gamma=1-\beta$であるから(4.9)式より

(4.31) $$E_1(n) = \frac{a^*}{E_1(z)} - \beta\frac{a^*+|b^*|}{E_1(z)}$$

(4.32) $$E_0(n) = \frac{-b^*}{E_0(-z)} - \alpha\frac{-b^*+a^*}{E_0(-z)}$$

但し$a^* = \log a(\alpha,\beta) = \log\frac{1-\beta}{\alpha}$, $b^* = \log b(\alpha,\beta) = \log\frac{\beta}{1-\alpha}$である。

(4.33) $$E_1(z) = \frac{1}{2}(\theta_0-\theta_1)^2$$

であるから

(4.34) $$E_0(z) = -\frac{1}{2}(\theta_0-\theta_1)^2$$

(4.31)(4.30)及び([illegible])から

$$\frac{E_1(n)}{n(\alpha,\beta)}, \quad \frac{E_0(n)}{n(\alpha,\beta)}$$

はパラメーターθ_0, θ_1と無關係である。

sequential test と通常の most powerful test 比較して觀測値の數をどの位節約出來るかを見るにはその節約はH_1が眞なるときは

$$100\left(1-\frac{E_1(n)}{n(\alpha,\beta)}\right) \text{percent}$$

H_0が眞なるときは

$$100\left(1-\frac{E_0(n)}{n(\alpha,\beta)}\right) \text{percent}$$

で表はされるα, βの色々な値に對して第一表Aに

$100\left(1-\frac{E_1(n)}{n(\alpha,\beta)}\right)$を、第一表Bは$100\left(1-\frac{E_0(n)}{n(\alpha,\beta)}\right)$を

計算したものである。正規分布の對稱性よりB表は A表のα, βを反對にすれば出る。

第一表

Average percentage saving of sequential analysis, as compered with current most powerful test for testing mean of a normally distributed variete.

A. When alternative hypothesis is true

$\beta \backslash \alpha$	.01	.02	.03	.04	.05
.01	58	60	61	62	63
.02	54	56	57	58	59
.03	51	53	54	55	55
.04	49	50	51	52	53
.05	47	49	50	50	51

B. When null hypothesis is true

$\beta \backslash \alpha$	.01	.02	.03	.04	.05
.01	58	54	51	49	47
.02	60	56	53	50	49
.03	61	57	54	51	50
.04	62	58	55	52	50
.05	63	59	55	53	51

以上の表から分ることはα, βの値が.01と.05の間ではsequential testでは少くとも47%は観測の数が節約出来ることがある。$A = \alpha(\alpha, \beta)$,

$B = b(\alpha, \beta)$ に對する $E_i(n)$ は $A = A(\alpha, \beta)$, $B = B(\alpha, \beta)$ に對して求められた $E_i(n)$ より大であるから眞實の節約はこれより少しく大となるべきである。

§4.4 數 n の特性函數, モーメント及び分布

$\varphi(t) = Ee^{zt}$ として $\varphi(t)$ が存在し $|\varphi(t)| \geq 1$ なるすべての t の complex な値に對して次の fundamental identety が成立つ

$$(4.35) \qquad E\left\{ e^{Z_n t} \{\varphi(t)\}^{-n} \right\} = 1.$$

此式を用ひて n の分布を求めて見よう。

$\varphi(h) = 1$, $h \neq 0$ なる實數値 h を取る。又方程式

$$-\log \varphi(t) = \tau$$

の二根を $t_1(\tau)$ $t_2(\tau)$ として

$$\lim_{\tau \to 0} t_1(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau \to 0} t_2(\tau) = h$$

とする。更に $Z_n \geq \log A$ なる條件附の n の分布の特性函數を $\psi_1(\tau)$, $Z_n \leq \log B$ なる條件附の n の分布の特性函數を $\psi_2(\tau)$ とする。

$Z_n \geq \log A$ のときは $|Z_n - \log A|$ を $Z_n \leq \log B$ のときは $|Z_n - \log B|$ を無視すれば (4.35) より

$$(4.36) \qquad q\psi_1(\tau)A^{t_1(\tau)} + (1-q)\psi_2(\tau)B^{t_1(\tau)} = 1.$$

(4.37) $\quad \gamma\psi_1(\tau)A^{t_2(\tau)}+(1-\gamma)\psi_2(\tau)B^{t_2(\tau)}=1$

但し

$$\gamma=P(Z_n\geq \log A)=\frac{1-B^h}{A-B^h}$$

の特性函数 $\psi(\tau)$ は

(4.38) $\quad \psi(\tau)=\gamma\psi_1(\tau)+(1-\gamma)\psi_2(\tau)$

次に z が正規分布のときの $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi(\tau)$ を求めよう。

$$-\log\varphi(t)=-(Ez)t-\frac{\sigma_z^2}{2}t^2=\tau$$

故に

(4.39)
$$h=-\frac{2Ez}{\sigma_z^2}$$

$$t_1(\tau)=\frac{1}{\sigma_z^2}\left(-Ez+\sqrt{(Ez)^2-2\sigma_z^2\tau}\right)$$

(4.40)
$$t_2(\tau)=\frac{1}{\sigma_z^2}\left(-Ez-\sqrt{(Ez)^2-2\sigma_z^2\tau}\right)$$

(4.36), (4.37), (4.38) より

(4.41)
$$\gamma\psi_1(\tau)=\frac{A^{g_2}-A^{g_1}}{A^{g_1}B^{g_2}-A^{g_2}B^{g_1}}$$

(4.42)
$$(1-\gamma)\psi_2(\tau)=\frac{A^{g_1}-B^{g_2}}{A^{g_1}B^{g_2}-A^{g_2}B^{g_1}}$$

(4.43)
$$\psi(\tau)=\frac{A^{g_1}+B^{g_2}-A^{g_2}-B^{g_1}}{A^{g_1}B^{g_2}-A^{g_2}B^{g_1}}$$

但し

(4.44) $$g_1 = t_1(\tau)$$

(4.45) $$g_2 = t_2(\tau)$$

n の r 次のモーメント（r：正の整數）$\mathrm{E}(n^r) = \left.\dfrac{d^r}{d\tau^r}\psi(\tau)\right|_{\tau=0}$ $E^*(n^r)$：$Z_n \leq \log B$ なる條件附の n の r 次のモーメント

$E^{**}(n^r)$：$Z_n \geq \log A$ なる條件附の n の r 次のモーメントとすれば

(4.46) $$E^{**}(n^r) = \left.\frac{d^r\psi_2(\tau)}{d\tau^r}\right|_{\tau=0},\quad E^{**}(n^r) = \left.\frac{d^r\psi_1(\tau)}{d\tau^r}\right|_{\tau=0}$$

$\left.\dfrac{d^r\psi_k(\tau)}{d\tau^r}\right|_{\tau=0}$（$k=1,2$）は（4.35）を逐次微分して得られる。$|Z_n - \log A|$, $|Z_n - \log B|$ を無視すれば（4.35）は次の如くなる。

(4.47) $$\gamma A^t\psi_1[-\log\varphi(t)] + (1-\gamma)B^t\psi_2[-\log\varphi(t)] = 1$$

（4.47）を r 回微分して $t=0$, $t=h$ とおけば $2r$ 個の未知數

$$\left.\frac{d^j\psi_k(\tau)}{d\tau^j}\right|_{\tau=0} (k=1,2;\ j=1,\cdots,r)$$

に對して $2r$ 個の一次方程式が出る。

$$\frac{d^r \psi_k(\tau)}{d\tau^r} \equiv \psi_k^{(r)}(\tau)$$

とおけば（第35）を t で微分して

（第48） $\gamma(\log A)A^t\psi_1\{-\log\varphi(t)\} - \gamma A^t\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\psi_1^{(1)}\{-\log\varphi(t)\}$

$+(1-\gamma)(\log B)B^t\psi_2\{-\log\varphi(t)\} - (1-\gamma)B^t\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\psi_2^{(1)}\{-\log\varphi(t)\}$

$=0$

$t=0,\ t=h$ とおいて

（第49） $\gamma\log A - \gamma\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}\psi_1^{(1)}(0) + (1-\gamma)\log B - (1-\gamma)\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}\psi_2^{(1)}(0) = 0$

（第50） $\gamma(\log A)A^h - \gamma A^h\frac{\varphi'(h)}{\varphi(h)}\psi_1^{(1)}(0) + (1-\gamma)(\log B)B^h - (1-\gamma)B^h\frac{\varphi'(h)}{\varphi(h)}\psi_2^{(1)}(0)$

$=0$

これを解いて $\psi_1^{(1)}(0)$, $\psi_2^{(1)}(0)$ が求められる。

n の分布は $\psi(\tau)$ を用ひて

$$F(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tn}\psi(t)dt$$

として得られる。これは z が正規分布のときに結果が出されてゐる。その結果を簡単に述べれば次の通りである。

1) $B=0$ 又は $B>0$, 且 $A=\infty$ のとき n の分布は簡単な初等函数で表はされる。

2) $B=0$, 且 $z>0$ なら

$$m = \frac{1}{2\sigma_z^2}(Ez)^2 n$$

の分布は

$$(4.51) \quad F(m)dm = \frac{c}{2\Gamma(\frac{1}{2})m^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{c^2}{4m} - m + c} dm \quad (0 \leq m < \infty)$$

但し

$$(4.52) \qquad C = \frac{1}{\sigma_z^2}(Ez)\log A.$$

3) $B > 0, A = \infty, Ez < 0$ のときは m の分布は (4.51) の C を $\frac{1}{\sigma_z^2}(Ez)\log B$ とすればよい。

4) $B > 0, A < \infty$ のときは m の分布は各項が (4.51) の形の無限級数となる

m はデスクレートな變數なのにそれが確率密度を有するといふのは一見矛盾であるがこれは Z_n と $\log A, \log B$ との差を無視した爲である。何者 $|Z_n - \log A|$ 及び $|Z_n - \log B|$ が 0 となるなるのは Ez と が共に 0 に近づいた極限の場合であるから。

(4.51) の m の分布は若し $Z_n \geq \log A$ となる確率が殆ど 1 である場合には $B > 0$ の場合の m の正確な分布に對しても良好なる近似を與へる。

又 $|Ez|$ 及び σ_z が充分小さい場合には z が正規

分布をするとして求められたnの分布はzが正規分布でない場合のnの分布はzが正規分布でない場合のnの分布に対して良好な近似を与へる。

以上は A. Wald: "On cumulative sums of random variable" Annals of Math. Stat. vol. 15 (1944) にて証明されてゐる由である。

4.5 sequential process が与へられた数以下で終了する確率の下限　仮説 H_i ($i=0.1$) の下に sequential process が $n \leq n_0$ で終了する確率を $P_i(n_0)$ とする。

又

$$\overline{P}_0(n_0) = P_0\left[\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha \leq \log B\right] \tag{4.53}$$

$$\overline{P}_1(n_0) = P_0\left[\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha \geq \log A\right] \tag{4.54}$$

とすれば明かに

$$\overline{P}_i(n_0) \leq P_i(n_0) \qquad (i=0.1) \tag{4.55}$$

$\overline{P}_i(n_0)$ が計算する為に $\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha$ が正規分布と見做される様 n_0 は充分大とする。$G(\lambda)$ を次の如くとる。

$$G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \tag{4.56}$$

而に又

(4.57) $$\lambda_1(n_0)=\frac{\log A-n_0E_1(z)}{\sqrt{n_0}\,\sigma_1(z)}$$

(4.58) $$\lambda_0(n_0)=\frac{\log B-n_0E_0(z)}{\sqrt{n_0}\,\sigma_0(z)}.$$

但し$\sigma_i(z)$は假説H_iの下に於けるzの標準偏差とする。然らば

(4.59) $$\bar{P}_1(n_0)=G[\lambda_1(n_0)]$$

(4.60) $$\bar{P}_0(n_0)=1-G[\lambda_0(n_0)]$$

從って次の不等式が成立つ。

(4.61) $$P_1(n_0)\geq G[\lambda_1(n_0)]$$

(4.62) $$P_0(n_0)\geq 1-G[\lambda_0(n_0)]$$

$\log A=\log\frac{1-\beta}{\alpha}$, $\log B=\log\frac{\beta}{1-\alpha}$として($\alpha$, β)の色々な値に對して$\bar{P}_1(n_0)$ $\bar{P}_0(n_0)$を計算したのが次の第二表である。此の計算では假説H_0は平均値0分散1の正規分布, H_1は平均値θ分散1の正規分布とする。(α, β)が與へられた時θは從來の強さ(α, β)なるmost powerful testに依る必要な觀測數が1000である如く取られたとする。

第二表の與へる確率は眞の確率の下界である。

第 2 表

Lower bound of the probability that a sequential analysis will terminate within various numbers of trials, when the most powerful current test requires exactly 1000 trials.

Number of trials	$\alpha = .01$ and $\beta = .01$		$\alpha = .01$ and $\beta = .05$		$\alpha = .05$ and $\beta = .05$	
	Alternative hypothesis true	Null hypothesis true	Alternative hypothesis true	Null hypothesis true	Alternative hypothesis true	Null hypothesis true
1000	.910	.910	.799	.891	.773	.773
1200	.910	[illegible]	.871	.932	.837	.837
1400	.972	.972	.916	.957	.883	.883
1600	.985	.985	.946	.972	.915	.915
1800	.991	.991	.965	.982	.938	.938
2000	.995	.995	.977	.989	.955	.955
2200	.997	.997	.985	.993	.967	.967
2400	.999	.999	.990	.995	.976	.976
2600	.999	.999	.994	.997	.982	.982
2800	1.00	1.00	.996	.998	.987	.987
3000	1.00	1.00	.997	.999	.990	.990

§4.6 切り縮められた sequential analysis

實用上はしばしば觀測値の數の上限が定まつてゐることが望ましいことがある。ある整數値 n_0 に對して sequential process が $n \leq n_0$ で終了しないならば $n = n_0$ の段階において H_0 の rejectance 及び acceptance に對して new rule を作る。

即ち $\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha \leq 0$ 　　ならば H_0 を accept し

$\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha > 0$ 　　ならば H_1 を accept する。このやうに sequential process を切り縮めれば勿論第一、二種の過誤の確率は變つてあらう。今 truncate しない場合の兩種の過誤の確率を夫々 α, β, n_0 で切り縮めた時のそれを $\alpha(n_0)$, $\beta(n_0)$ として $\alpha(n_0)$, $\beta(n_0)$ の上界を求めよう。

先づ $\alpha(n_0)$ の上界を求める爲に H_0 の下で

(i) $\log B < \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha < \log A$ 　　　$n = 1, 2, \cdots n_0 - 1$

(ii) $0 < \sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha < \log A$

(iii) n_0 を truncate せず續ければ遂には H_0 を accept する。この (i) (ii) (iii) が同時に成立つ確率を $\rho(n_0)$ とする。

$$(4.63) \quad \alpha(n_0) \leq \alpha + \rho(n_0)$$

$0<\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha<\log A$となる確率を$\bar{p}_0(n_0)$（仮説$H_0$の下で）

とすれば

$$\varphi_0(n_0)\leq \bar{p}_0(n_0)$$

故に

(4.64) $$\alpha(n_0)\leq\alpha+\bar{p}_0(n_0)$$

次に仮説H_1の下で

(i) $\log B<\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha<\log A$, $n=1,2,\cdots,n_0-1$

(ii) $\log B<\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha\leq 0$

(iii) n_0でtruncateせず続けたは遂にはH_1をacceptする。

この(i)(ii)(iii)が同時に成立つ確率を$\rho_1(n_0)$

とすれば

(4.65) $$\beta(n_0)\leq\beta+\rho_1(n_0)$$

又H_1の下で$\log B<\sum_{\alpha=1}^{n_0} z_\alpha\leq 0$となる確率を$\bar{\rho}_1(n_0)$

とすれば

(4.66) $$\beta(n_0)\leq\beta+\bar{\rho}_1(n_0)$$

$$\nu_1=\frac{-n_0E_0(z)}{\sqrt{n_0}\,\sigma_0(z)}$$

$$v_2=\frac{\log A-n_0E_0(z)}{\sqrt{n_0}\,\sigma_0(z)},\quad v_3=\frac{-n_0E_1(z)}{\sqrt{n_0}\,\sigma_1(z)},\quad v_4=\frac{\log B-n_0E_1(z)}{\sqrt{n_0}\,\sigma_1(z)}$$

但し $\sigma_i(z)$ は假說 H_i ($i=0,1$) の下における z の標準偏差である。然らば

(4.67) $\overline{P}_0(n_0)=G(v_1)-G(v_2)$

(4.68) $\overline{P}_1(n_0)=G(v_4)-G(v_3)$

故に

(4.69) $\alpha(n_0)\leq\alpha+G(v_1)-G(v_2)$

(4.70) $\beta(n_0)\leq\beta+G(v_4)-G(v_3)$

上に與へられた上界は夫々 $\alpha(n_0)$, $\beta(n_0)$ よりも大である。從つてより精密な評價が望ましい。

(4.69) 及び (4.70) で示された $\alpha(n_0)$ 及び $\beta(n_0)$ の上界を (α,β) の色々な値と n_0 の色々な値に對して計算したのが第3表である。この計算では $\log A=\log\frac{1-\beta}{\alpha}$, $\log B=\log\frac{\beta}{1-\alpha}$ として H_0 は平均値 0 の正規分布を H_1 は平均値 θ 分散 1 の正規分布を表はすとして θ は從來の most powerful test で観測値の個數が同一の (α,β) に對して n_0 となる如く adjust されたものとする。

第 3 表

Effect on risks of error of trancating a sequential analysis at a predetermined number of trials

Number of trials	$\alpha = .01$ and $\beta = .01$		$\alpha = .01$ and $\beta = .05$		$\alpha = .05$ and $\beta = .05$	
	upper found of effective α	upper found of effective β	upper found of effective α	upper found of effective β	upper found of effective α	upper found of effective β
1000	.020	.020	.033	.070	.095	.095
1200	.015	.015	.024	.063	.082	.082
1400	.013	.013	.019	.058	.072	.072
1600	.012	.012	.016	.055	.066	.066
1800	.011	.011	.014	.053	.062	.062
2000	.010	.010	.012	.052	.058	.058
2200	.010	.010	.012	.051	.056	.056
2400	.010	.010	.011	.051	.055	.055
2600	.010	.010	.011	.051	.053	.053
2800	.010	.010	.010	.050	.053	.053
2000	.010	.010	.010	.050	.052	.052

§7 Sequential probability ratio test の efficiency

第一種の過誤の確率α,第二種の過誤の確率βである sequential test を S としてそれが無限に續く確率は 0 であるとする。S′を S と同じ強さの sequential probability ratio test とするとき z_n と $\log A$ 及び $\log B$ との喰違を無視すれば

$$E_i(n/S) \geq E_i(n/S') \qquad i=0.1$$

即ち S′が optimum であることを示さう。

この喰違ひが正確に 0 となるのは z が d と $-d$ なる値をとり $\log A$ 及び $\log B$ が d の整數倍のときに限り他の場合には identically zero とならぬが $|Ez|$ 及び σ_z が充分に小なるときにはこの喰違ひ $|z_n-\log A$ 及び $||z_n|-|\log B||$ は無視出來る程小となる。

任意の random variable に對して―.

$E_i^*(u/S)$: 假說H_iの下にH_0が accept されるといふ條件附 expectation

$E_i^{**}(u/S)$: 假說H_iの下にH_1が accept されるといふ條件附 expectation

と定める。次に $Q_i(S)$ は sequential test を H_i の acceptance に等しくすべての sample point の集合とする。

(4.71) $\quad E_0^{*}\left(\dfrac{P_{1n}}{P_{0n}}\middle| S\right)=\dfrac{P_1(Q_0|S)}{P_0(Q_0|S)}=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

(4.72) $\quad E_0^{**}\left(\dfrac{P_{1n}}{P_{0n}}\middle| S\right)=\dfrac{P_1(Q_1|S)}{P_0(Q_1|S)}=\dfrac{1-\beta}{\alpha}$

(4.73) $\quad E_1^{*}\left(\dfrac{P_{0n}}{P_{1n}}\middle| S\right)=\dfrac{P_0(Q_1|S)}{P_1(Q_0|S)}=\dfrac{1-\alpha}{\beta}$

(4.74) $\quad E_1^{**}\left(\dfrac{P_{0n}}{P_{1n}}\middle| S\right)=\dfrac{P_0(Q_1|S)}{P_1(Q_1|S)}=\dfrac{\alpha}{1-\beta}$

となる。

補助定理 I 任意のrandom variableに対して

(4.75) $\quad e^{Eu}\leq Ee^{u}$

証明：(4.75)は次の如く書ける。即ち$u'=u-Eu$とおいて

(4.76) $\quad 1\leq Ee^{u'}$

これを証明するにはe^{u'}をTalor級數に展開して

(4.77) $\quad e^{u'}=1+u'+\frac{1}{2}u'^2e^{\xi(u')}\qquad 0\leq\xi(u')\leq u'$

故に

(4.78) $\quad Ee^{u'}=1+\frac{1}{2}E\{u'^2e^{\xi(u')}\}\geq 1$

Q.E.D.

補助定理２　Sはある一定數Nに對してそれが終了すべき觀測個數nが必ず$n \leq N$となるsequential testとすれば

$$(4.79)\quad E_i(n|S) = \frac{E_i\left(\log\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \middle| S\right)}{E_i(z)} \qquad i=0.1.$$

證明は(4.5)のそれと本質的には同一である。

上記の補助定理1.2を用ひて次の定理を證明しよう。

定理　Sは第一種の過誤の確率α第二種の過誤の確率βでそれが無限に續く確率は0である。sequential testとすれば

$$(4.80)\quad E_0(n|S) \geq \frac{1}{E_0(z)}\left[(1-\alpha)\log\frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha\log\frac{1-\beta}{\alpha}\right]$$

$$(4.81)\quad E_1(n|S) \geq \frac{1}{E_1(z)}\left[\beta\log\frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\log\frac{1-\beta}{\alpha}\right]$$

證明：先つsequential test Sが終了するnは$\leq N$なる場合に證明しよう。補助定理２に依て

$$(4.82)\quad E_0(n|S) = \frac{1}{E_0(z)} E\left(\log\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \middle| S\right)$$

$$= \frac{1}{E_0(z)}\left\{(1-\alpha)E_0^{*}\left(\log\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \middle| S\right) + \alpha E_0^{**}\left(\log\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \middle| S\right)\right\}$$

(4.83) $E_1(n|S) = \frac{1}{E_1(z)} E_1(\log \frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S)$

$$= \frac{1}{E_1(z)}\left[\beta E_1^{*}(\log \frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S) + (1-\beta)E_1^{**}(\log \frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S)\right]$$

補助定理Ⅰより

(4.84) $E_0^{*}(\log \frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S) \leq \log E_0^{**}(\frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S) = \log \frac{\beta}{1-\alpha}$

(4.85) $E_0^{**}(\log \frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S) \leq \log E_0^{**}(\frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S) = \log \frac{1-\beta}{\alpha}$.

(4.86) $E_1^{*}(\log \frac{P_{0n}}{P_{1n}}|S) = -E_1^{*}(\log \frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S)$

$$E_1^{*}(\log \frac{P_{0n}}{P_{1n}}|S) \leq \log E_1^{*}(\frac{P_{0n}}{P_{1n}}|S) = \log \frac{1-\alpha}{\beta}$$

(4.87) $E_1^{**}(\log \frac{P_{0n}}{P_{1n}}|S) = -E_1^{**}(\log \frac{P_{1n}}{P_{0n}}|S)$

$$E^{**}(\log \frac{P_{0n}}{P_{1n}}|S) \leq \log \frac{\alpha}{1-\beta}$$

$E_0(z) < 0$ であるから (4.82) (4.84) 及び (4.85) から (4.80) が出るし又 $E_1(z) > 0$ であるから (4.83) (4.86) 及び (4.87) から (4.81) が出る。

次に任意の強さ (α, β) なる sequential test に對して證明しよう。

S_N は S が N で終了しないとき truncate して生ずる sequential test としそれの強さを (α_N, β_N) とすれば

(第88) $E_0(n|S) \geq E_0(n|S_N) \geq \frac{1}{E_0(z)}\left[(1-\alpha_N)\log\frac{\beta_N}{1-\alpha_N}+\alpha_N\log\frac{1-\beta_N}{\alpha_N}\right]$

(第89) $E_1(n|S) \geq E_1(n|S_N) \geq \frac{1}{E_1(z)}\left[\beta_N\log\frac{\beta_N}{1-\alpha_N}+(1-\beta_N)\log\frac{1-\beta_N}{\alpha_N}\right]$

所で $\lim_{N\to\infty}\alpha_N=\alpha$, $\lim_{N\to\infty}\beta_N=\beta$ を考へればよい。

A. Wald は Sequential probability ratio test で $E_0(n|S')$ と $E_1(n|S')$ が正確に夫々(第88)(第89)の右邊に等しくなるであらうと云ふ推測を下してゐる。Wald にも證明は未だ出來ないらしい。

以上で極く大略であるが第一篇の紹介を終る。

(1947. 1. 25)