# Mean concentration function と Typical function[1] IV.

所員 國澤清典

$\Delta_n(\alpha)$ $(0\le\alpha\le 1)$ を次の様に定義する。

(2.2.8) $$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_n^2(\alpha)}{\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\widetilde{F}_{n1}*\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)$$

次の関係が成立する。

**定理 2.2.2** $\alpha$ を $\frac{3}{4}<\alpha\le 1$ なる正数とすれば

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{C}{\eta^2}\\ \\ C\end{array}\right\}\ge\sum_{m=1}^{m_n}\left(1-\psi_{F_{nm}}(\eta\,\Delta_n(\alpha))\right)\quad\begin{array}{l}\text{for } 0<\eta\le 1\\ \text{for } \eta>1\end{array}\quad(n=1,2,\cdots)$$

此処に $C$ は $\alpha$ のみに関する常数である。 (calcu.)

**證明** どんな $\eta>0$ に対しても $0\le t\le 2$ に於て

$$1-\prod_{m=1}^{m_n}\left|f_{nm}\left(\frac{t}{\eta\,\Delta_n(\alpha)}\right)\right|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{tx}{\eta\,\Delta_n(\alpha)}\right)\right)d\widetilde{F}_{n1}*\cdots$$

$$\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)=2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\left(\frac{tx}{2\eta\,\Delta_n(\alpha)}\right)d\widetilde{F}_{n1}*\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)$$

$$\le 2\left\{t^2\int_{|x|\le\eta\Delta_n(\alpha)}\frac{x^2}{4\eta^2\Delta_n^2(\alpha)}\,d\widetilde{F}_{n1}*\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)+\int_{|x|>\eta\Delta_n(\alpha)}d\widetilde{F}_{n1}*\cdots\right.$$

$$\left.\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)\right\}\le 4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\eta^2\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\widetilde{F}_{n1}*\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)$$

若し $\eta\ge 1$ ならば

$$1-\prod_{m=1}^{m_n}\left|f_{nm}\left(\frac{t}{\eta\Delta_n(\alpha)}\right)\right|^2\le 4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\eta^2\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\widetilde{F}_{n1}*\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)$$

$$\le 4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\widetilde{F}_{n1}*\cdots*\widetilde{F}_{nm_n}(x)$$

$$=4(1-\alpha)=\delta'$$

1) Quasi mean concentration function は河田所員の御注意により以下 Typical と改めます.

故に

$$0<\sigma=1-\delta'=\prod_{m=1}^{m_n}\left|f_{nm}\left(\frac{t}{\eta\Delta_n(\alpha)}\right)\right|^2$$

~~定理 1.1.2 と (2.2.8) より~~

$$\sum_{m=1}^{m_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\eta^2\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\tilde{F}_{nm}(x)\leq K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\eta^2\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\tilde{F}_{n1}*\cdots*\tilde{F}_{nm_n}(x)\leq K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\tilde{F}_{n1}*\cdots*\tilde{F}_{nm_n}(x)$$

$$=K(1-\alpha)=C$$

此処に $C$ は $\alpha$ のみに関係する常数である。他方 $0<\eta<1$ ならば (2.2.9) に於て $\eta=1$ と置いて

$$\frac{C}{\eta^2}\geq\sum_{m=1}^{m_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\eta^2\Delta_n^2(\alpha)+\eta^2x^2}\,d\tilde{F}_{nm}(x)$$

$$\geq\sum_{m=1}^{m_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\eta^2\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\tilde{F}_{nm}(x)$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

系 2.2.1 $\alpha\left(\frac{3}{4}<\alpha\leq 1\right)$ が与へられ $\Delta_n(\alpha)$ を (2.2.8) により定義された函数とする。若し $\frac{1}{2}>\eta>0$ に対し

(2.2.10) $$P_r\{|X_{nm}|\geq\eta\Delta_n(\alpha)\}\to 0,\ (n\to\infty)$$

が $1\leq m\leq m_n$ に対し一様に成立するならば $N$ が存在して $n\geq N$ なるすべての $n$ に対し

(2.2.11) $$\frac{C}{\eta^2}\geq\sum_{m=1}^{m_n}P_r\{|X_{nm}|>\eta\Delta_n(\alpha)\}$$

事実、定理 2.2.2 より

$$\frac{C}{4\eta^2}\geq\sum_{m=1}^{m_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{4\eta^2\Delta_n^2(\alpha)+x^2}\,d\tilde{F}_{nm}(x)$$

$$\geq\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m_n}P_r\{|\tilde{X}_{nm}|\geq 2\eta\Delta_n(\alpha)\}$$

此処に $\tilde{X}_{nm}$ は確率分布 $\tilde{F}_{nm}(x)$ をもつ確率変数である。

$M_{nm}$を$F_{nm}(x)$の median[2] とすれば

$$\frac{C}{2\eta^2} \geq \sum_{m=1}^{m_n} P_r\left\{\left|\frac{X_{nm}-M_{nm}-\bar{X}_{nm}+M_{nm}}{\Delta_n(\alpha)}\right| \geq 2\eta\right\}$$

$$\geq \sum_{m=1}^{m_n} P_r\left\{\frac{X_{nm}-M_{nm}}{\Delta_n(\alpha)} \geq 2\eta \cap \frac{\bar{X}_{nm}-M_{nm}}{\Delta_n(\alpha)} \leq 0\right\}$$

$$+\sum_{m=1}^{m_n} P_r\left\{\frac{X_{nm}-M_{nm}}{\Delta_n(\alpha)} \leq -2\eta \cap \frac{\bar{X}_{nm}-M_{nm}}{\Delta_n(\alpha)} \geq 0\right\}$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m_n} P_r\left\{\left|\frac{X_{nm}}{\Delta_n(\alpha)}\right| \geq 2\eta - \left|\frac{M}{\Delta_n(\alpha)}\right|\right\}$$

此処に$\bar{X}_{nm}$は$X_{nm}$とは互に独立で共に$F_{nm}(x)$を確率分布にもつ確率変数である。$N$が十分大にすれば$n \geq N$なる$n$に対して

$$\eta \geq \left|\frac{M_{nm}}{\Delta_n(\alpha)}\right|$$

が$1 \leq m \leq m_n$に対し一様に成立つから(2.2.11)が成立する。

W. Doeblin[3]の最近の論文で此の系を基礎に置いたものがあるが上記の様にすれば理解し易い。

定理 2.2.2.の$\Delta_n(\alpha)$を$D_n(\alpha)$((2.2.1)で定義した)で置き変へても同様な定理が成立する。

<u>定理 2.2.3</u>　<u>$\frac{7}{8}<\alpha\leq 1$なαに対し</u>

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{C}{\eta^2} \\ C\end{array}\right\} \geq \sum_{m=1}^{m_n}\left(1-\phi_{F_{nm}}(\eta D_n(\alpha))\right) \quad \begin{array}{l}\text{for } 0\leq\eta\leq 1 \\ \text{for } \eta>1\end{array} \quad (n=1,2,\cdots)$$

<u>Cは$\eta$のみに関係する。</u>

---

2) $\frac{1}{2} \leq F_{nm}(M_{nm}+0)$, $F_{nm}(M_{nm}-0) \leq \frac{1}{2}$

3) W. Doeblin, Sur les sommes d'un grand nombres de variables aléatoires independent, Bull. Sci. Math., 63. pp. 23-32, pp. 35-64, 1939. 数物会誌に北川敏男氏の紹介有り.

# 第三章 Mean concentration function (Typical functi と独立確率変数の和の収斂問題

## §3.1. 独立確率変数の和の収斂條件

$\{X_k \mid k=1,2,\cdots\}$ を独立確率変数列とし $F_k(x)$ を $X_k$ の確率分布とする $(k=1,2,\cdots)$

$$\psi_{n N}(h)=\sum_{k=n+1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{h^2+x^2}\,d\tilde{F}_k(x)$$

$$=\sum_{k=n+1}^{N}\left(1-\psi_{\tilde{F}_k}(h)\right)$$

と置けば $\psi_{nN}(h)$ は $N$ と共に増加し $n$ が増加すれば減少する。故に

$$\psi_n(h)=\lim_{N\to\infty}\psi_{n,N}(h)$$

$$\psi(h)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(h)$$

により $\psi(h)$ が定義される。

定理 3.1.1 $\psi(h)$ は恒等的に $0$ か $\infty$ かである。

何となれば正項級数

$$(3.1.1)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{h^2+x^2}\,d\tilde{F}_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\psi_{F_k}(h)\right)$$

は収斂するか発散するかのいづれかである。

(3.1.1) が固定した $h>0$ に対し収斂しているならば (3.1.1) は但の $h'$ ($h'\neq h$, $\infty>h'>0$) に対しても又収斂している。

事実 $h'\geq h$ ならば明か。$h'<h$ の場合に対しては

$$\infty>\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{h^2+x^2}\,d\tilde{F}_k(x)$$

$$=\boxed{\left(\frac{h'}{h}\right)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(h')^2+\left(\frac{h'}{h}x\right)^2}\,d\tilde{F}_k(x)$$

$$\geq\left(\frac{h'}{h}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(h')^2+x^2}\,d\tilde{F}_k(x)$$

従って $\psi(t)\equiv 0$ が出る。同様に或る $t$ に対し (3.1.1) が発散しているならば $\psi(t)\equiv\infty$ なる事が言へる。

<u>定理 3.1.2. $\psi(t)\equiv 0$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}(X_k-a_k)$ が確率収斂をする様な $\{a_k \mid k=1,2,\cdots\}$ が存在し $\psi(t)\equiv\infty$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}(X_k-a_k)$ が確率収斂する様な $\{a_k \mid k=1,2,\cdots\}$ は存在しない。</u>

<u>証明</u> $\psi(t)\equiv 0$ とすれば何んな $\varepsilon>0$ に対しても

$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\psi^{\circ}_{F_k}(\varepsilon))<\infty$ である。定理 1.1.1 より

$$\sum_{k=n+1}^{N}(1-\psi_{F_k}(\varepsilon))\geq\left(1-\psi_{F_{n+1}*\cdots*F_N}(\varepsilon)\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\varepsilon^2+x^2}\,d\tilde{F}_{n+1}*\cdots*\tilde{F}_N(x)$$
$$\geq\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x^2}{\varepsilon^2+x^2}\,d\tilde{F}_{n+1}*\cdots*\tilde{F}_N(x)$$
$$\geq\frac{1}{2}P_r\{|\tilde{S}_{nN}|\geq\varepsilon\}$$

此処に $\tilde{S}_{nN}$ は $\tilde{F}_{n+1}*\cdots*\tilde{F}_N(x)$ を確率分布にもつ確率変数である。$\tilde{S}_{nN}=S_{nN}-\bar{S}_{nN}$ とおいて ($S_{nN}$ と $\bar{S}_{nN}$ は互に独立で確率分布 $F_{n+1}*\cdots*F_N(x)$ をもつ)

$M_{nN}$ を $F_{n+1}*\cdots*F_N(x)$ の median とすれば

$$\tilde{S}_{nN}=S_{nN}-M_{nN}-(\bar{S}_{nN}-M_{nN})$$

なる故

$$P_r\{|\tilde{S}_{nN}|>\varepsilon\}=P_r\{\tilde{S}_{nN}>\varepsilon\}+P_r\{\tilde{S}_{nN}<-\varepsilon\}$$
$$\geq P_r\{S_{nN}-M_{nN}-(\bar{S}_{nN}-M_{nN})>\varepsilon\cap\bar{S}_{nN}-M_{nN}\leq 0\}$$
$$+P_r\{S_{nN}-M_{nN}-(\bar{S}_{nN}-M_{nN}<-\varepsilon\cap\bar{S}_{nN}-M_{nN}\geq 0\}$$
$$\geq\frac{1}{2}P_r\{|S_{nN}-M_{nN}|>\varepsilon\}$$

(3.1.2) と $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\psi_{F_k}(\varepsilon))$ の収斂性より如何なる $\varepsilon>0$ に対しても

$$(3.1.3)\qquad \lim_{n,N\to\infty} P_r\{|S_{nN}-M_{nN}|\geq\varepsilon\}=0$$

此れから普通の方法で $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-a_k)$ が確率收斂する様な $\{a_k \mid k=1,2,\cdots\}$ を取る事が出来る。事実 $\{\varepsilon_k>0 \mid k=1,2,\cdots;\ \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<\infty\}$ と $0<N_1<N_2<\cdots<N_k<\cdots$ を選び $n,N\geq N_k$ ならば $P_r\{|S_{nN}-M_{nN}|\geq\varepsilon_k\}\leq\varepsilon_k$ がいへる様にする。今 $\{a_k \mid k=1,2,\cdots\}$ を次の様に取る

$k\leq N_1$ に対して $a_k=M_k'$

$k=N_i+1$ に対して $a_k=M_{N_i\,N_i+1}$

$N_i+1<k=N_i+N\leq N_{i+1}$ に対しては

$$a_k=M_{N_i\,N_i+N}-M_{N_i\,N_i+N-1}$$

$$(i=1,2,\cdots)$$

（$M_k$ は $F_1+\cdots+F_k(x)$ の median）

すると $N_p<n\leq N_{p+1}$ と $N_q<N\leq N_{q+1}$ $(n<N,\ p\leq q)$ に対し

$$P_r\Big\{\Big|\sum_{k=1}^{N}(x_k-a_k)-\sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)\Big|>\sum_{k=p-1}^{q}\varepsilon_k\Big\}$$

$$\leq P_r\Big\{\Big|\sum_{N_q+1}^{N}(x_k-a_k)+\sum_{N_{q-1}+1}^{N_q}(x_k-a_k)+\cdots+\sum_{n+1}^{N_{p+1}}(x_k-a_k)\Big|$$

$$>\sum_{p-1}^{q}\varepsilon_k\Big\}\leq P_r\Big\{\Big|\sum_{N_q+1}^{N}(x_k-a_k)+\sum_{N_{q-1}+1}^{N_q}(x_k-a_k)+\cdots$$

$$+\sum_{n+1}^{N_{p+1}}(x_k-a_k)\Big|>\sum_{p-1}^{q}\varepsilon_k\Big\}$$

$$\leq P_r\Big\{\Big|\sum_{N_q+1}^{N}\Big|>\varepsilon_q\Big\}+P_r\Big\{\Big|\sum_{N_{q-1}+1}^{N_q}\Big|>\varepsilon_{q-1}\Big\}+\cdots$$

$$+P_r\Big\{\Big|\sum_{n+1}^{N}\Big|>\varepsilon_p+\varepsilon_{p-1}\Big\}$$

$$\leq P_r\{|S_{N_qN}-M_{N_qN}|>\varepsilon_q\}+P_r\{|S_{N_{q-1}N_q}-M_{N_{q-1}N_q}|>$$

$$+\cdots+P_r\{|S_{N_pN_{p+1}}-M_{N_pN_{p+1}}|>\varepsilon_p\}+P_r\{|S_{N_pn}-M_{N_pn}$$

$$\leq\varepsilon_q+\varepsilon_{q-1}+\cdots+\varepsilon_p+\varepsilon_{p-1}$$

$\sum \varepsilon_k < \infty$ より $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - a_k)$ の確率収斂が出来る。
他の場合は $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - a_k)$ が確率収斂する様な $\{a_k \mid k=1,2,\cdots\}$ が存在するならば $\sum(1-\psi_k(1)) < \infty$ である事を言へばよい。
$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - a_k)$ が確率収斂している事より

$$\prod_{k=n}^{N} f_k(t) e^{-ia_k t} \longrightarrow 1, \quad (n, N \to \infty)$$

が如何なる有限区间でも一様に言へる。故に

$$\prod_{k=n}^{N} |f_k(t)|^2 \to 1, \quad (n, N \to \infty)$$

が上と同じ意味で成立する。従って十分大なる $n$ と $N$ に対して $(n, N \geq N_1)$

$$\prod_{k=n+1}^{N} |f_k(t)|^2 \geq \frac{1}{2} \qquad (0 \leq t \leq 2)$$

が成立する。

$$\sum_{n+1}^{N}(1-\psi_{F_k}(1)) \leq K(1-\psi_{F_{n+1} * \cdots * F_N}(1))$$

(Kは常数)

かくして $\psi_{F_{n+1} * \cdots * F_N}(1) \longrightarrow 1, \quad (n, N \to \infty)$

を利用して

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\psi_{F_k}(1)) < \infty$$

が出る。

<u>系 3.1.1 $\{a_k \mid k=1,2,\cdots\}$ が存在して $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - a_k)$ が確率収斂するための必要且十分な條件は</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{1-\psi_{F_k}(1)\} < \infty$$

<u>なる事である。</u>

此れは A. Khintchine の *equivalent series* の方法に対應するものである。

此処で他の收斂條件を述べて置く。P. Lévy[4] や河田氏[5] により与へられた方法である。

$\psi_{F_{n+1}*\cdots*F_N}(h)$ が $N$ が増せば減少し $n$ が増せば共に増加するから

$$\psi_n^*(h) = \lim_{N\to\infty} \psi_{F_{n+1}*\cdots*F_N}(h)$$
$$\psi^*(h) = \lim_{n\to\infty} \psi_n^*(h)$$

が成立して次の定理が云へる。

Theorem 3, 1, 3 $\psi^*(h)$ は恒等的に $0$ か $1$ である。$\psi^*(h) \equiv 1$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - a_k)$ が確率收斂する様な $\{a_k \mid k=1, 2, \cdots\}$ が存在し $\psi^*(h) \equiv 0$ ならばこの性質をもつ $\{a_k \mid k=1, 2, \cdots\}$ は存在しない。

§3, 2. 三級数定理とそれに関聯した問題

最初に次の定理を考へる

定理 3, 2, 1 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - \int_{-1}^{1} x\,dF_k(x)\right)$ が確率收斂し $\int_{-1}^{1} x\,dF_n(x) \to 0 \quad (n\to\infty)$ が成立するための必要且十分な條件は

$$(3, 2, 2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left\{1 - \phi_{F_k}(1)\right\} < \infty$$

なる事である。

---

4) P. Lévy, L'addition des variables aleatoires, Paris, 1937.

5) T. Kawata, The function of the mean concentration function of a chance variable, Duke Math. Journ., 9, 1941.

証明　簡単のため

$$a_k = \int_{-1}^{1} x\, dF_k(x)$$

とおく

必要なる事　系 3.1.1 から

(3.2.3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (1-\psi_{F_k}(1)) < \infty$

一方 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (X_k - a_k)$ の確率収斂する事より

$$f_n(t)\, e^{-it a_n} \to 1, \quad (n\to\infty)$$

が如何なる有限区間でも一様に成立する。又 $a_n \to 0$ なる事より $f_n(t) \to 1 \quad (n\to\infty)$ が上と同じ意味で成立する。

従って $n \geq N_0$ なるすべての $n$ に対し

$$(f_n(t)) \geq \frac{1}{2} \qquad (0 \leqq t \leq 2)$$

故に定理 2.1.1 の (2.1.5) より $n, N \geq N_0 > 0$ に対し

$$\sum_{k=n}^{N} (1-\psi_{F_k}(1)) \geq R \sum_{k=n}^{N} (1-\phi_{F_k}(1))$$

此処に $R$ は常数である。(3.2.3) より (3.2.2) が出る。

<u>十分なる事</u>　定理 2.1.2 より

$$\sum_{k=n}^{N} \left| f_k(t)\, e^{-ia_k t} - 1 \right| \leq (t^2 + 2|t| + 4) \sum_{k=n}^{N} (1-\phi_{F_k}(1))$$

(3.2.2) より

$$\sum_{k=n}^{N} \left| f_k(t)\, e^{-ia_k t} - 1 \right| \to 0 \qquad (n, N\to\infty)$$

がどんな有限区間でも一様に成立する。

$$\log \prod_{k=n}^{N} (f_k(t)\, e^{-ia_k t})$$

$$= \sum_{k=n}^{N} \left\{ (f_k(t)\, e^{-ia_k t} - 1) - \frac{1}{2} (f'_k(t) - 1)^2 + \cdots \right\}$$

より

$$\prod_{k=n}^{N} f'_k(t) \to 1, \qquad (n, N \to \infty)$$

がどんな有限区間でも一様に成立する。此れより

$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - a_k)$ の確率分布としての収斂従って確率収斂が出る。

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

は (3.2.2) より容易に出る。事実任意の $\eta > 0$ に対し

$$\frac{1}{2} P_r\{|X_k| > \eta\} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\eta^2 + x^2}\, dF_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

故に

$$\left|\int_{-1}^{1} x\, dF_k(x)\right| \leqq \int_{1 \geq |x| \geq \eta} |x|\, dF_k(x) + \int_{|x| < \eta} |x|\, dF_k(x)$$

従って $k$ が十分大ならば

$$\left|\int_{-1}^{1} x\, dF_k(x)\right| \leq 2\eta$$

定理 3.2.2 若し $0 < \lambda < 1$ なる $\lambda$ に対し

(3.2.4) $F_n(+0) \geq \lambda > 0, \quad F_n(-0) \leq 1 - \lambda, \quad n = 1, 2, \cdots$

が満足されるならば

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - \int_{-1}^{1} x\, dF_k(x)\right)$$

の確率収斂するための必要且十分な条件は

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \phi_{F_k}(1)) < \infty$$

である。

3.2.1

(3.2.4) があれば $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - \int_{-1}^{1} x\, dF_k(x)\right)$ の確率収斂が

$$\int_{-1}^{1} x\, dF_k(x) \longrightarrow 0, \qquad (k \to \infty)$$

を導き出すことを示せば十分である。

系 3.1.1 よりどんな $\eta$ に対しても

$$\frac{1}{2} P_r\{|\tilde{x}_n| \geq \eta\} \leq \int \frac{x^2}{\eta^2 + x^2}\, d\tilde{F}_n(x) \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty)$$

故に

$$\begin{aligned}
P_r\{|\bar{x}_n| \geq \eta\} &= P_r\{|x_n - \bar{x}_n| \geq \eta\} \\
&= P_r\{(x_n + \bar{x}_n \geq \eta) \cap (\bar{x}_n \leq 0)\} + P_r\{(x_n - \bar{x}_n \leq -\eta) \cap (\bar{x}_n \geq 0)\} \\
&\geq P_r\{(x_n \geq \eta) \cap (\bar{x}_n \leq 0)\} + P_r\{(x_n \leq -\eta) \cap (\bar{x}_n \geq 0)\} \\
&\geq \lambda P_r\{|x_n'| \geq \eta\}
\end{aligned}$$

此処に $\bar{x}_n$ は $x_n$ とは互に独立であるが同じ確率分布をもつ。

系 3.1.1 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - \int_{-1}^{1} x\,dF_k(x))$ が確率収斂しどんな $\eta > 0$ に対しても $P_r\{|x_n| > \eta\} \to 0 \ (n \to \infty)$ が成立するための必要且十分な條件は (3, 2, 2) が成立する事である。

次に Khintchine - Kolmogoroff によれば $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の確率収斂するための必要且十分な條件は次の三級数の同時に収斂する事である。;

(3, 2, 5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_r\{|x_k| > 1\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_{-1}^{1} x^2 dF_k(x) - \left(\int_{-1}^{1} x\,dF_k(x)\right)^2\right\}$$

及び

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} x\,dF_k(x)$$

然し此の事実は吾々の場合には次の様に書ける。

定理 3.2.2 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の確率収斂するために必要且十分な條件は

$$(3, 2, 6) \quad \sum_{k=1}^{\infty}\{1 - \phi_{F_k}(1)\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-1}^{1} x\,dF_k(x)$$

の同時に収斂する事である。

証明 (3, 2, 6) の十分である事は定理 3.2.1 より容易にわかる。
逆に $\sum_{k=1}^{\infty}\{1 - \phi_{F_k}(1)\} < \infty$ なる事は定理 3.2.1 より明らか。
故に $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-1}^{1} x\,dF_k(x)$ の収斂のみを示せばよい。

(244)

定理 2.1.2 より

$$\log \prod_{k=n}^{N} f'_k(t) = \log \prod_{k=n}^{N} f_k(t) - it\left(\sum_{k=n}^{N} \int_{-1}^{1} x\, dF_k(x)\right)$$

$$\rightarrow 0 \quad (n, N \rightarrow \infty)$$

假定より

$$\log \prod_{k=n}^{N} f_k(t) \rightarrow 0, \quad (n, N \rightarrow \infty)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} x\, dF_k(x)$$

の收斂が出る。

又 (3.2.5) と (3.2.6) の同等なる事も直接に容易に出せる。

(つゞく)