指数分布型での棄却限界

（1946年10月5日受付）

兼所員　増山元三郎

指数型密度函数で位置母数βは既知とし，原点をβへ移して考へる。即ち

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}} & x \geqq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

問題は$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{N-1}, x_0$なる大きさ$N$の無作為標本があつた場合，他が$\sigma$の未知なこの型の母集團に屬してゐることを知つてゐる時x_0も同じ母集團に屬してゐるか否かを檢定することである。主眼は，指数分布では$2x/\sigma$が自由度$f=2$のχ^2分布をすることを基にし，

$F=x_0/\bar{x}$　（$\bar{x}$はx_0を除くN−1個のx_iの平均）

が自由度$f_1=2$，$f=2(N-1)$のF分布をすることを利用して檢定した。併しx_0を棄てるか否かが問題になるのは，多くの場合，"x_0が$\bar{x}$より離れてゐる"からではなく"x_0が他の何れよりも大きいか又は小さい"からである。上の檢定法ではx_0が他の何れよりも大又は小と云ふ知識は利用されてゐない。この様な場合どんな統計量を用ゐて檢定すればよいかの一般論は見當らないので[1]，次の様な發見的方法で解いてみた。

簡單の為，x_0は$x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$の何れよりも大きいとすると，$x_0$の確率素分は[2]

$$N\left(\int_0^{x_0} f(x)\,dx\right)^{N-1} f(x_0)\,dx_0 = N\left(1-e^{-\frac{x_0}{\sigma}}\right)^{N-1} e^{-\frac{x_0}{\sigma}}\, d\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)$$

1) 正規型の場合は，増山：数理統計学の應用，科学週報，14，228，昭19.　2) S. S. Wilks: Mathematical statistics, 91, 1944.

一方、(N−1)箇の平均値 $\bar{x}$ の確率素分は

$$\frac{1}{2^{N-1}}\,\frac{\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)^{N-2}}{\Gamma(N-1)}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)}\,d\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)$$

$\bar{x}$ と x_0 とは独立だから、この同時分布を考へ変数を $(x_0, \bar{x})$ から $(\mu, \bar{x})$ に変へる。但し

$$\mu = x_0/\bar{x},$$

$\bar{x}/\sigma = t$ に就て積分すると、未知母数 σ はうまく消えて、λ の確率密度は

$$G(\mu) = \frac{N}{2^{N}\Gamma(N-1)}\int_0^\infty (1-e^{-\mu t})\,t^{N-1}\,e^{-(\mu+\frac{1}{2})t}\,dt$$

$$= 2N(N-1)\sum_{\nu=0}^{N-1}\binom{N-1}{\nu}\frac{(-1)^{\nu}}{\{(1+2(\nu+1)\}^{N}} \quad 1)$$

従って危険率を α とすると α に対する μ は次式から定まる。

$$1-\alpha = \int_0^{\mu} G(\mu)\,d\mu = \sum_{\nu=0}^{N-1}(-1)^{\nu+1}\binom{N}{\nu+1}\left[\frac{1}{\{1+2(\nu+1)\mu\}^{N-1}}-1\right]$$

変形すると

$$\alpha = \sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\lambda-1}\binom{N}{\lambda}(1+2\mu\lambda)^{1-N}$$

例へば $N=3$ の時、F分布では $F=6.94$ が危険率5%に相当するが、この式から $\mu=6.94$ とすると、$\alpha=0.01$ 即ち僅か1%に過ぎない。従って新公式の方が少数例でも一層鋭敏であることが分る。

---

1) ビランド・アーン：定積分表、昭10、岩波書店、81表4の公式は $(-1)^{\nu}$ だけ誤ってゐる。