(9). 河田龍夫

（八月三十一日受付）

Fourier 解析ト確立論（II） 特性函数ト分布函数ノ saltus.

確率変数Xノ特性函数ヲ $f(t)$，分布函数ヲ $\sigma(x)$ トスル。p_ν ヲ $\sigma(x)$ ノ saltus トスル。

次ノ定理ハヨク知ラレテヰル。

$$(1)\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt = \sum p_\nu^2$$

（$\sum$ ハスベテノ saltus ニ対応シテ和ヲトル）(1) ノ左辺ヲ $\mathfrak{M}\{|f(t)|^2\}$ ト表ス。是ハ Fourier 級数論ニ於ケル parseval ノ等式ニ対応スル。ソレデ Hausdorff-Young ノ不等式ニ対応スルモノガ成立スルカ否カガ問題ニナル。尤モ是ガ成立シテモ確率論トシテドウ云フ意味ヲモツカガ了解サレネバナラナイガ、是ハ筆者ノ平均濃度函数，Lévy ノ濃度函数トノ関係ニ於テ意味ガアルト思ハレル。

定理 1. $p \geqq 1$ ニ對シテ

$$(2)\quad \mathfrak{M}\{|f|^p\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^p\,dt$$

97
9/5

が存在スル。

証明 *Lebesgue* 分解ヲ用ヒテ

$$\sigma(x) = a_1\sigma_1(x) + a_2\sigma_2(x)$$

ト書ケル、茲ニ $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ ハ夫々分布函数デ、$\sigma_2(x)$ ハ連続, $\sigma_1(x)$ ハ *step function* デ $\leqq x$ ナル不連続点ニ於ケル *saltus* ノ和デアル、$a_1 + a_2 = 1$. $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ ニ対スル特性函数ヲ $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ トスルト

$$f(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t)$$

$\sigma_2(x)$ が連続ダカラ $\mathfrak{M}\{|\varphi_2|^p\} = 0$ が得ラレル、何トナレバ

(1) ヨリ $p_\nu = 0$ 故ニ $\mathfrak{M}\{|\varphi_2|^2\} = 0$ デモシ $p \geqq 2$ ナラバ Hölder ノ不等式カラ

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \to 0$$

故ニ $\mathfrak{M}\{|\varphi_2|^p\} = 0$. 又 $1 \leqq p < 2$ ナラバ $|\varphi_2| \leqq 1$ デアルカラ

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_2|^p dt \leqq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_2|^2 dt \to 0$$

故ニ $\mathfrak{M}\left\{|\varphi_2|^p\right\} = 0$

サテ $\varphi_1(t)$ ハ絶対收斂ノ三角級数ニナルカラ概週期函数デアル、従テ $|\varphi_1(t)|^p$ モ概週期函数デ $\mathfrak{M}\{|\varphi_2|^p\}$ ガ存在スル

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq a_1\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_1|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} + a_2\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_2|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

(Minkonsky ノ不等式)

故ニ

$$(3)\quad \overline{\lim_{T\to\infty}}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq a_1\left[\mathfrak{M}\{|\varphi_1|^p\}\right]^{\frac{1}{p}}$$

又 $\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|a_1\varphi_1|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t) - a_2\varphi_2|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$\leqq \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} + a_2\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_2(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$T\to\infty$ トシテ

$$(4)\quad a_1\left[\mathfrak{M}(|\varphi_1|^p)\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \underline{\lim_{T\to\infty}}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

(3)(4) ヨリ $\lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f|^p dt$ ガ存在スル.

9P ~~97~~

(3) (4) カラ

(5) $$\mathfrak{M}\{|f|^p\} = a_1 \mathfrak{M}(|\varphi_1|^p)^{\frac{1}{p}} = \mathfrak{M}\{|a\varphi_1|^p\}^{\frac{1}{p}}$$

是ニ概週期函数ノ Fourier 級数ニ対スル Hausdorff-Young ノ定理（H. R. pitt, Journ. London Math. Soc. 14 (1939) p. 143–150）ニヨリ次ノ定理ヲ得ル、

<u>定理 2.</u>

$1 < p \leqq 2$ ナラバ

$$\left(\sum p_\nu^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leqq A_p \mathfrak{M}\{|f|^p\}^{\frac{1}{p}}$$

$2 \leqq p$ ナラバ

$$\mathfrak{M}\{|f|^p\}^{\frac{1}{p}} \leqq B_p \left(\sum p_\nu^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ココニ A_p, B_p ハ p ニノミ依存スル常数デ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

コノ定理ハ pitt ノ定理ヲ用ヒナイデ少シ遠廻リデアルガ、次ノ様ニモ得ラレル、平均濃度函数トノ関係ガコノ方デ明カトナル。

<u>定義 1</u> (6) $$\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\{\sigma(u+\alpha)-\sigma(u-\alpha)\}^p du = C_p(\alpha)$$

p 次ノ平均濃度函数トイフ

$C_p(\alpha)$ ノ性質ニ就テハ　河田龍夫　独立ナ確率変数ヲ項トスル級数ニ就テ、物理学校雑誌．昭和１６年 50巻）

定理　3　(7)　$\lim_{\alpha \to 0} C_p(\alpha) = \Sigma p_\nu{}^p$ 　　$p \geqq 1$

是ハ Wiener. Fourier Integral p. 146. Theorem 2 ノ拡張デ全ク同様ニ証明出来ル．

定理 4.　(Wiener − Pitt) $\mathfrak{M}_p\{|f|^p\}$ ガ存在スレバ

(8) $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\frac{\sin \alpha t}{\alpha t}\right|^p dt = \mathfrak{M}\{|f|^p\} \qquad p > 1$$

$f(t)\frac{\sin \alpha t}{\alpha t} \in L_p(-\infty, \infty)$ ナル故ニ

$$\underset{A \to \infty}{l.i.m} \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A} f(t)\frac{\sin \alpha t}{\alpha t} e^{iut} dt = \sigma(u+\alpha) - \sigma(u-\alpha)$$

（$p\,q$ 次ノ平均収斂デ）

故ニ Fourier 積分ニ対スル Hausdorff − Young ノ定理（Titchmarsh ノ定理）カラ　　$1 < p \leqq 2$

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma(u+\alpha) - \sigma(u-\alpha))^q du\right\}^{\frac{1}{q}} \leqq$$

$$A_p \left\{ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \frac{\sin \alpha t}{\alpha t} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

（A_p ハ p ニノミ依存スル常数）

$\alpha \to 0$ トシテ定理 3, 定理 4 カラ定理 2 ノ前半ヲ得ル.

後半モ同様ニ証明出来ル。