均値エルゴード定理ニ就テ

東京文理大　河田敬義

（11月16日受付）

S. M. Ulam & J. Neumann ハ Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), Abstract デ、"Random ergodic theorem" ト題シテ、次ノ結果ヲ述ベテイル。

今集合 Ω ニ測度 m ($m(\Omega)=1$ トスル) ガ定義サレテイテ、ソコデニツノ保測変換 T_0, T_1 ガ与ヘラレテイルトスル。別ニ [0. 1] ノ二進法展開

$$(1)\qquad \xi = \cdot\xi_1\,\xi_2 \cdots\cdots \xi_n \cdots\cdots,\qquad \xi\in[0,1]\quad(\xi_i = 1 \text{ 又ハ } 0)$$

ノ集合ヲ考エル。ソノトキ

定理 1°　『任意ノ Ω ノ上デ定義サレタ実可積分函数 $f(\omega)$ ヲ定メルト、殆ンドスベテノ $\xi\in[0,1]$ ニ対シテ、実可積分函数 $F_\xi(\omega)$ ガ定マリ

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big\{f(T_{\xi_1}\omega)+f(T_{\xi_2}T_{\xi_1}\omega)+\cdots\cdots+ f(T_{\xi_n}T_{\xi_{n-1}}\cdots\cdots T_{\xi_1}\omega)\Big\}=F(\omega)$$

ガ、Ω 上殆ンドスベテノ ω ニ対シテ成立ツ』

定理 2°　『若シモ保測変換 T_0, T_1 ノ両者ニ共通ナ不変集合 E；

$$T_0E = T_1E = E,\quad (E\subseteq\Omega)$$

ガアルト、

$$m(E) = 1 \text{ 又ハ } 0$$

(κ07)

デアルナラバ(2)ニオイテ

(3) 下$\xi(\omega) = const = c$

トナル。シカモソノ値ハ

(4)
$$c = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, m(d\omega)$$

ニヨツテ与エラレル。」

更ニコノ結果ハモツト一般ノバアイニ拡張サレルコトヲ述ベテイルガ、ソノ詳シイ条件ヤ又上記定理ノ証明ハ全ク述ベテイナイ。以下ニコレヲ組立テテ見ヨウ。

§1.

初メニ必要ナ定義ヲ与ヘル。

(I) 測度空間$(\Omega, \mathbb{B}, m)$ニヨツテ、集合Ωト、Ωノ部分集合ノ作ルBorel集合族$\mathbb{B}$ト、$\mathbb{B}$ノ上デ定義サレテ、特ニ$m(\Omega) = 1$トナル測度mトヲ同時ニ考エル。

(II) 別ノ測度空間$(\Lambda, \mathbb{B}', \mu')$ニオイテ各$\lambda \in \Lambda$ニ対シテ、ソレヲパラメータートシテ

(5) $T_\lambda, \ (\lambda \in \Lambda)$

ガ(I)ノ測度空間ニオケル保測変換ヲ与エルモノトスル。

(III) (5)ノ$\{T_\lambda ; \lambda \in \Omega, \lambda \in \Lambda\}$ガ可測系デルトハ直積集合

(6) $\Omega' = \Omega \otimes \Lambda = \{(\omega, \lambda) ; \omega \in \Omega, \lambda \in \Lambda\}$

ニ於ケル直積測度

(7) $\mu'' = m \times \mu'$

ヲ考エルトキ、任意ノ$A \in \mathbb{B}$ニ対シテ、Ω'ノ部分集合

(8) $\{(\omega, \lambda) ; T_\lambda^{-1} \omega \in A\}$

ガ、μ'ー可測集合トナルコトヲ云フ。

(IV). $\{T_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ ガエルゴード系デアルトハ、

$A\in\mathbb{B}$ ニ対シテ

(9) $\mu'(A\otimes\Lambda)\ominus\{(T_\lambda, \omega, \lambda);\ \omega\in A,\ \lambda\in\Lambda\})=0$

ナラバ

$m(A)=1$ 又ハ 0

トナルコトヲ云フ。コゝニ一般ニ

$A\ominus B=(A\cup B)-(A\frown B)$

ヲアラワス。

コレラノ例ニツイテハ §3 デ述ベル。

定理1°, 2° ノバアイハ

$\Lambda=(0, 1)$

ト Λ ガ二元ヨリナル場合デアリ、(9) ノ条件ハ定理2° ノ条件ト合致スル。

定理3° ハ次ノ言ウニ拡張サレル。

今測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ ノ上ノ保測変換 $\{T_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ ガ可測系デアルトスル。別ニ(III)ノ測度空間ト同型ナ測度空間 Λ_n ノ:

(10) $(\Lambda_n, \mathbb{B}_n, \mu_n)\cong(\Lambda, \mathbb{B}, \mu')$
$(n=0, \pm 1, \pm 2)$

ノ無限直積空間

(11) $(\Xi, \mathbb{B}_\infty, \mu)$: $\Xi=\prod_{-\infty}^{\infty}\otimes\Lambda_n,\ \mu=\prod_{-\infty}^{\infty}\mu_n$

ヲ考エル。Ξ ノ元素 ξ ハ

(12) $\xi=(\text{------}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \text{------}, \xi_n, \text{------}),$
$\xi_n\in\Lambda_n$

ドアラワサレル。コノトキ n 番目ノ成分

(13) $\xi_n=(\xi)_n \quad \xi\in\Xi$

デアラワス。

定理 1. 「上記条件ノ下ニ、任意ノ Ω ノ上ノ実可

(403)

積分函数 $f(\omega)$ ヲ与ヘルト、殆ンドスベテノ $\xi\in\Xi^*$ ニ対シテ 実可積分函数 $F_\xi(\omega)$ ガ定マリ

(14)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f(T_{\xi_1}\omega)+f(T_{\xi_2}T_{\xi_1}\omega)+\cdots\cdots+f(T_{\xi_n}T_{\xi_{n-1}}\cdots\cdots T_{\xi_1}\omega)\right\}=F_\xi(\omega)$$

ガ殆ンドスベテノ $\omega\in\Omega$ ニ対シテ成立ツ。□

（証明）

(イ) 初メニ Ω ト Ξ トノ直積集合

(15) $$\Omega^*=\Omega\otimes\Xi=\Omega\otimes\Pi_{-\infty}^{\infty}\otimes\Lambda_n$$

ヲ考ヘ、直積測度ヲ

(16) $$m^*=m\times\mu=m\times\Pi_{-\infty}^{\infty}\mu_n$$

トアラハス。又 Ξ 上ノ保測変換 S ヲ、ソノ成分(13)ニヨリ

(17) $$(S\xi)_n=(\xi)_{n+1}\quad(n=0,\pm1,\cdots\cdots)\quad\xi\in\Xi$$

ニヨリ定義スル。即チ(12)ニ於テ、成分ヲ一ツヅツ左ヘズラシタモノトスル。

コノ Ξ 上ノ保測変換 S ト可測系 $T_\lambda;\ \lambda\in\Lambda$ トヲ合セテ

(18) $$\begin{cases}\omega^*=(\omega,\xi);\ \omega\in\Omega,\ \xi\in\Xi\ \text{ニ対シテ}\\ T^*\omega^*=(T_{\xi_1}\omega,S\xi);\ \omega^*\in\Xi^*\end{cases}$$

ト定義スレバ

T^* ハ Ω^* ヲ Ω^* 全体ニ一対一ニ写像スル。

即チ

(19) $$T^*(\omega,\xi)=(\bar{\omega},\bar{\xi})$$

ナラシメルタメニハ

(20) $$\xi=S^{-1}\bar{\xi},\quad \omega=T_{\xi_1}^{-1}\bar{\omega}=T^{-1}_{(\bar{\xi})_0}\bar{\omega}$$

トオケバヨイカラデアル。

(ロ) T^*ハ Ω^* 上 可測且ツ保測変換デアルコトヲ証明スル。初メニ Ω^*ノ elementary set E^*:

$$(2.1)\quad \begin{cases} E^* = A \otimes \left(\prod \otimes \Lambda_n \right) \otimes \left(\prod_{j=1}^{k} \otimes M_j \right), \\ A \in \mathbb{B}, \quad M_j \in \mathbb{B}_{n_j};\ j = 1, \cdots\cdots, k \end{cases}$$

ニ対シテ考エル。今 $n_1 = 1$ トスレバ

$$(22)\quad \begin{cases} T^* E^* = A^* \otimes \left(\prod_{n \neq n_1, \cdots\cdots n_k} \otimes \Lambda_{n-1} \right) \\ \otimes \left(\prod_{j=2}^{k} \otimes M_j \right), \\ M_j \subseteq \mathbb{B};\ j = 2, \cdots\cdots, k \\ A^* = \{ (\omega, \lambda);\ T\omega \in A,\ \lambda \in M_1 \} \\ \subseteq \Omega \otimes \Lambda. \end{cases}$$

故ニ S^0 ガ保測変換デアルコト、(8) ニヨリ、$T^* E^*$ ガ m^* 可測ナルコトガワカル。Ω^*上 m^*可測集合ノ集リ $\mathbb{B}^*$ ハ E^*ヲ含ム最小ノ Borel 集合族トシテ定メラレルカラ、ソシテ $\mathbb{B}^{0*}$ ハ E^*ノ作ル集合体ヲ含ム正規集合族トシテ特徴ツケラレルカラ、(Sacks 参照)

一般ニ $\mathbb{B}^*$ ニ属スル B^* ニ対シテモ、$T^* B^* \in \mathbb{B}^*$ トナルコトガ証明サレル。

次ニ T^* ガ保測変換デアルコトモ、全ク同様ニ elementary set E^* ニ対シテ

$$m^*(E^*) = m^*(T^* E^*)$$

トナルコトサヘ見レバ十分デアル。(21) ニ

(4の5)

対シテ

$$m^*(E^*) = m(A) \times \prod_1^k \mu(M_j),$$

デアリ、他方 T^*E^* ニ対シテハ Fubini ノ定理ヲ用フレバ

$$m^*(T^*E^*) = \prod_2^k \mu(M_j) \quad (m \times \mu)(A^*)$$

$$= \prod_2^k \mu(M_j) \cdot \int_{M_1} m(T\lambda A)$$

$$\mu_1(d\lambda) = \prod_2^k \mu(M_j) \cdot m(A)\mu_1(M_1)$$

$$= m^*(E^*)$$

トナルカラデアル。

四 T^* ガ Ω^* 上ノ保測変換デアルカラ
$f^*(\omega^*) = f(\omega)$ トオケバ、f^* ハ Ω^* 上 m^*
可積分函数デアルカラ

G. D. Birkhoff ノ個別エルゴード定理ニヨッテアル m^* 可積分函数 $F(\omega^*)$ ニ対シテ

(23)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^*(T^{*i}\omega^*) = F(\omega^*)$$

ガ Ω^* ノ殆ンドスベテノ ω^* ニ対シテ存在スル。従ッテ Fubini ノ定理ニヨリ殆ンドスベテノ $\xi \in \Xi$ ニ対シテ

(14)
$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^*(T^{*i}\omega^*) = F_\xi(\omega)$$

ガ殆ンドスベテノ $F_\xi(\omega)$ ニ対シテ存在スル。一方 $F(\omega^*)$ ハ m^* 可積分デアルカラ $F_\xi(\omega)$ ハ殆ンドスベテノ $\xi \in \Xi$ ニ対シテ、又 m 可積分トナル。コレラ組合セテ (14) ガ殆ンドスベテノ $\xi \in \Xi$ ニ対シテ、可積分函数 $F_\xi(\omega)$ ニ対シテ、殆ンドスベテノ $\omega \in \Omega$ ニ対シテ成立ツコトガワカッタ。

§2.

定理2°ノ拡張トシテ

定理 2 「定理1ニオイテ $\{T_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ ガエルゴード系デアレバ

(24) $$F_\xi(\omega) = const.\ C = \int_\Omega f(\omega)\, m(d\omega)$$

トナル」

（証明）(イ) 定理1ノ説明ニオイテ T^* ガエルゴードデアルコト、即チ

(25) $T^* E_0^* = E_0^*$ $E_0^* \subseteq \Omega^*$

ナラバ

(26) $m^*(E^*_0) = 1$ 又ハ 0

トナルコトヲ証明スレバ、Birkhoff ノ定理ニヨリ

(27) $$Ef^*(\omega^*) = \int_{\Omega^*} f^*(\omega^*)\, m^*(d\omega^*) = \int_\Omega f(\omega)\, m(d\omega)$$

ガ成立ツ。

(ロ)

$E_0^* \in B^*$ ハ、任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ

(28) $m(E_0^* \ominus E^*) < \varepsilon$

ヲ満足スル cylinder set E^*, シカモ (21) ノ element-ary set ノ有限和集合 ガ存在スル。

cylinder set E^* ハ、ソノ charateristic function f^*

(29) $E^* = \{\omega^* ; f^*(\omega^*) = 1\}$; $(f^*(\omega^*) = 1$, 又ハ 0)

ガ有限個ノ成分ニシカ関係シナイコト

(30) $f^*(\omega^*) = f^*(\omega, \xi_{-m}, \xi_{-m+1}, ---, \xi_0, \xi_1, ---, \xi_m)$

ニヨッテ特徴ヅケラレル。

サテ (28) ニ T^n, 又ハ T^{*-n} ヲ施スト (21) ニヨリ

(29) $m^*(E_1^* \ominus E_2^*) < 2\varepsilon$,

$m^*(E_0^* \ominus T^{*-n} E^*) < \varepsilon$,

ヲ満足スル、故ニ又

(4[illegible])

(30) $m^*(E_1^* \ominus E_2^*) < 2\varepsilon$,（但シ、$E_1^* = T^{*m}E^*$,
$E_2^* = T^{*-m}E^*$）

及ビ

(31) $m^*(E_0^* \ominus (E_1^* \cap E_2^*)) < 3\varepsilon$

トナルコトガワカル。

我々ノ目標トシテ以上ノコトカラ

(32) $E_0^* = A \times \Xi, {}_0 A \subseteq \Omega$

トナルコトヲ導クコトガデキレバ

エルゴート系ノ定義ニヨリ、(25)カラ

(33) $m(A) = 1$ 叉ハ、従ッテ $m^*(E_0^*) = 1$ 叉ハ 0

トナッテ、証明ガ完了スルノデアルカラ。

(32)トナルコトヲ証明シサエスレバヨイ。

$\boxed{\text{(ハ)}}$ T^*E^* ノ char. function ヲ f_{+1}^* トスレバ

(34) $f_{+1}^*(w^*) = f^*(T^{*-1}w^*)$

デアル。故ニ(17), (28), (30)ニヨッテ

f_{+1}^* ハ w, ξ_0 ノ他ニ、$\xi_{-m}, \dots, \xi_{m}$ ノ番号ノズレタモノニノミ関係スル

$f_{+1}^*(w^*) = f_{+1}^*(w, \xi_0, \xi_{-m-1}, \dots, \xi_{m},$
$\xi_{m-1})$

トナル。同様ニ

$E_1^* = T^{*m}E^*$ ノ char. function f_m^* ハ

(35) $f_m^*(w^*) = f^*(T^{*-m}w^*)$

$= f_m^*(w, \xi_0, \xi_{-1}, \xi_{-2}, \dots, \xi_{-2m})$

トナルコトガワカル。

他方 $T^{*-1}E^*$ ノ char. function f_{-1}^* ハ(18)ニヨリ
w, ξ_1 ノ他ニ $\xi_{-m}, \dots, \xi_m$ ノ番号ガ逆ノ方向ニズレタモノニノミ関係スル。

$f_{-1}^*(w^*) = f^*(T^*w^*) = f_{-1}^*(w, \xi_1, \xi_{-m+1}, \dots,$
$\xi_{m+1})$.

故ニ又 $E_2^* = T^{*-m}E^*$ ノ char. function f_{-m}^* ハ

$$(36)\quad f^{*}{}_{-m}(w^{*}) = f^{*}(T^{*}E^{*}) = f_{-m}^{*}(w, \xi_1, \xi_2 \text{-----}, \xi_{2m})$$

トナルコトガワカル。

$\boxed{(二)}$ 今無限直積集合 Ξ ヲニツノ成分ニ分ケテ

$$(37)\quad \begin{cases} \Xi_1 = \Pi_1^{\infty} \otimes \Lambda_n, & \Xi_2 = \Pi_{-\infty}^{0} \otimes \Lambda_n, \\ \mu^{(1)} = \Pi_1^{\infty} \mu_n, & \mu^{(2)} = \Pi_{-\infty}^{0} \mu_n; \\ \Xi = \Xi_1 \otimes \Xi_2, & \mu = \mu^{(1)} \times \mu^{(2)} \end{cases}$$

トスル。コレトΩトノ直積ヲ考エテ

$$(38)\quad \begin{cases} \Omega_1^{*} = \Omega \times \Xi_1, & \Omega_2^{*} = \Omega \times \Xi_2 \\ m_1^{*} = m \times \mu^{(1)}, & m_2^{*} = m \times \mu^{(2)} \end{cases}$$

トオク。今 Ω_i^{*} ノ上ノ L^2-function ヲ Ξ_i ノ上ノ orthogonal basis

$$(39)\quad \varphi_0^{(i)}(\xi^{(i)}) = 1,\ \varphi_1^{(i)}(\xi^{(i)}),\ \varphi_2^{(i)}(\xi^{(i)}), \text{———} \quad (i = 1, 2)$$

ニヨリ展開スルト、ソノ係数ハ w ノ函数トナル。コレヲ $f_{\pm m}^{*}(w^{*})$ ニ適用スレバ

$$(40)\quad \begin{cases} f_{-m}^{*}(w^{*}) = f_{-m}^{*}(w_1^{*}) = g_0(w) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(w) \\ \varphi_n^{(1)}(\xi^{(1)}), \\ f_m^{*}(w^{*}) = f_m^{*}(w_2^{*}) = h_0(w) + \sum_{n=1}^{\infty} h_m \\ (w)\varphi_n^{(2)}(\xi^{(2)}). \end{cases}$$

ト展開サレル。コヽデ(ロ)ヲト*式考エレバ、Ξ_2上ノ orthog basis ノ性質ニヨリ

$$(41)\quad \begin{cases} \int_{\Xi} f_{-m}^{*}(w^{*})\,\mu(d\xi) = \int_{\Xi_1} f_{-m}^{*}(w_1^{*})\,\mu^{(1)}(d\xi^{(1)}) \\ = g_0(w), \end{cases}$$

(409)

$$\int_{\Xi} f_m^{*}(w^{*})\,\mu(d\xi) = \int_{\Xi_2} f_m^{*}(w_2^{*})\,\mu^{(2)}(d\xi^{(2)}) = h_0(w)$$

トナル。又 product space $\Xi = \Xi_1 \otimes \Xi_2$ ニ関シテ

$$\int_{\Xi} \varphi_k^{(1)}(\xi)\,\varphi_j^{(2)}(\xi)\,\mu(d\xi) = \int_{\Xi_1} \varphi_k^{(1)}(\xi^{(1)})\,\mu^{(1)}(d\xi^{(1)}) \times \int_{\Xi_2} \varphi_j^{(2)}(\xi^{(2)})\,\mu^{(2)}(d\xi^{(2)})$$

$$\begin{cases} = 0 & (j \neq 0 \text{ 又ハ } k \neq 0) \\ = 1 & (j = k = 0) \end{cases}$$

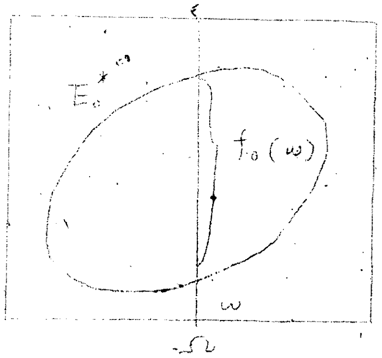
デアルカラ

$$\int_{\Xi} f_m^{*}(w^{*})\,\varphi_m^{*}(w^{*})\,\mu(d\xi) = g_0(w)\,h_0(w)$$

トナル。

(ホ) 又 E_0^{*} ノ char function ヲ $C_{E_0^{*}}(w^{*})$ ト

スレバ　スレバ



$$f_0(w) = \int_{\Xi} C_{E_0^{*}}(w^{*})\,\mu(d\xi)$$

ハ $w = \text{const}$ ニヨル截口ノ μ 測度デアル。

(41), (42) ハ夫々 E_1^{*}, E_2^{*}, $E_1^{*} \wedge E_2^{*}$, $w = \text{const}$ ニヨル截口ノ μ 測度ニホカナラナイ。

(31), (29) ニヨレバ、

(A.FO)

$$\int_\Omega |f_0(w) - g_0(w)| m(dw) \leqq m^*(E_0^* \ominus E_1^*),$$

$$\int_\Omega |f_0(w) - h_0(w)| m(dw) \leqq m^*(E_0^* \ominus E_2^*) <$$

$$\int_\Omega |f_0(w) - g_0(w) h_0(w)| m(dw) \leqq m^*$$
$$(E_0^* \ominus (E_1^* \cap E_2^*)) < 3\varepsilon$$

トナル。今

(44) $r_0(w) = f_0(w) - g_0(w),\ q_0(w) = f_0($
$- h_0(w)$

トオケバ (43)ノ上ノ三式ヨリ

(45) $\int_\Omega |r_0(w)| m(dw) < \varepsilon,\ \int_\Omega |q_0(w)| m(d$
$< \varepsilon$

デアル。一方 f_0, g_0, h_0 ハ数ロノ[illegible]測度アルカラ、ソノ値ハ [0 1] ニ属スル。故ニ
$|r_0(w)|,\ |q_0(w)| \leqq 1$
デモアル。

十例！

コレカラ（＊）！

$$\begin{cases} f_0 - g_0 h_0 = f_0 - (f_0 - r_0)(f_0 - q_0) = (f_0 - f_0^2) + f_0(r_0 + q_0) - r_0 q_0 \\ \int_{\Omega} | f_0 - g_0 h_0 - g_0 h_0 | m(d\omega) < 3\varepsilon \end{cases}$$

トニヨリ

$$\int_{\Omega} | f_0(\omega) - f_0^2(\omega) | m(d\omega) \leq \int_{\Omega} | f_0 - g_0 h_0 | m(d\omega) + \int_{\Omega} | (r_0 + q_0) | m(d\omega) + \int_{\Omega} | r_0 q_0 | m(d\omega).$$

$$\leq 3\varepsilon + \int_{\Omega} | r_0 | + | q_0 | m(d\omega) + \int_{\Omega} | r_0 | m(d\omega) \underset{\leq 5\varepsilon}{.}$$

トナル。εハ予メ与ヘタ任意ノ正数デアッタ。故ニ

$$\int_{\Omega} | f_0(\omega) - f_0^2(\omega) | m(d\omega) = 0.$$

即チ、$f_0(\omega) = f_0^2(\omega)$ ガ殆ンドスベテノ ω ニ対シテ成立タナクテハナラナイ。

即チ $f_0(\omega) = 1$ 叉ハ 0 ガ殆ンドスベテノ ω ニ対シテ成立ツ。

故ニ $A = \{\omega ; f_0(\omega) = 1\}$ トスレバ、求メル(32)ガ証明サレタ。

（ロ）ノ証明ハ略ス。（角谷静夫氏ヨリ教ヘテ貰イマシタ）

系 （ロ）エルゴード系デナイ一般ノ $\{T_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ ニ対シテ、Ω^* ノ保測変換 T^*_λ ノ不変集合 E_0^* ハ

（ロ'） $E_0^* = A \times \Omega'$ $(A \subseteq \Omega)$；$T_\lambda A = A$ ガ殆ンドスベテノ $\lambda \in \Lambda$ ニツキ

ト表サレル。一般ニ T^* ノ不変函数 $f^*(\omega^*)$;

(47) $$f^*(T^*\omega^*) \doteqdot f^*(\omega^*)$$

ハ必ズ

(48) $$f^*(\omega^*) = f^*(\omega),$$
$$f^*(T_\lambda \omega) \doteqdot f^*(\omega) \quad (殆ンドスベテノ\ \lambda \in \Lambda\ ニ対シテ)$$

コノ系ニヨリ一般ノ T^* ノ proper value ヲモトメルコトガデキル。

定理3 (18) ニヨッテ定義サレタ Ω^* ノ上ノ保測変換 T^* ノ固有値 α ニ対スル固有函数 $f^*_\alpha(\omega^*)$ ハ

(49) $$\begin{cases} f^*_\alpha(\omega^*) \doteqdot f_\alpha(\omega), \\ f_\alpha(T_\lambda \omega) \doteqdot e^{2\pi i\alpha} f_\alpha(\omega), \quad (殆ンドスベテノ\ \lambda \in \Lambda\ ニ対シテ) \end{cases}$$

ト表サレル。又 (49) ナラバ $f^*_\alpha(\omega^*)$ ハ

(50) $$f^*_\alpha(T^*\omega^*) \doteqdot e^{2\pi i\alpha} f^*_\alpha(\omega^*)$$

ヲ満足スル。」

(証明) 今

(51) $$I = [0, 1)$$

ナル半開,半開区間トシテソコデノ保測変換

(52) $$T^0_\alpha \beta \equiv \alpha + \beta \pmod 1, \quad \beta \in I$$

ヲ考エル。

コレカラ直積空間

(53) $$\Omega^{*0} = \Omega^* \otimes I ; \quad \Omega^{*0} \ni \omega^{*0} = (\omega^*, \beta), \quad \omega^* \in \Omega^*, \beta \in I$$

ノ上ノ直積保測変換

(54) $$T^{*0}_\alpha(\omega^*, \beta) = (T^*\omega^*, T^0_\alpha \beta)$$

ヲ定義スル。若モアル函数 f^*_α ガ (50) ヲ満足スルナラ…

(1.13)

(5.4') $f^{*0}_\alpha(w^{*0}) = f^{*}_\alpha(w^{*}) \times e^{2\pi i\beta}$

ハ

(5.5') $T^{*0}_{-\alpha}(f^{*0}_\alpha(w^{*0},)) \doteqdot f^{*0}_\alpha(w^{*0})$

ヲ満足スル。逆ニ (5.5') トナル $f^{*0}_\alpha(w^{*0})$ ガアツタナラバ

(5.6) $f^{*}_\alpha(w^{*}) = \int_0^1 e^{-2\pi i\beta} f^{*0}_\alpha(w^{*}, \beta)\, d\beta$

トオケバ

$$f^{*}_\alpha(T^{**}w) = \int_0^1 e^{-2\pi i\beta} f^{*0}_\alpha(T^{**}w, \beta-\alpha)\, d(\beta-\alpha)$$

$$= e^{2\pi i\alpha}\int_0^1 e^{-2\pi\beta} f^{*0}(w^{*}, \beta)\, d\beta .$$

$$= e^{2\pi i\alpha} f^{*}$$

トナリ、(5.0) ヲ満足スル。故ニ問題ハ Ω^{*0} 上ノ $T^{*0}_{-\alpha}$ ニ関スル不変函数ノ問題ニ帰着スル。

一方 (5.3), (5.4) ト同様ニ

(5.7) $\Omega^{0} = (\Omega, \Theta)$; $T^{0}_\alpha(w, \beta) = (T_\alpha w, T_{-\alpha}\beta)$

トオイテ

(5.8) $\Omega^{0*} = \Omega^{*0}$ 上, $T^{*0}_{\alpha} = (T^{0}_\alpha(w,\beta), S\xi)$.

ツクレバ、丁度 (5.3), (5.4) ト同一ノモノガ得ラレタコトニナル。

故ニ (5.0) ナル f^{*}_α ガ存在シタナラ (5.4') ヨリ (5.5') ナル f^{*0}_α ガ存在スル。

コレノ物ト同次結系ニヨッテ

$$\begin{cases} f^{*0}_\alpha(w^{*0}) = f^{0}_\alpha(w, \beta), \\ f^{0}_\alpha(T^{0}_\alpha(w, \beta)) \doteqdot f^{0}_\alpha(w, \beta) \end{cases}$$

(mod ノドコーテ [illegible])

ト表サレル。故ニ(56)ト同ジク

(60) $$f_\alpha(w) = \int_0^1 e^{-2\pi i\beta} f_\alpha^0(w,\beta)\,d\beta$$

トオケバ

$$f_\alpha(T_\lambda w) = e^{2\pi i\lambda} f_\alpha(w)$$ （殆ンドスベテノ $\lambda \in A$）

トナル。(5[illegible]) ト (60) ト合セテ

$$f^*(w^*) = f_\alpha(w)$$

デアルコトガ證明サレル。

コノ定理ノ応用トシテ

[illegible] 「T^* ノ固有函数ガ Const 以外ニ存在シナイタメノ必要十分條件ハ

(61) $f_\alpha(T_\lambda w) = e^{[illegible]} f_\alpha(w)$

ガ殆ンドスベテノ [illegible] ニ対シテ [illegible] ナラバ

$\alpha = 0$, $f_\alpha(w) = \text{const}$

ニ限ルコトデアル」

コノ系ハ [illegible] ノ [illegible] トナルナホシテイル。タトヘバ Fubini ノ定理ニヨッテ

定理 4 「(61) [illegible] ドナルノ [illegible] アレバ一限ル

ナラバ殆ンドスベテノ [illegible] ニ対シテ [illegible] density 1 ノ自然数列 $\{k_n\}$ [illegible]

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum [illegible] = 1$$

ガ [illegible] 任意ノ A, B [illegible] ニ対シテ

(63) $\lim_{m\to\infty} m [illegible] T [illegible] (A)\, m [illegible]$

又ハ [illegible]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|m(A\cap T_{\xi_n}T_{\xi_{n-1}}\cdots T_{\xi_1}B)-m(A)m(B)\right|^2=0$$

又ハ（コレト同値ナコト）（Ⅲ'）$f(w)\in L^1(\Omega)$ ニ対シテ

(Ⅲ')
$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(T_{\xi_k}T_{\xi_{k-1}}\cdots T_{\xi_1}w)\times e^{2\pi ik\alpha}\\ =\begin{cases}c, & \alpha\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1)\\ 0, & \alpha\not\equiv 0\end{cases}\\ c=\int_\Omega f(w)m(dw)\end{array}\right.$$

ガ成立ツ。

特ニ

系 「μ－測度ノ正ナル λ ニ対シテ T_λ ガ Ω ノ上ノ広義保測変換ナラバ定理Ⅰノ條件ハ成立ツ」

§3.

以上ノ結果ノ応用例ヲ先ヅ挙ゲヨウ。

例1

$\Lambda=(0,1)$，T_0，T_1 トニツノ保測変換ヲ考ヘルトキハ，初メニ挙ゲタバアイデアル。定理Ⅰ'，Ⅱ' ハ夫々定理1，2ノ特別ナバアイデアル。

例2

$\Lambda=(1,2,\cdots,k)$，$\mu(i)=p_i>0$，$\sum p_i=1$ トスルトキ，T_i $(i=1,\cdots,k)$ ガ保測変換ナラバ可測系ノ場合ハ常ニ成立ツ。

T^* ガ [illegible] ナ条件トシテ

クモ一ツノ T_i ガエルゴード的ナレバヨイ。
T^*ガ広義混合型トナル十分条件ハ、少クモ
一ツノ T_i ガ広義混合型デアレバヨイ。

例 3 例1デ $T_0 = I$（恒等置換）, T_1 ニトルトキ
ハ、T ガエルゴード的ナラ広義混合型デアル。
従ッテ T^* ガエルゴード的ナラ広義混合型トナ
ル。

今 $\xi = (\cdots, \overset{(1)}{0}, 0, \cdots 0, 1, 0, \cdots 0, 1, 0, \cdots 0, 1, \cdots)$
トナルトキハ

$$\begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_{\xi_k}T_{\xi_{k-1}}\cdots T_{\xi_1}\omega) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{r} n_j f(T^j\omega), \\ N = \sum_{j=0}^{r} n_j \end{cases}$$

トナル。ココデ

$$p(0) = p, \quad p(1) = q = 1-p$$

トスレバ

$$n = (n_0, n_1, n_2, \cdots)$$

ナル確率変数デ

$$p(n_j) = q p^{j-1} \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

ナル分布ヲトルモノヲ[illegible]ヲ係数トスル
列ヲ考エタコトニナル。ヨッテコノバアイハ既
ニ知ラレタアイデアデアル。

例 4 （角谷氏ノ与エタモノ）

$\Omega = (\omega_1, \omega_2)$, $m(\omega_1) = m(\omega_2) = \frac{1}{2}$

$T_0 = I$（恒等置換） $T_1\omega_1 = \omega_2$, $T_1\omega_2 = \omega_1$

トスル。

$T_1^2 = I$ デアル。

$\xi = (\cdots, \overset{(1)}{0}, 1, 0, 0, \cdots)$ ニ対シテ

$\frac{1}{n}\sum f(T_{\xi_n}T_{\xi_{n-1}}\cdots T_{\xi_1}\omega)$ … ω_1 char function

デアルトキ

(4.17)

$$\begin{cases} T_{\xi_1}\omega_1 = \omega_1,\ T_{\xi_2}T_{\xi_1}\omega_1 = \omega_2,\ T_{\xi_3}T_{\xi_2}T_{\xi_1}\omega_1 = \omega_2, \\ \cdots\cdots \\ T_{\xi_1}\omega_2 = \omega_2,\ T_{\xi_2}T_{\xi_1}\omega_2 = \omega_1,\ T_{\xi_3}T_{\xi_2}T_{\xi_1}\omega_2 = \omega_1 \cdots\cdots \end{cases}$$

トナリ、定理1ハ $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$ トシタ二進法展開中ノ 0, 1 ノ頻度ガ $\frac{1}{2}$ ニ極限ヲモツトイフコトヲ主張スル。

中野秀五郎氏ノ例2ノバアイニ、定理1ノ殆ンドスベテノ ξ ガスベテノ ξ ニモッテオキカエラレハシナイカトイフ問題ハ、角谷氏ノ例ニヨツテ反例ガ与ヘラレタコトニナル。

例5 $\Delta = (0, \infty)$ デアル、μ 測度ガ与ヘラレテ

$$T_\lambda T_\mu = T_{\lambda+\mu} \quad (\lambda, \mu \geqq 0)$$

デアルトキ、今之レガ [illegible] 測系デアル。

定理5 「定理2ノ條件ガ満足サレルタメノ十分條件トシテ

(i) T_ξ ハエルゴード [illegible] 絶對連續ナル [illegible] ルベーグ測度ニ関シテ [illegible] 注意ノトキ。

(ii) T_ξ ガ広義混合型、「ノ條件ガ満足サレル」

若シモ(ii)デアレバ定理3ノ條件ガ満足サレル。全國紙上談話会 ——— 三)

(證明) 角谷氏ノ結果(全國紙上談話会 [illegible]) T_1 ガエルゴード的ナラ、高々可附番ニヨレバ T_1 ガエルゴード的ナラ [illegible] スベテエルゴード的ニ、T_λ ヲ除イテ他ノ T_λ ハスベテエルゴード的ナラバ、スベテ [illegible] ヲ、又 T_ξ ガ広義混合型デアルナラバ、スベテノ λ ニ對シテ T_λ モ広義混合型トナル。コレヲアテハメレバヨイ。

以上ノ諸定理ハ種々ノ応用範囲モ広イテアロウト広ク [illegible] 定理ソノモノノ [illegible] 價値ヲ認メテモヨイ [illegible]