16. 河田龍夫　Fourier 解析と確率論（III）

（特性函数ト Fourier 級数）

1. Fourier 級数＝依テ分布函数ノ特性函数ノ特性ヲ研究スル。之ヲ應用シテ既＝知ラレテヰル二三の定理ヲ導カウ。

$f(t)$ ヲ $(-\infty, \infty)$ デ定義サレタ函数デ（一般＝複素数ヲトル）アルトスル。

$$f_R(t) = f(t) \qquad -R < t < R$$

$$f_R(t) = f_R(t+2R) \qquad |t| \geqq R$$

ナル $f_R(t)$ ヲ定義スル。ソノ Fourier 級数ヲ

$$(1) \quad f_R(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(R)\, e^{in\pi t/R},$$

$$C_n(R) = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-in\pi t/R}\, dt$$

トスル。

$f(0) = 1$ デ且 $R_i \uparrow \infty$ ナル数列 $\{R_i / i = 1, 2 \cdots\}$ が存在シテ $C_n(R_i) \geqq 0$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$ がスベテノ自然数 i ＝對シテ成立スル如キ連續函数及ビ任意ノ有限區間＝オケルソレラノ一様收斂極限函数ノ全体ヲ K トスル

ソウスルト次ノ定理ガ成立スル

定理 1 函数族Kハ特性函数ノ class ニ一致スル．

証明 特性函数ノ函数列ガ任意ノ有限區間デ一様ニ收斂スレバ，ソノ極限函数ハ又特性函数トナルカラ定理ノ充分性ヲ証明スルニハ，モシ一ツノ函数 $f(t)$ ニ対シテ $f(0)=1$ デ $\{R_i\}$ $R_i \uparrow \infty$ ガ存在シ $C_n(R_i) \geqq 0$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ナラバ $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dV(x)$，$dV(x) \geqq 0$，$V(\infty)=1$，$V(-\infty)=0$ ナルコトヲ証明スレバヨイ．

$f_{R_i}(t)$ ハ $t=0$ デ連續デアルカラ

$$(2) \quad f_{R_i}(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(R_i) e^{in\pi t/R_i}$$

ガ（C, 1）総和可能デ $C_n(R_i) \geqq 0$ デアルカラ $\sum C_n(R_i)$ ハ收斂スル故ニ（2）ハ一様且絶対收斂デアル、從テ

$$(3) \quad f_{R_i}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(R_i) e^{in\pi t/R_i}$$

今 $V_{R_i}(x) = \sum_{-\infty}^{K} C_n(R_i)$，$K\pi/R_i \leqq x \leqq (K+1)\pi/R_i$

$(K=\cdots\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ トオク（3）ハ

$$f_{R_i} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dV_{R_i}(x)$$

トカケル $dV_{R_i}(x) \geqq 0$ デ $f_{R_i}(0)=f(0)=1$ デアル

~~189~~
192
カラ

$V_{R_i}(\infty)=1$, $V_{R_i}(-\infty)=0$ 故ニ $V_{R_i}(x)$ ハ確率分布ヲ定義スル．$f_{R_i}(t)$ ハ特性函数デアル．然ルニ定義ニヨリ $-R_i<t<R_i$ デハ $f_{R_i}(t)=f_{R_{i+1}}(t)=\cdots\cdots$

故ニ $f_{R_i}(t)$ ハ任意ノ有限區間デ一様ニ收斂スル，

故ニ $V_{R_i}(x)$ ハ $V(x)$ ニハ連續点デ收斂スル。

$\lim f_{R_i}(t)=f(t)$ デアルカラ

$$(4)\qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\,dV(x)$$

・必要性、$f(t)$ ヲ分布函数 $V(x)$ ノ特性函数トスル．

非減少函数 $V_K(x)$ ヲ次ノ様ニ定義スル

$$V_K(x)=V\left(\frac{(\nu+1)\pi}{K}\right),\quad \frac{\nu\pi}{K}<x\leqq\frac{(\nu+1)\pi}{K},$$

$$\nu=\cdots\cdots,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$$

ソウスルト明カニ $V_K(x)$ ハ $V(x)$ ニソノ連續点デハ收斂スル。故ニ V_K ノ特性函数 $f_K(t)$ ハ $f(t)$ ニ任意ノ有限區間デ一様ニ收斂スル、サテ

$$f_K(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\,dV_K(x)$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu e^{i\nu\pi t/K}$$

トオク。p_ν ハ $V_K(x)$，$x = \nu\pi/K$ ニオケル saltus デアル。$\sum p_\nu = 1$　$p_\nu \geqq 0$，

今 $R_j = Kj$ トスレバ $f_K(t)$ カラ作ラレル $C_n(R_j)$ ハ

$$C_n(R_j) = \frac{1}{2R_j} \int_{-R_j}^{R_j} f_K(t) e^{-in\pi t/R_j} dt$$

$$= p_{n/j} \quad (n \text{ ガ } j \text{ ノ整数倍ノトキ})$$

$$= 0 \quad (\text{其他ノトキ})$$

故ニ $C_n(R_j) \geqq 0$

2.　定理1ヲ用ヒテ先ズ Bochner ノ定理ヲ証明スル

定理 2.　$f(t)$ ガ連続，$f(0)=1$ 且 $g(x)$ ヲ有限區間デ連続デ，其他デハ0トナル任意ノ函数トスルトキ　常ニ

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(x)\, \overline{g(y)}\, dx\, dy \geqq 0$$

ナラバ $f(t)$ ハ特性函数トナル，逆モ成立スル。

特性函数ガ(5)ヲ満足サセルコトハ容易ニ験ス事ガ出来る。

カラ定理ノ前半ヲ証明スレバヨイ.

$g(x)$ ヲ $(0, A)$ デ $\frac{1}{A}e^{-in\pi x/R}$ トシ他デハ 0 トスル.

ソウスルト

$$0 \leqq \frac{1}{A}\int_0^A\int_0^A f(x-y)\,e^{-in\pi(x-y)R}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^A dy\int_{y}^{A-y} f(u)\,e^{-in\pi u/R}\,du$$

$$(6) \qquad = \int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|u|}{A}\right)f(u)\,e^{-in\pi u/R}\,du$$

$$f(t,A) = f(t)\left(1-\frac{|t|}{A}\right), \qquad |t| \leqq A$$

$$= 0 \qquad\qquad , \qquad |t| > A$$

トスル　R ヲ A ヨリ大ナル任意ノ数トスレバ (6) ハ $f_R(t, A)$, Fourier 係数デアル. 之ハ上ニ見タ様ニ負ニナラナイ。又 $f_R(t, A)$ ハ $f(t)$ ニ任意ノ有限區間デ一様ニ收斂スルカラ吾々ノ定理ガ証明サレタ。

3.　次ニ特性函数ノ特性ニ関スル Khintchine ノ定理ニ對應スルモノヲ挙ヘル.

今 $\varphi_{R_i}(x) \in L_2(-R_i, R_i)$ ヲ $2R_i$ ヲ週期トスル

週期函数トスル

$$(7)\quad f^{i}(t)=\frac{1}{c}\int_{r_i}^{r_i}\varphi_{r_i}(x+t)\,\overline{\varphi_{r_i}(x)}\,dx,$$

$$c=c_{r_i}=\left(\int_{-r_i}^{r_i}|\varphi_{r_i}(x)|^{i}dx\right)^{-1}$$

ハ $f_i(0)=1$ ヲ満足シ，連続デアル．

定理 3. (7) ノ形ノ函数及ビ $\{r_i\}$，$r_i \uparrow \infty$ ナル正数ノ数列ガ存在シテ (7) ノ函数ノ任意有限區間ニオケル一様收斂極限函数ハ一ツノ分布函数ノ特性函数ニナル。逆モ成立スル。

前半ノ証明　是ハ明ラカデアル。

$f^{i}(t)$ ノ $(-r_i, r_i)$ ニ於テノ Fourier 係数ハ

$$C(r_i)=\frac{1}{2r_i}\int_{-r_i}^{r_i}e^{-in\pi t/r_i}f^{i}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2r_i}\int_{-r_i}^{r_i}e^{-in\pi t/r_i}dt\int_{-r_i}^{r_i}\varphi_{r_i}(x+t)\,\overline{\varphi_{r_i}(x)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2r_i}\int_{-r_i}^{r_i}\overline{\varphi_{r_i}(x)}\,e^{in\pi x/r_i}dx\int_{-r_i}^{r_i}\varphi(x+t)$$

$$e^{-in\pi(x+t)/r_i}\,dt$$

$$= \frac{1}{2r_i}\left|\int_{-r_i}^{r_i} \varphi_{r_i}(x)e^{-in\pi x/r_i}dx\right|^2 \geqq 0$$

トナルカラデアル

後半　$f(t)$ ヲ一ツノ特性函数トスレバ $R_i = r_i$ ト選ベハ定理 I ニヨリ

$$f_{R_i}(t) \sim \sum C_n(R_i)e^{in\pi t/R_i}, \quad C_n(R_i) \geqq 0$$

ナル $\{R_i\}$ ガ存在スル事ニナル，コノ級数ハ定理 I ノ証明ニ於ケル如ク收斂スルカラ

$$f_{R_i}(t) = \sum C_n(R_i)e^{in\pi t/R_i} \text{　トナリ}$$

$\sqrt{C_n(R_i)} = \gamma_i$ トオクト $\sum \gamma_i^2 < \infty$ 故ニ

$$\gamma_n^i = \frac{1}{2R_i}\int_{-R_i}^{R_i} e^{-in\pi x/R_i}\varphi_i(x)\,dx$$

ナル $\varphi_i(x)$ ガアル 即チ $\varphi_i(x) \sim \sum \gamma_i e^{in\pi x/R_i}$，

ソウスルト Parseval ノ定理カラ

$$f_{R_i}(t) = \sum (\gamma_n^i)^2 e^{in\pi t/R_i}$$

$$= \frac{1}{2R_i}\int_{-R_i}^{R_i} \varphi_i(x+t)\overline{\varphi_i(x)}\,dx.$$

$f^{\circ}_{R_i}(t) \longrightarrow f(t)$ （有限區間デ一様ニ） デアルカラ，

吾々ノ定理ガ証明サレタ。