23. γ-分布及ビ γ-検定ニツイテ（ツヅキ）

兼任所員　佐藤良一郎

§1. 一次回帰ニ関スル γ-分布(1)

x_2, x_1 ヲ二ツノ射倖変数トシ，x_2 ノ x_1 ヘノ回帰ハ一次デ，ソノ回帰係数ハ β_{21} デアルトスル。ソシテ x_2，x_1 ノ母集団平均ハ，ソレゾレ ξ_2, ξ_1 デアルト

$$\begin{aligned} x_{2\cdot1} &\equiv x_2 - \beta_{21}x_1 \\ \xi_{2\cdot1} &\equiv \xi_2 - \beta_{21}\xi_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

トスル時，$x_{2\cdot1}$ ノ元確率法則ハ

$$p(x_{2\cdot1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{2\cdot1}}\, e^{\frac{(x_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2}{2\sigma_{2\cdot1}^2}} \qquad (2)$$

デ表サレルモノトスル。$\sigma_{2\cdot1}$ ハ $x_{2\cdot1}$ ノ母集団標準偏差デアル。

今，$(x_2^{(i)}, x_1^{(i)})$，$i=1,2,\cdots,N$，ヲ観察ニ依ツテ得ル x_2, x_1 ノ値ノ組トシ，各組ハ互ニ独立デアルトスル。

サウスルト，$x_{2\cdot1}^{(i)} \equiv x_2^{(i)} - \beta_{21}x_1^{(i)}$，$(i=1,2,\cdots,$

N)ノ同時的ナ確率法則ハ次ノヤウニ書カレル。

$$p(x_{2\cdot1}^{(1)}, x_{2\cdot1}^{(2)}, \cdots\cdots, x_{2\cdot1}^{(N)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{2\cdot1}}\right)^N$$

$$e^{-\frac{\sum(x_{2\cdot1}^{(i)} - \xi_{2\cdot1})^2}{2\sigma_{2\cdot1}^2}} \quad \cdots\cdots(3)$$

ココデ、若シ回帰係数 β_{21} 及ビ $\xi_{2\cdot1}$ ガ既知デアルナラバ響ニ一変数ノ場合ニ述ベタ定理ニハソノママ $x_{2\cdot1}$ ニ対シテ適用出来ルカラ、ソレニ対応スル諸ノ Υ-検定ハ直ニ $x_{2\cdot1}$ ニ関スル諸ノ検定ニ適用シテヨイ。

又、若シ $\xi_{2\cdot1}$ ガ未知デ、β_{21} ガ既知ナラバ響ニ一変数ノ場合ニ述ベタ定理一ハ $\bar{x}$ ノ代リニ $\bar{x}_{2\cdot1} \equiv \bar{x}_2 - \beta_{21}\bar{x}_1$（但シ $\bar{x}_2, \bar{x}_1$ ハソレゾレ x_2, x_1 ノ見本平均デアル）ヲ取ツテ考ヘレバソノママ $x_{2\cdot1}$ ニ對シテモ適用出来ルカラ、ソレニ對応スル諸々ノ Υ-検定ハ直ニ $x_{2\cdot1}$ ニ関スル諸々ノ検定ニ適用シテヨイ。

若シ $\xi_{2\cdot1}$ 及ビ β_{21} ガ何レモ未知ナラバドノヤウナコトニナルカ、以下コレニツイテ明カニシヨウ。

§2、一次回帰ニ関スル Υ-分布（2）

例ノ如ク

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{N}\sum x_1^{(i)}, \qquad s_1^2 = \frac{1}{N}\sum\left(x_1^{(i)} - \bar{x}_1\right)^2$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{N}\sum x_2^{(i)}, \qquad s_2^2 = \frac{1}{N}\sum\left(x_2^{(i)} - \bar{x}_2\right)^2 \tag{4}$$

トシ、x_2 ノ x_1 ヘノ見本回帰係数ヲ b_{21} デ表スコトスル。即チ

$$b_{21} = \frac{\sum\left(x_1^{(i)} - \bar{x}_1\right)\left(x_2^{(i)} - \bar{x}_2\right)}{\sum\left(x_1^{(i)} - \bar{x}_1\right)^2}$$

或ハ

$$\sum\left(x_1^{(i)} - \bar{x}_1\right)\left\{\left(x_2^{(i)} - \bar{x}_2\right) - b_{21}\left(x_1^{(i)} - \bar{x}_1\right)\right\} = 0 \tag{5}$$

ソシテ

$$x_{2\cdot1} \equiv x_2 - b_{21}x_1, \quad \bar{x}_{2\cdot1} \equiv \bar{x}_2 - b_{21}\bar{x}_1 \tag{6}$$

トスル。

今、$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots\cdots, x_1^{(N)}$ ハ、何レノ観察ニ対シテモ共通シテヰル、即チ観察ノ度毎ニソノ値ヲ変ヘルコトハシナイモノトス。従ツテ $\left(x_2^{(i)}, x_1^{(i)}\right)$ ノ各組ニ

於テ $x_2^{(i)}$ ダケガ觀察ノ度毎ニ變リ得ルモノトスルト，次ノ定理ガ成立ツ

$\boxed{\text{定理}}$ $a^{(i)}$，$(i=1, 2, \cdots\cdots, N)$ ヲ悉クハ相等シクナイ任意ノ定數トシ，$N\bar{a}=\Sigma a^{(i)}$

$$r=\frac{\Sigma(x_{2\cdot1}^{(i)}-\bar{x}_{2\cdot1})(a^{(i)}-\bar{a})}{\sqrt{\Sigma(x_{2\cdot1}^{(i)}-\bar{x}_{2\cdot1})}\sqrt{\Sigma(a^{(i)}-\bar{a})^2}} \qquad (7)$$

ト置クト，$\sigma_{2\cdot1}$ ノ値ノ如何ニカカハラズ r ノ死離率法則 $p(r)$ ハ次ノ式デ表サレル。

$$p(r)\doteqdot\frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-3}{2}\right)}\left(1-r^2\right)^{\frac{N-5}{2}} \qquad (8)$$

證明ハ次ノ通リデアル。便宜上 $x_2^{(i)}$，$x_1^{(i)}$，$\cdots\cdots$ ニ於ケル (i) ハ外シテ書クコトニスル。

先ヅ

$$\Sigma(x_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2=\Sigma(x_{2\cdot1}-\bar{x}_{2\cdot1})^2+(b_{21}-\beta_{21})^2\Sigma(x_1-\bar{x}_1)^2+N(\bar{x}_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2 \qquad (9)$$

トナルコトヲ示サウ。

$$\sum (x_{2\cdot1} - \xi_{2\cdot1})^2 = \sum \Big\{ X_{2\cdot1} - \bar{X}_{2\cdot1} + (x_{2\cdot1} - \bar{x}_{2\cdot1}) - (X_{2\cdot1} - \bar{X}_{2\cdot1}) + (\bar{x}_{2\cdot1} - \xi_{2\cdot1}) \Big\}^2$$

$$= \sum (X_{2\cdot1} - \bar{X}_{2\cdot1})^2 + \sum \Big\{ (x_{2\cdot1} - X_{2\cdot1}) + (\bar{X}_{2\cdot1} - \bar{x}_{2\cdot1}) \Big\}^2 + N (\bar{x}_{2\cdot1} - \xi_{2\cdot1})^2$$

$$= \sum (X_{2\cdot1} - \bar{X}_{2\cdot1})^2 + (b_{21} - \beta_{21})^2 \sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + N (\bar{x}_{2\cdot1} - \xi_{2\cdot1})^2$$

$$+ 2 \sum \Big\{ (X_{2\cdot1} - \bar{X}_{2\cdot1})(b_{21} - \beta_{21})(x_1 - \bar{x}_1) \Big\}$$

$$+ 2 \sum \Big\{ (b_{21} - \beta_{21})(\bar{x}_{2\cdot1} - \xi_{2\cdot1})(x_1 - \bar{x}_1) \Big\}$$

$$+ 2 \sum \Big\{ (\bar{x}_{2\cdot1} - \xi_{2\cdot1})(X_{2\cdot1} - \bar{X}_{2\cdot1}) \Big\}$$

トナルガ、上ノ式ノ最後ノ二項ハ何レモ零トナルコトハ直ニ知ラレ、

$$\sum\{(x_{2\cdot1}-\bar{x}_{2\cdot1})(b_{21}-\beta_{21})(x_1-\bar{x}_1)\}$$

$$=(b_{21}-\beta_{21})\sum\left[\{(x_2-\bar{x}_2)-b_{21}(x_1-\bar{x})\}(x_1-\bar{x}_1)\right]$$

$$=0 \qquad [(5)ニヨリ]$$

デアルカラ、結局(9)ガ成立ツトイヘル。

今、N次元空間ニ於テ、方程式

$$\sum(x_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2=r_0^2,$$

$$(b_{21}-\beta_{21})\sqrt{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2}=r_1, \qquad (10)$$

$$\sqrt{N}(\bar{x}_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})=r_2$$

但シr_0, r_1, r_2ハソレゾレ任意ノ定數デ定義サレル、擬曲面ヲ考ヘルト、假定ニヨリ$x_1^{(i)}$ノ各値ハ固定シテヰルノデアルカラ、(10)ハ$x_2^{(i)}$ダケガ

変数デアルトコロノ方程式デアル。従ッテN次元間ニ於ケル（N−2）次ノ擬球面ヲ表スモノト考ヘラレル。

トコロデ（10）ノ第一式ノ左辺ハ（9）デ示シタヤウニ書ケルカラ、方程式

$$\sum(x_{2\cdot1}-\bar{x}_{2\cdot1})^2(b_{2\cdot1}-\beta_{2\cdot1})^2\sum(x_1-\bar{x}_1)+N(\bar{x}_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2=k_0^2$$

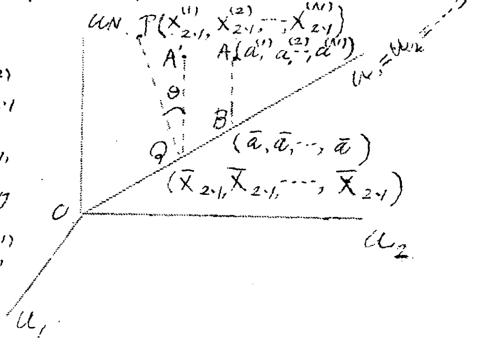
但シk_0, k_1, k_2ハソレゾレ任意ノ定数

$$(b_{2\cdot1}-\beta_{2\cdot1})^2\sum(x_1-\bar{x}_1)=k_1^2 \qquad (11)$$

$$\sum(\bar{x}_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2=k_2^2$$

ハ、N次元空間ニ於ケル（N−2）次ノ擬球面ヲ表ストイッテヨイ。

ソコデ、点P$(\bar{x}^{(1)}_{2\cdot1}, \bar{x}^{(2)}_{2\cdot1}, \cdots, \bar{x}^{(N)}_{2\cdot1})$トQ$(\bar{x}_{2\cdot1}, \bar{x}_{2\cdot1}, \cdots, \bar{x}_{2\cdot1})$デ定マルベクトルQP及ビ点A$(a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(N)})$トB$(\bar{a},$



$\bar{a}, \cdots, \bar{a})$ デ定マルベクトルBAヲ考ヘ，QPガBAトナス角即チQPガBA＝平行ナベクトルQA'トナス角ヲθトスルト，点Pガ$(N-2)$次ノ擬球面(11)ノ上ニアル限リハ，θノ元確率法則$p(\theta)$ハ$(\sin\theta)^{N-4}$＝比例スルトイヘル。

ソレ故，(11)＝於テk_1, k_2ハ固定シテオイテk_0＝ソノ取リ得ルアラユル値ヲ考ヘテ考ヘルナラバ，$x_{2\cdot1}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,N)$ガドノヤウニ変ラウトモ，ベクトルQPトベクトルBAノナス角θノ元確率法則ハ

$$p(\theta) = C\sin^{N-4}\theta \qquad (12)$$

デ表サレル。但シCハ或定数デアル。

サテ

$$\cos\theta = \frac{\sum(x_{2\cdot1}^{(i)} - \bar{x}_{2\cdot1})(a^{(i)} - \bar{a})}{\sqrt{\sum(x_{2\cdot1}^{(i)} - \bar{x}_{2\cdot1})^2}\sqrt{\sum(a^{(i)} - \bar{a})^2}} = r \qquad (13)$$

デアルカラ，(12)カラrノ元確率法則トシテ

$$p(r) = C'(1-r^2)^{\frac{N-5}{2}} \qquad (14)$$

ヲ得ル．ココデC'ハ

$$\int_{-1}^{+1} p(r)\,dr = 1$$

ガ成立ツヤウニ定ムベキ定数デ，容易ニ

$$C' = \frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-3}{2}\right)}$$

トナルコトガワカルカラ，結局

$$p(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-3}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{N-5}{2}} \qquad (15)$$

トナル。即チ定理ハ證明サレタ。

(15) デ表サレル分布法則ヲ自由度 $N-3$ ノ r-分布ト呼バウ。

§3. $|x_{2\cdot1}^{(N)} - \bar{x}_{2\cdot1}|$ ノ顕著性検定

$\xi_{2\cdot1}$ 及ビ β_{21} ガ何レモ未知デアル一ツノ母集團

$$p(x_{2\cdot1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{2\cdot1}} e^{-\frac{(x_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2}{2\sigma_{2\cdot1}}}$$

カラ出タモノトシテハ，$x_{2\cdot1}^{(N)} \equiv x_2^{(N)} - b_{21}x_1^{(N)}$ ガ $\bar{x}_{2\cdot1} \equiv \bar{x}_2 - b_{21}\bar{x}_1$ カラ著シクカケ離レテキルヤウニ見エル時，コノ両者ノ距リ即チ $|x_{2\cdot1}^{(N)} - \bar{x}_{2\cdot1}|$ ガ顕

若デアルカ否カヲ検定スルニハ、次ノヤウニシテ定メタrヲ用ヒテヨイ。

$$r=\frac{x_{2.1}^{(N)}-\bar{x}_{2.1}}{\sqrt{\sum(x_{2.1}-\bar{x}_{2.1})^2}\sqrt{1-\frac{1}{N}}} \qquad (16)$$

即チ $NS_{2.1}^2=\sum(x_{2.1}-\bar{x}_{2.1})^2$ ト置ケバ

$$r=\frac{x_{2.1}^{(N)}-\bar{x}_{2.1}}{S_{2.1}\sqrt{N-1}} \qquad (17)$$

コノrノ導キ方ハ一変数ノ場合ノソレト全ク同様デアルカラ、ソノ一々ノ手順ハココニ記載シナイ。唯注意ヲ要スルノハ、コノrノ元確率法則ニ於ケル自由度ガ$N-3$デアルトイフコトデアル。従ツテFisherノrノ表ヲ用ヒル時ニハ$N-3=n$トセネバナラナイ。

尚ホ

$$NS_{2.1}^2=\sum(x_{2.1}-\bar{x}_{2.1})^2$$

$$=\sum\{(x_2-\bar{x}_2)-b_{21}(x_1-\bar{x}_1)\}^2$$

$$=\sum(x_2-\bar{x}_2)^2-b_{21}^2\sum(x_1-\bar{x}_1)^2$$

$$=NS_2^2-r_{21}^2\cdot NS_2^2=NS_2^2(1-r_{21}^2)$$

從ッテ

$$s_{2\cdot1}^2 = s_2^2(1-r_{21}^2) \quad 即チ \quad s_{2\cdot1} = s_2\sqrt{1-r_{21}}$$

但シr_{21}ハx_2トx_1トノ為ノ見本相関係數デアルコトニ注意スレバ，(16)，(17)デ定義シタτハ次ノヤウニ書ケル

$$\tau = \{x_2^{(N)} - \bar{x}_2 - b_{21}(x_1^{(N)} - \bar{x}_1)\} / \{s_2 \sqrt{(1-r_{21}^2)(N-1)}\} \quad (18)$$

§4。$|X_{2\cdot1}^{(p)} - X_{2\cdot1}^{(q)}|$ノ顯著性檢定

$X_{2\cdot1}^{(p)} \equiv x_2^{(p)} - b_{21}x_1^{(p)}$ ト $X_{2\cdot1}^{(q)} \equiv x_2^{(q)} - b_{21}x_1^{(q)}$ トノ距リガ，$\xi_{2\cdot1}$及ビβ_{21}，ノ未知ナ一ツノ母集團

$$p(x_{2\cdot1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{2\cdot1}} e^{-\frac{(x_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2}{2\sigma_{2\cdot1}^2}}$$

カラ出タ二ツノ値ノ差トシテハ著シイトイッテヨイカドウカヲ檢定スルニハ，次ノヤウニシテ定メラレタτヲ用ヒテヨイ、

$$r = \frac{X_{2\cdot 1}^{(p)} - X_{2\cdot 1}^{(q)}}{S_{2\cdot 1}\sqrt{2N}} \qquad (19)$$

$$r = \frac{X_{2\cdot 1}^{(p)} - X_{2\cdot 1}^{(q)}}{S_{2}\sqrt{2N(1-r_{21}^{2})}} \qquad (20)$$

コノrノ導キ方モ、一変数ノ場合ノソレト全ク同様デ、注意スベキコトハ唯rノ分布ハ$N-3$ヲ自由度トスルコトデアル。

§5. $|{}_1\bar{X}_{2\cdot 1} - \bar{X}_{2\cdot 1}|$ ノ顕著性検定

$X_{2\cdot 1}^{(1)}, X_{2\cdot 1}^{(2)}, \cdots, X_{2\cdot 1}^{(N)}$ ガ既ニ或何等カノ順序ニ並ベラレテアルモノトスル時、ソノ最初ノ$k (< N)$個ノ平均ヲ${}_1\bar{X}_{2\cdot 1}$トスル。

即チ

$${}_1\bar{X}_{2\cdot 1} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_{2\cdot 1}^{(i)}$$

トスル。

コノ時、$X_{2\cdot 1}^{(1)}, X_{2\cdot 1}^{(2)}, \cdots, X_{2\cdot 1}^{(N)}$ ガ同一ノ母集團

$$p(x_{2\cdot 1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{2\cdot 1}} e^{-\frac{(x_{2\cdot 1}-\xi_{2\cdot 1})^2}{2\sigma_{2\cdot 1}^2}}$$

ニ属スルモノトシテハ、${}_1\bar{X}_{2\cdot 1}$ ト $\bar{X}_{2\cdot 1}$ トガ著シク

カケ離レテヰルトイヘルカドウカヲ検定スルタメニハ

$$r = \frac{{}_1\overline{X}_{2\cdot1} - \overline{X}_{2\cdot1}}{S_{2\cdot1}\sqrt{\frac{N-k}{k}}} = \frac{{}_1\overline{X}_{2\cdot1} - \overline{X}_{2\cdot1}}{S_2\sqrt{\frac{N-k}{k}(1-r_{12}^2)}}$$

ヲ用ヒレバヨイ。コノrノ導キ方モ一変数ノ場合ト全ク同様デアルカラ，ココニ記スコトハ略スル。唯ダ注意スベキコトハ，コノrノ分布法則ニ於ケル自由度ハ$N-3$デアルトイフコトデアル。

§6. $|{}_1\overline{X}_{2\cdot1} - {}_2\overline{X}_{2\cdot1}|$ ノ顕著性検定

$X_{2\cdot1}^{(1)}, X_{2\cdot1}^{(2)}, \cdots, X_{2\cdot1}^{(N)}$ ガ既ニ或何等カノ順序ニ並ベラレテアルモノトスル時，ソノ最初ノk個ノ平均${}_1\overline{X}_{2\cdot1}$ト最後ノ$l$個ノ平均${}_2\overline{X}_{2\cdot1}$，即チ

$$ {}_1\overline{X}_{2\cdot1} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_{2\cdot1}^{(i)}, \quad {}_2\overline{X}_{2\cdot1} = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{l-1} X_{2\cdot1}^{(N-i)} $$

但シ $k+l \leqq N$ トスル

ノ二者ガ，${}_1X_{2\cdot1}^{(i)}\ (i=1,2,\cdots,N)$ ガ同一ノ母集團

$$ p(x_{2\cdot1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{2\cdot1}} e^{-\frac{(x_{2\cdot1}-\xi_{2\cdot1})^2}{2\sigma_{2\cdot1}^2}} $$

ニ属スルモノトシテハ，著シクカケ離レテヰルトイヘルカドウカヲ検定シヨウトスル場合ニハ

$$r=\frac{{}_{1}\overline{X}_{2.1}-{}_{2}\overline{X}_{2.1}}{S_{2.1}\sqrt{N\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right)}}=\frac{{}_{1}\overline{X}_{2.1}-{}_{2}\overline{X}_{2.1}}{S_{2}\sqrt{N(1-r_{12}^{2})\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right)}}$$

ヲ用ヒテヨイ。

コノ r ノ導キ方モ亦変数ガ一ツデアル場合ノソレト同一デ、ソノ分布法則ニ於ケル自由度ハ N－3 デアル。