

$k \times l$ 表 "Exact Treatment"

佐藤良一郎

1. 序言

$k \times l$ 表即ち、次のヤウな度数分布表 = χ^2 = コル検定法ヲ適用シタ時 = 得ル結果ハ近似的ノモ、デアルガラ、結果ノ疑ハシイ場合 = ハ、正確ナ検定法ガ必要トサレル。トコロガ、 $k=2$, $l=2$ ール場合 = 対スル正確ナ取扱法ガ知ラレテキルダケデ、 $k=l$ ノ一般値 = 対スルオ法ハマダ知ラレテキナイヤウデアマル。ソコデ下 = ソノ方法ヲ述ベヤウト思フ。

| | Y_1 | Y_2 | --- | Y_l | 計 |
|-------|----------|----------|-----|----------|----------|
| X_1 | n_{11} | n_{12} | --- | n_{1l} | $n_{1.}$ |
| X_2 | n_{21} | n_{22} | --- | n_{2l} | $n_{2.}$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X_k | n_{k1} | n_{k2} | --- | n_{kl} | $n_{k.}$ |
| 計 | $n_{.1}$ | $n_{.2}$ | --- | $n_{.l}$ | n |

(第一表)

2. 予備事項

コト = 長種ノカ一ビ X_1, X_2, \dots, X_k ガアツテ、ソレソレノ枚数ガ $n_{1.}, n_{2.}, \dots, n_{k.}$ デアル時、コレヲ射倅的 = l 箇ノ級 Y_1, Y_2, \dots, Y_l = ソレソレノ枚数ガ $n_{.1}, n_{.2}, \dots, n_{.l}$ トナル枚ニ分ケタトスルト、 Y_j ナル級 = 対スル X_i ノ期待度数、 m_{ij} 、ハ、次ノ式デ表ハサレルデアラウ。

$$m_{ij} = n_{i.} n_{.j} / n$$

ソコデ、 m_{ij} ヲ度数トスル次ノ分布ヲ、 X ガ Y = 独立デアアル時ノ期待度数分布トイフコトニスル。上速ノヤウナカ一ビノ分チオラスレバ X ハ Y = 独立デアアルト考ハラレルカラデアアル。

| | Y_1 | Y_2 | --- | --- | Y_l | 計 |
|-------|----------|----------|-----|-----|----------|----------|
| X_1 | m_{11} | m_{12} | --- | --- | m_{1l} | $n_{1.}$ |
| X_2 | m_{21} | m_{22} | --- | --- | m_{2l} | $n_{2.}$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X_k | m_{k1} | m_{k2} | --- | --- | m_{kl} | $n_{k.}$ |
| 計 | $n_{.1}$ | $n_{.2}$ | --- | --- | $n_{.l}$ | n |

(第 二 表)

今或試行ニ於テ、オ一表ニホスヤウナ度数分布ヲ得タトシ、
 1、各階級ノ度数 m_{ij} トオ一表ニ於テソレニ対応スル度数 m_{ij}
 2、差 $n_{ij} - m_{ij}$ ノ符号ヲ觀察シタトスルナラバ、例ヘバ次
 3、ホスヤウナ符号ノ分布が見ラレルデアラウ。

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| + | 0 | --- | --- | - |
| - | + | --- | --- | + |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| - | - | --- | --- | + |

(オ 三 表)

$n_{ij} - m_{ij}$ が正又ハ負ナルニ從ツテ、階級 (X_i, Y_j) ノ符
 号ハ正又ハ負デアルトイフコト、シ、オ三表ニホスヤウナ表ヲ
 觀察度数分布ニ於ケル階級ノ符号分布トイフコト、スル。理解
 3、助ケルタメニ次ニ例ヲ掲ゲテオカウ。

| 例 | Y_1 | Y_2 | Y_3 | 計 |
|-------|-------|-------|-------|----|
| X_1 | 3 | 1 | 5 | 9 |
| X_2 | 4 | 5 | 2 | 11 |
| 計 | 7 | 6 | 7 | 20 |

(觀察ニ依ル度数分布)

| | Y_1 | Y_2 | Y_3 | 計 |
|-------|-------|-------|-------|----|
| X_1 | 3.15 | 2.7 | 3.15 | 9 |
| X_2 | 3.85 | 3.3 | 3.85 | 11 |
| 計 | 7 | 6 | 7 | 20 |

(期待度数分布)

| | | |
|---|---|---|
| - | - | + |
| + | + | - |

(階級)符号分布)

サテ、 X_i 、 Y_j 、 Z_k 観察度数分布ニ於ケル周辺ノ度数 n_{ij} 、 n_{jk} 、 n_{ki} ($i=1, 2, \dots, K$, $j=1, 2, \dots, l$) ハ悉ク一定ニシテオイテ度数ヲ、ソノ符号ガ負ナラバ減ノ向キニ、正ナラバ増ノ向キニ變ヘタトスルト、カウシテ得ルトコロノ度数分布ハ、元ノ度数分布ヨリモ期待度数分布カラ隔レテキルトイツテヨイデアラウ。即チ、上掲ノ例ニツイテイフナラバ、次ノ度数分布ヨリモ期待度数分布カラ隔レテキルトイツテヨイデアラウ。

| | Y_1 | Y_2 | Y_3 | 計 |
|-------|-------|-------|-------|----|
| X_1 | 2 | 0 | 7 | 9 |
| X_2 | 5 | 6 | 0 | 11 |
| 計 | 7 | 6 | 7 | 20 |

又、 Z_k 表ニ於テ周辺ノ度数ハ一定ニシ、各階級ノ符号ハ悉ク變ヘルヤウニシテ $|n'_{ij} - m_{ij}| \geq |n_{ij} - m_{ij}|$ ヲ満足サセルヤウナ n'_{ij} ヲ取リ n'_{ij} ヲ度数トスル度数分布ヲ作ルナラバ、 Z_k ノヤウナ度数分布ハ、元ノ度数分布ト同等又ハ以上ニ期待度数分布カラ隔レテキルトイツテヨイデアラウ。即チ、前掲ノ例ニツイテ言フナラバ、例ヘバ次ノヤウナ度数分布ハ、元ノ度数分布ト同等又ハ以上ニ期待度数分布カラ隔レテキルトイツテヨイデアラウ。

| | Y_1 | Y_2 | Y_3 | 計 |
|-------|-------|-------|-------|----|
| X_1 | 4 | 5 | 0 | 9 |
| X_2 | 3 | 1 | 7 | 11 |
| 計 | 7 | 6 | 7 | 20 |

更ニ又、オ一表ニ於テ周辺ノ度数ハ一定ニシ、

$|n'_{ij} - m_{ij}| \geq |n_{ij} - m_{ij}|$ ヲ満足サセルヤウナ n'_{ij} ヲ取リ、コレヲ度数トシテ作ツタ度数分布モ、矢張り、元ノ度数分布ト同等以上ニ期待度数分布カラ隔レテキルトイツテヨイデアラウ。即チ、前掲ノ例ニツイテイフナラバ、例ヘバ次ノヤウナ度数分布ハ、何レモ元ノ度数分布ト同等以上ニ期待度数分布カラ隔レテキルト言ツテヨイデアラウ。

| | Y_1 | Y_2 | Y_3 | 計 |
|-------|-------|-------|-------|----|
| X_1 | 3 | 5 | 1 | 9 |
| X_2 | 4 | 1 | 6 | 11 |
| 計 | 7 | 6 | 7 | 20 |

| | Y_1 | Y_2 | Y_3 | 計 |
|-------|-------|-------|-------|----|
| X_1 | 7 | 1 | 1 | 9 |
| X_2 | 0 | 5 | 6 | 11 |
| 計 | 7 | 6 | 7 | 20 |

ソコデ、結局、次ノヤウニイハウ。即チ、オ一表ト周辺ノ度数ヲ等シクシ、且 $|n'_{ij} - m_{ij}| \geq |n_{ij} - m_{ij}|$ デアルヤウナ n'_{ij} ヲ度数トスル度数分布ヲ、オ一表ヲ示サレタ度数分布ト同等以上ニ期待度数分布カラ隔レテキルトイフコトトスル。

上述ノヤウニ、観察度数分布ト同等以上ニ期待度数分布カラ隔レテキル度数分布トイフモノヲ定義シテ、コレヲ「 X ガ Y ニ独立デアル」トイフ仮設ノ検定ニ、次ノヤウニ使用スル。即チ、コノ仮設ノ下ニ於テ、観察度数分布ト同等以上ニ期待度数分布カラ隔レタ度数分布ノ何レカーツヲ得ル確率ヲ計算シテ、ソノ値ガ予メ指定シテアル値 α (例ヘバ 0.01) ヨリ大キクナケレバ仮設ヲ棄テ、 α ヨリ大ナラバ仮設ヲ採択スルニデアル。

サテ、本節ノ初ニ述ベタヤウナガーゼノ分チオラスル時ニ、オ一表ニ示スヤウナ度数分布ヲ得ル確率 P ハ、次ノヤウニ計算サレル。

Y_1 ニ対シテハ「 i カラ n_{i1} マデ番号ヲ打ツタ n_{i1} 箇ノ箱、 Y_2 ニ

対シテハ、1カラ \$n_{12}\$ マデノ番号ヲ打ツク \$n_{12}\$ コノ箱、-----、
 \$Y_{1l} = \text{対シテハ1カラ } n_{1l} \text{ マデノ番号ヲ打ツク } n_{1l} \text{ 箱ノ箱ガ用
 意サレテ中テ、コレニ一枚宛カ一ゴヲ入レルモノト想像スレバ
 オ一表ニ示スマウナ度数分布ノ出キル場合ノ数ノ多項定理ニ
 依ツテ } (X_1 + X_2 + \dots + X_k)^n (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_l)^n \quad (1)

ヲ展開シク時ニ於ケル

$$(X_1 Y_1)^{n_{11}} (X_1 Y_2)^{n_{12}} \dots (X_1 Y_l)^{n_{1l}} \dots (X_k Y_l)^{n_{kl}} \quad (2)$$

ノ係数ニ等シクアルベキトイフコトガ知ラレル。故ニコノ
 係

$$\frac{n!}{n_{11}! n_{12}! \dots n_{1j}! \dots n_{kl}!} \quad (3)$$

次ニ上述ノヤウナ箱ノ中ニ一枚宛カ一ゴヲ入レル時ニ起リ得
 ル凡テノ数ハ

$$\sum_{j=1}^l n_{ij} = n_{i\cdot}, \quad \sum_{i=1}^k n_{ij} = n_{\cdot j} \quad (4)$$

(\$i=1, 2, \dots, k\$) (\$j=1, 2, \dots, l\$)

ナル條件ノ下ニ於テ、(2)ノ項ノ指数 \$n_{ij}\$ ヲ変化サシテ得ル項
 ノ総数ニ等シクアルベキヲアルカ。コノ数、(1)ノ総等
 ニ等シトイフコト

$$(X_1 \sum_{i=1}^l Y_i + X_2 \sum_{i=1}^l Y_i + \dots + X_k \sum_{i=1}^l Y_i)^n \quad (5)$$

ノ展開式ニ於ケル

$$X_1^{n_{11}} X_2^{n_{12}} \dots X_k^{n_{kl}} Y_1^{n_{11} + n_{21} + \dots + n_{k1}} Y_2^{n_{12} + n_{22} + \dots + n_{kl}} \dots Y_l^{n_{1l} + n_{2l} + \dots + n_{kl}} \quad (6)$$

ノ係数

$$\frac{n!}{n_{11}! n_{12}! \dots n_{kl}!} \quad \frac{n!}{n_{11}! n_{21}! \dots n_{kl}!} \quad (7)$$

ニ等シトイフコトノ容易ニ分ル
 故ニ、前章ノ確率、(3)ヲ(7)ヲ割ツテ商、即チ

$$\frac{\prod_{i=1}^k n_{i\cdot}! \prod_{j=1}^l n_{\cdot j}!}{n! \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l n_{ij}!}$$

ニ等シト

上 = 求メタ確率ハ、 X ガ Y ニ独立ナル時ニ、オトホニホスヤウナ度数分布ヲ得ル確率デアルト考ヘラレル。

3. 応用例

統計科学研究会編、「統計数値表」オ 39 頁所載、実験例ヲトツテ、上述ノ方法ヲ適用スル仕オヲ示サウ。

例。伊藤ニ依レバ、前線前後、81 箇、地臭デまらりあ再発ノ平均ヨリ多イ場合 (\bar{A})、少イ場合 (A) ハ下ノ如クナツテオシ、コノ 2×3 分割表カラまらりあ再発ト前線トノ關係ケアルト、言ヘルカ。

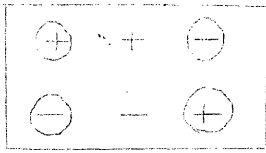
| | 前 部 | 近 傍 | 後 部 | 計 |
|-----------|-----|-----|-----|----|
| A | 12 | 25 | 3 | 40 |
| \bar{A} | 9 | 14 | 18 | 41 |
| 計 | 21 | 39 | 21 | 81 |

まらりあ再発ト前線ト關係ガナイモノトスレバ、 A ナルカード 40 枚、 \bar{A} ナルカード 41 枚ヲヨクツキマゼテ、コレヲ 21 枚、39 枚、21 枚ノ三組ニ分ケタ時、コノ三ツノ組ニ於ケル A 、 \bar{A} ノ度数分布ハ、ソレト同等以上ニ期待度数分布ウラ高レタモノヲ得ル確率ガ比較的大キイヤウナ度数分布デアラゲアラウ。

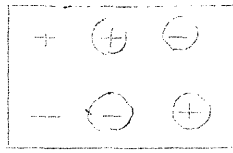
今、まらりあ再発ト前線トノ關係ガナイモノト假定シテ、期待度数分布及ヒ階級ノ符号分布ヲ作ルト、次ノ表ノヤウニナル。便宜ノタメニ、墨記シテホスコトスル。

| | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|---|---|---|
| $10 \frac{10}{27}$ | $19 \frac{7}{27}$ | $10 \frac{10}{27}$ | + | + | - |
| $10 \frac{17}{27}$ | $19 \frac{20}{27}$ | $10 \frac{17}{27}$ | - | - | + |

ソコデ、先ツ下ノ四(II)デホシタ四ツノ階級ノ間デ符号十ノ階級ノ度数ヲイツツ増加シテ度数分布ヲ作り、カウシテ出メタ度数分布ノ各々ニツイテ、(II)デホシタ四ツノ階級ノ間デホト同線ノ度数変化ヲ行ツテ度数分布ヲ作ルト、即チ→デホシタ順ニ期待度数分布カラ益々高レタ度数分布ガ現レテ来ル。



(I)



(II)

| | | |
|----|----|----|
| 12 | 25 | 3 |
| 9 | 14 | 18 |

→

| | | |
|----|----|----|
| 13 | 25 | 2 |
| 8 | 14 | 19 |

→

| | | |
|----|----|----|
| 14 | 25 | 1 |
| 7 | 14 | 20 |

→

| | | |
|----|----|----|
| 15 | 25 | 0 |
| 6 | 14 | 21 |

| | | |
|----|----|----|
| 12 | 62 | 2 |
| 9 | 13 | 19 |

| | | |
|----|----|----|
| 13 | 26 | 1 |
| 8 | 13 | 20 |

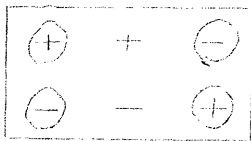
| | | |
|----|----|----|
| 14 | 26 | 0 |
| 7 | 13 | 21 |

| | | |
|----|----|----|
| 12 | 27 | 1 |
| 9 | 12 | 20 |

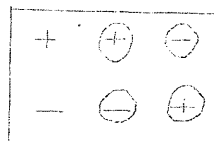
| | | |
|----|----|----|
| 13 | 27 | 0 |
| 8 | 12 | 21 |

| | | |
|----|----|----|
| 12 | 28 | 0 |
| 9 | 11 | 21 |

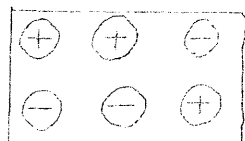
更ニ、次ノ図(III), (IV), (V) デ ⊕ ヲ入レテネシタ階級ニツ
 イテ、+ハ-ニ、-ハ+ニナルヤウニ、且、 $|n'_{ij} - m_{ij}| \geq$
 $|n_{ij} - m_{ij}|$ ヲ満足サセルヤウナ最小ノ n'_{ij} ヲ取ソテ度数分
 布ヲ作ツテミルト、下ノニツシカナイコトガ分ル



(III)



(IV)



(V)

| | | |
|----|----|----|
| 12 | 10 | 18 |
| 9 | 29 | 3 |

| | | |
|----|----|----|
| 8 | 13 | 19 |
| 13 | 26 | 2 |

コノ各ヲ基ニシテ、前ト同様ノ度数変化ヲ行フト、益々期待
 度数分布カラ逸レルトコロノ一連ノ度数分布ケ得ワレムガ、コ
 トヲ一々記載スルコトハ煩瑣ナルカラ省略スル。否、亦ハコ
 レヲ記載スル必要モナイニテアル。必ずナリハ、カワシメ得ヲ

~~トコロを、エラニテ得ル度数分布及ヒ元ノ度数~~

レ、各度数分布ノ確率ヲ求ルニ、爾レカ一ツヲ得ル雖、其ノハ、
次ノ式ヲ表サレルコトガ容易ニ分ル。即チ、

$$p_1 = \frac{40! \cdot 41! \cdot 21! \cdot 39! \cdot 21!}{81! \cdot 12! \cdot 25! \cdot 3! \cdot 9! \cdot 14! \cdot 18!}, \quad p_2 = \frac{40! \cdot 41! \cdot 21! \cdot 39! \cdot 21!}{31! \cdot 12! \cdot 10! \cdot 18! \cdot 9! \cdot 29! \cdot 3!}$$

$$p_3 = \frac{40! \cdot 41! \cdot 21! \cdot 39! \cdot 21!}{81! \cdot 8! \cdot 13! \cdot 19! \cdot 13! \cdot 26! \cdot 2!}$$

$$P_1 = p_1 \left[1 + \frac{9 \cdot 3}{13 \cdot 19} + \frac{8 \cdot 2}{14 \cdot 20} \cdot \frac{9 \cdot 3}{13 \cdot 19} + \frac{7 \cdot 1}{15 \cdot 21} \cdot \frac{8 \cdot 2}{14 \cdot 20} \cdot \frac{9 \cdot 3}{13 \cdot 19} \right. \\ \left. + \frac{14 \cdot 3}{26 \cdot 19} \left\{ 1 + \frac{9 \cdot 2}{13 \cdot 20} + \frac{8 \cdot 1}{14 \cdot 21} \cdot \frac{9 \cdot 2}{13 \cdot 20} \right\} + \frac{13 \cdot 2}{27 \cdot 20} \cdot \frac{14 \cdot 3}{26 \cdot 19} \right. \\ \left. \left\{ 1 + \frac{9 \cdot 1}{13 \cdot 21} \right\} + \frac{12 \cdot 1}{28 \cdot 21} \cdot \frac{13 \cdot 2}{27 \cdot 20} \cdot \frac{14 \cdot 3}{26 \cdot 19} \right]$$

$$P_2 = p_2 \left[\left\{ 1 + \frac{9 \cdot 10}{13 \cdot 30} + \frac{8 \cdot 9}{14 \cdot 31} \cdot \frac{9 \cdot 10}{13 \cdot 30} + \frac{7 \cdot 8}{15 \cdot 32} \cdot \frac{8 \cdot 9}{14 \cdot 31} \cdot \frac{9 \cdot 10}{13 \cdot 30} + \dots \right\} \right. \\ \left. + \frac{10 \cdot 3}{30 \cdot 19} \left\{ 1 + \frac{9 \cdot 9}{13 \cdot 31} + \frac{8 \cdot 8}{14 \cdot 32} \cdot \frac{9 \cdot 9}{13 \cdot 31} + \frac{7 \cdot 7}{15 \cdot 33} \cdot \frac{8 \cdot 8}{14 \cdot 32} \cdot \frac{9 \cdot 9}{13 \cdot 31} + \dots \right\} \right. \\ \left. + \frac{9 \cdot 2}{31 \cdot 20} \cdot \frac{10 \cdot 3}{30 \cdot 19} \left\{ 1 + \frac{9 \cdot 8}{13 \cdot 32} + \frac{8 \cdot 7}{14 \cdot 33} \cdot \frac{9 \cdot 8}{13 \cdot 32} + \dots \right\} \right. \\ \left. + \frac{8 \cdot 1}{32 \cdot 21} \cdot \frac{9 \cdot 2}{31 \cdot 20} \cdot \frac{10 \cdot 3}{30 \cdot 19} \left\{ 1 + \frac{9 \cdot 7}{13 \cdot 33} + \frac{8 \cdot 6}{14 \cdot 34} \cdot \frac{9 \cdot 7}{13 \cdot 33} + \dots \right\} \right]$$

$$P_3 = p_3 \left[\left\{ 1 + \frac{13 \cdot 2}{27 \cdot 20} + \frac{12 \cdot 1}{28 \cdot 21} \cdot \frac{13 \cdot 2}{27 \cdot 20} \right\} + \frac{8 \cdot 2}{14 \cdot 20} \left\{ 1 + \frac{13 \cdot 1}{27 \cdot 21} \right\} \right. \\ \left. + \frac{7 \cdot 1}{15 \cdot 20} \cdot \frac{8 \cdot 2}{14 \cdot 20} \right]$$

ト置ケバ $P = P_1 + P_2 + P_3$

コレヲ計算スルバ

$$P = 0.000037$$

トナル。故ニ仮設ハ棄テテハナラズ。即チ、まはり第ノ内能ト前線トハ關係ガアルトモナラナシ。

「統計數値表」ニ於テハ、 χ^2 ニヨル檢定法ヲ適用シテ、まはりあり、再従ト前線ト關係ガアルトイフニハ猶不堅ヨ感ズルヤウナ結果ヲ得テキルノデアルガ、前述ノ方法ニヨレバ不堅ナシニ言切ツテヨシ。

P ヲ現ストコロノ被數ハ見掛ノ上デハ複雑デアルガ、實際ノ計算スル時ニハ、ソレホド手數ヲ要シナイ。ス。手數ヲ省クモ夫ハイクラデモアル。ソレ其ニツイテハ、別ニ一巻ヲ撰ンテモク公ニスルデアラウ。

4. 綜括

上ニ述ベテ来タトコロノ意味ノ要點ヲマツルルト次ノヤウナル。

1) X (ヌハ Y)ガ、 Y (ヌハ X)ニ独立デアルトイフニハ、下ニ於テ期待度數分布ヲ作ル。

2) 観察度數分布ニ於ケル階級 (X_i, Y_j)ノ度數 m_{ij} ト期待度數分布ニ於テ、ソレニ対応スル階級ノ度數 m'_{ij} トノ差、 $m_{ij} - m'_{ij}$ ノ符号ヲ觀察シ、階級ノ符号分布ヲ作ル。

3) 観察度數分布ノ周辺ノ度數ハ一定ニシテ置イテ、 $|m_{ij} - m'_{ij}| \geq |m_{ij} - m'_{ij}|$ デアルヤウナ m_{ij} ヲ度數トスル度數分布即チ、元ノ度數分布ト同等以上ニモ期待度數分布カラ高レタ度數分布ヲ悉ク作ツタト考ヘテ、コレ等ノ度數分布各ノ確率及ビ元ノ度數分布ノ確率ヲ計算スル。

勿論、1)ノ仮設ト下ニ於テ確率ヲ計算スルノデアル。

4) 3)デ計算シタ確率ノ和ヲ計算シ、コノ値ガ予メ指定カレテキル値ヨリモ、小デナラバ仮設ヲ棄テ、大ナラバ仮設ハ棄テナイ。

2)デ作ル階級ノ度數分布ハ、3)デ元ノ度數分布ト同等以上ニ期待度數分布カラ高レタ度數分布ヲ作ル時ニ補助トシテ、必ズシモアルヲ要シナイ。然シ、作ツテ置イテ、コレヲ補助ニスルト仕事ハ樂デアル。

尚ホ、上ニ述ベテ来タト同様ノ考ヘニ従ツテ、三ツ以上ノ独立性ヲ檢定スル方法ヲ構成スルコトガ出来る。勿論、観察度數ガ余リ大キクナクテ、幾ツカノ級ノ度數ガ40ニ満たナイ場合ニ応ズルモノデアル。

(昭和廿一年九月十日)