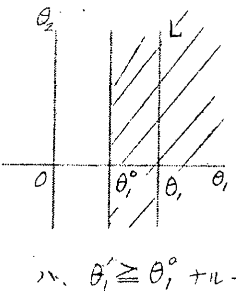
24. 複合領域假說檢定ニツイテ

小樽經濟專門學校　　宮澤光一

佐藤良一郎先生ガ統計的領域假說檢定ノ理論ニツイテ、本誌上ニ興味深イ論文ヲ發表サレタ。　今單純假説ト複合假説ノ立場カラ考ヘレバ更ニ複合的領域假説檢定ノ問題トモ云フベキモノガ起ル譯デ、コレニツイテ若干ノ考察ヲスルコトニスル。

母集團確率法則ガ $p+q$ 個ノ媒変数 $\theta_1, \cdots, \theta_p, \theta_{p+1}, \cdots, \theta_{p+q}$ ニ從屬スルトシ，假説空間タル $O-(\theta_1 \cdots \theta_p\ \theta_{p+1} \cdots \theta_{p+2})$ 空間ヲ Ω トシ，ソノ部分空間タル $O-(\theta_1 \cdots \theta_p)$ 空間ヲ Ω'，$O-(\theta_{p+1} \cdots \theta_{p+2})$ 空間ヲ Ω'' トス。　今 Ω' 内ニ一ツノ假説領域 ω ヲ設ケ、假説点ガ ω 内一点ヲ通リ、Ω'' ニ平行ナ部分空間 L 上アル限リ、$P\{E \in w\} \geqq \alpha$ デアリ、Ω' ニ関スル ω ノ補空間ヲ ω' トスルニ，ω' 内ノ一点ヲ通リ、Ω'' ニ平行ナ部分空間 L' 上ニ假説点デアル限リ $P\{E \in w\} \leqq \alpha$ ナル如キ領域 w ヲ見本空間 W 内ニ求メ、カヽル領域ガ幾ツカアルトキ，ソノ中デ檢定ノ目的ニ最モ有効ナモノヲモッテ合格圏ヲ決定シヨウトスルノデアル。



例ヘバ $p \geqq q = 1$，即チ母集團確率法則ガ二ツノ媒変数 θ_1, θ_2 ニノミ從屬スルトキヲ考ヘルニ、θ_1 軸ヲ Ω'，θ_2 軸ヲ Ω'' トシ、Ω' デ $\theta_1 \geqq \theta_1^0$ ナル領域ヲ ω トスル。然ラバ上ノ意味ハ、$\theta_1' \geqq \theta_1^0$ ナル一点 θ_1' ヲ通リ θ_2 軸ニ平行ナ直線 L' 上ニ假説点ガアル限リ $P\{E \in w\} \geqq \alpha$ デアリ、$\theta_1'' \leqq \theta_1^0$ ナル一点 θ_1'' ヲ通リ θ_2 軸ニ平行ナ直線 L'' 上ニ假説点ガアル限リ $P\{E \in w\} \leqq \alpha$ ナル如キ見本空間ノ領域 w ノ中デ最モ有効ナモノヲモッテ合格圏トシヨウト云フノデアル。
コノタメニ次ノ如キ領域ヲ求メルコトニスル。

~~337~~

$$P\{E \in w \mid \theta_1^0, \theta_2\} = \alpha \qquad (1)$$

ガ θ_2 ノ値如何ニカヽハラズ成立スル如キ領域ヲ先ヅ求メル；

以下 $P\{E \in w \mid \theta_1, (\theta_2)\}$ ヲ以テ，θ_1 ノ値ガ θ_1 ナル限リ θ_2 ノ値ヲ指定セザル母集團ニ於イテ，$E \in w$ ナル確率ヲ表スモノトシ，(1) ヲ満ス領域ノ中デ

$$\left.\frac{d\, P\{E \in w \mid \theta_1, (\theta)\}}{d\, \theta_1}\right|_{\theta_1 = \theta_1^0} = \max.\ (\text{或ハ} \min.) \qquad (2)$$

ナラシメル領域 w_0 ヲ以テ目標トスル。

コヽニ條件(1)ハ θ_2 ニ関シ similar to W ニシテ大イサ α ナル領域ヲ求メルコトニシテ，コレニ関シテハ次ノ Neyman ノ定理ガ有効デアル。

即チ

見本 $E(x_1, \cdots, x_n)$ ノ確率法則ヲ $p(x_1, \cdots, x_n \mid \theta_1^0, \theta_2)$ トシ

$$\phi = \frac{\partial \log p}{\partial \theta_2} \quad , \quad \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2}$$

トスルトキ $\phi' = A + B\phi$

(コヽニ A, B ハ $x_1, \cdots, x_n$ トハ独立) ノ形ニ書ケルトキハ，(1) ヲ満ス領域 w ハ

$$P\{E \in w(\phi) \mid \theta_1^0, (\theta_2)\} = \alpha P\{E \in W(\phi) \mid \theta_1^0, (\theta_2)\} \qquad (3)$$

ナル如キ部分 $w(\phi)$ カラ構成サレルコトが必要十分ノ條件ナリ。

コヽニ $w(\phi)$, $W(\phi)$ ハ $\phi = const.$ ナル部分空間ト w, W トノ共通部分ヲ表ス。

次ニ下ガ成立スルコトヲ假定スル。

ϕ ノトリ得ル値ノ領域ヲ D トスルニ、

$$P\{E \in w \mid \theta_1^0, (\theta_2)\} = \int_D P\{E \in w(\phi) \mid \theta_1^0, (\theta_2)\} d\phi$$

$$\left.\frac{d\, P\{E \in w \mid \theta_1, (\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1 = \theta_1^0} = \int_D \left.\frac{\partial P\{E \in w(\phi) \mid \theta_1^0, (\theta_2)\}}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1 = \theta_1^0} d\phi$$

然ルトキ(1)ヲ満ス領域ノ中デ(2)ヲ満スモノハ、殆ドスベテノ ϕ ノ値ニ対シテ

$$\left.\frac{P\{E \in w(\phi) \mid \theta_1, (\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1 = \theta_1^0} = max. \quad (\text{或ハ } min.)$$

ナコトヲ示サン。

今 (3) ヲ満ス領域 v ニシテ、測度正ナル ϕ ノ

値ノ集合 S ニ於テ

$$\left.\frac{dP\{E\in v(\phi)\mid\theta_1,(\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} > \left.\frac{dP\{E\in w(\phi)\mid\theta_1,(\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0}$$

S ノ補集合 S' ニ於テ

$$\left.\frac{dP\{E\in v(\phi)\mid\theta_1,(\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} \leqq \left.\frac{dP\{E\in w(\phi)\mid\theta_1,(\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0}$$

ナルモノガ存在スルトス。コノトキ

$$\phi\in S \quad \text{ナルトキ} \quad u(\phi)=v(\phi)$$
$$\phi\in S' \quad \text{ナルトキ} \quad u(\phi)=w(\phi)$$

デ定義サレル $u(\phi)$ カラ構成サレル領域 u ヲトレバコレハ (1) ヲ満ス。然ルニ

$$\left.\frac{dP\{E\in u\mid\theta_1,(\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} = \int_{S+S'} \left.\frac{dP\{E\in u(\phi)\mid\theta_1,(\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} d\phi$$

$$=\int_{S}+\int_{S'} > \int_{S} \left.\frac{dP\{E\in w(\phi)\mid\theta_1,(\theta_2)\}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} d\phi + \int_{S'} \frac{dP\{E\in w}{d\theta_1}$$

$$\left.\frac{(\Phi) \mid \theta_1, (\theta_2)\}}{}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} d\Phi$$

$$= \left.\frac{d\,P\{E \in w \mid \theta_1, (\theta_2)\}}{d\,\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0}$$

ガ成立スルカラナリ。

カクテボメル合格圏 w_0 ハ (3) ヲ満スモノノ中デ殆ドスベテノ Φ ノ値ニ於シ

$$\left.\frac{d\,P\{E \in w(\Phi) \mid \theta_1, (\theta_2)\}}{d\,\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_1^0} = \max.\ (\text{或ハ} \min.)\ .$$

ナラシナル部分カラ構成サレルコトニナル。

而シテカヽル部分ハ、佐藤先生ノ論文ニ於ケルト同様ニ次ノ如キモノガボメレバ十分ナリ。即チ $\Phi = \mathrm{const.}$ ナル部分空間ノ上ノ領域 $w(\Phi)$ ニシテ ((2) ヲ max. ナラシナルニハ)

内部デハ

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta_1} p(x_1 \cdots x_n \mid \theta_1\ \theta_2)\right|_{\theta_1=\theta_1^0} \geqq k(\Phi)\, p(x_1 \cdots x_n \mid \theta_1^0\ \theta_2)$$

外部デハ

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta_1} p(x_1 \cdots x_n \mid \theta_1\ \theta_2)\right|_{\theta_1=\theta_1^0} \leqq k(\Phi)\, p(x_1 \cdots x_n \mid \theta_1^0\ \theta_2)$$

ナルモノヲ求メルコトニナル。コノニ $\lambda(\phi)$ ハ (3) ガ成立スル如ク定メラレル常数ナリ。

以上ノ立場ニ立ツキ、二・三ノ例ヲ示サン。

$\boxed{\text{例 1}}$ 見本 $E(x_1, \cdots, x_n)$ ガ正常母集團

$$p(x \mid a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (N)$$

カラ射倖的ニトラレタモノトシ、何等カノ理由ニヨリ、標準偏差 σ ノ値ニツイテハ問ハナイガ、平均値 a ガ $a \equiv a_0$ ナリトノ複合的領域假説ヲ検定シタイ際ノ合格圏ヲ求メルコト。即チ

$$p_0 = p(E \mid a_0 \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{\Sigma (x_i - a_0)^2}{2\sigma^2}}$$

トシ、$P\{E \in w \mid a_0 \sigma\} = \int \cdots \int_w p_0 \, dx_1 \cdots dx_n = \alpha$ (4)

ガ σ ノ値如何ニカヽハラズ成立スル如キ領域ノ中デ

$$\left.\frac{d P\{E \in w \mid a, (\sigma)\}}{d a}\right|_{a = a_0} = \max. \qquad (5)$$

ナラシメル領域 w_0 ヲ求メントス。コノトキ

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{\partial \log p_0}{\partial \sigma} = -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{n}{\sigma^3}\left\{(\bar{x}-a_0)^2 + s^2\right\} \\[2ex] \varphi' = -\dfrac{2n}{\sigma^2} - \dfrac{3}{\sigma}\varphi \end{cases}$$

ナル故 Neyman ノ定理ノ条件ガ満サレル。ヨッテ求メル領域ハ

$\varphi = \mathrm{const.}$ 即チ

$$(\bar{x}-a_0)^2 + s^2 = \mathrm{const.}$$

ナル部分空間ノ上デ

内部デハ $$\left.\frac{\partial p(E\,|\,a\,\sigma)}{\partial a}\right|_{a=a_0} \geqq k(\varphi)\, p_0 \qquad (6)$$

外部デハ $$\left.\frac{\partial p(E\,|\,a\,\sigma)}{\partial a}\right|_{a=a_0} \leqq k(\varphi)\, p_0$$

ナル如キ部分 $w(\varphi)$ ヲ求メ、コレカラ構成サレル領域ガ求メルモノトナル。

ココニ $k(\varphi)$ ハ (3) ガ成立スル如ク定メラレル函数ナリ。而シテ

$$\left.\frac{\partial p(E\,|\,a\,\sigma)}{\partial a}\right|_{a=a_0} = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-a_0)\, p_0$$

~~343~~

ナル故 (6) ノ條件ハ

$$\bar{x}-a_0 \geqq t'(\psi) \qquad (7)$$

トナル，今 $\bar{x}-a_0=u, \ (\bar{x}-a_0)^2+s^2=\psi$

トオケバ

$$p(u,\psi)=C\sigma^{-n}(\psi-u^2)^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{n\psi}{2\sigma^2}}$$

從ツテ又

$$p(\psi)=C'\sigma^{-n}\psi^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{n\psi}{2\sigma^2}}$$

ナコトカラ。(3), (5) ナル條件ハ次トナル。

$$\int_{t}^{\sqrt{\psi}} C\sigma^{-n}(\psi-u^2)^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{n\psi}{2\sigma^2}}du=C'\sigma^{-n}\psi^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{n\psi}{2\sigma^2}}$$

即チ

$$C''\int_{t}^{\sqrt{\psi}}(\psi-u^2)^{\frac{n-3}{2}}du=\alpha\psi^{\frac{n-2}{2}}$$

今 $u=\dfrac{z\sqrt{\psi}}{\sqrt{1+z^2}}$ ト 変換 スレバ

$$du=\frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{(1+z^2)^3}}dz$$

$$C''\int_{z_0}^{\infty}\psi^{\frac{n-3}{2}}\left(1-\frac{z^2}{1+z^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\psi^{\frac{1}{2}}}{(1+z^2)^{3/2}}dz$$

$$= \alpha \psi^{\frac{n-2}{2}}$$

即チ $$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{z_0}^{\infty} (1+z^2)^{-\frac{n}{2}} dz = \alpha \quad (8)$$

ナラシメル z_0 ヲ求メ（コレハ z ー分布表カラ直チニ求マル）

$$z = \frac{\bar{x} - a_0}{s} \geqq z_0$$

ガ求メル合格圏 w_0 ナリ。

コノ合格圏 w_0 ハ次ノ性質ヲモツ。

i) $P\{E \in w_0 \mid a, (\sigma)\}$ ヲ a ノ函数ト考ヘタトキ、a ノ単調増加函数ナリ。

ii) a_0 ノ近傍ノ値 a ニ対シ (4) ヲ満足サセル領域 w ノ中デ w_0 ハ、

$a > a_0$ ナルモノヲ合格サセル確率，即チ $P\{E \in w \mid a, (\sigma)\}$ ヲ最大ニシ

$a < a_0$ ナルモノヲ合格サセル確率，即チ $P\{E \in w \mid a, (\sigma)\}$ ヲ最小ニス。

先ツ i) ヲ証セン，

a ノ任意ノ値 a ニ対シ (4),(5) ヲ満ス領域ヲ w トスレバ、上ノ w_0 ノ構成ト全ク同様

~~345~~

ニシテ，(8) ヲ満ス z_0 ヲトツテ，$\frac{\bar{x}-a}{s} \geqq z_0$ ナル領域トシテ w ハ決定サレル。然ルニ，$a > a_0$ ナラ $\frac{\bar{x}-a}{s} < \frac{\bar{x}-a_0}{s}$，ヨツテ $w \subset w_0$ ナルベシ，

即チ $$P\{E \in w_0 \mid a_0(\sigma)\} > P\{E \in w \mid a(\sigma)\} = \alpha$$

而モ $w \subset w_0$ ナル関係カラ $P\{E \in w_0 \mid a(\sigma)\}$ ハ a ガ増大スルニ従ツテ，タエズ増加ス，同様ニ，$a < a_0$ ナラ，上ノ値ハ a ト共ニタエズ減小ス，ヨツテ i) ガ証サレタ，従ツテ又 ii) ハ (5) ノ條件カラ成立スルコトニナル。

例2　見本 $E(x_1, \cdots, x_n)$ ハヤハリ正常母集團 (ν) カラ射倖的ニトラレタモノトシ，今度ハ均値 a ニツイテハ問ハナイガ，標準偏差 σ ニ對シテ，$\sigma \leqq \sigma_0$ ナリトノ複合領域假説ヲ検定セントスル際ノ合格圏ヲ求メルコト，ソノタメニハ

$$p_0 = p(E \mid a\,\sigma_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{\sum (x_i - a)^2}{2\sigma_0^2}}$$

トシ，

$$P\{E \in w \mid \sigma_0\, a\} = \int \cdots \int_w p_0\, dx_1 \cdots dx_n = \alpha \tag{9}$$

ガ a ノ値如何ニカヽハラズ成立スル如キ領域 w ノ中デ

$$\left.\frac{p\{E\in w\mid\sigma_1(a)\}}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} = \min. \qquad (10)$$

ナラシメル領域ヲ求メルコトニスル。コノトキ

$$\phi = \frac{\partial \log p_0}{\partial a} = \frac{n(\bar{x}-a)}{\sigma_0{}^2}, \quad \phi' = -\frac{n}{\sigma_0{}^2}$$

ナル故、ヤハリ Neyman ノ定理ノ條件ガ満サレル、

ヨツテ求メル領域ハ $\phi = const.$ 即チ $\bar{x} = const.$ ナル平面上デ

内部デハ $$\left.\frac{\partial p(E\mid a\,\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} \leqq k(\phi)\,p_0 \qquad (11)$$

外部デハ $$\left.\frac{\partial p(E\mid a\,\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} \geqq k(\phi)\,p_0$$

ナル如キ部分カラ構成サレル、コヽニ $k(\phi)$ ハ (3) カ成立スル如ク定メラレル[illegible]ナリ。

而シテ $$\left.\frac{\partial p(E\mid a\,\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} \doteqdot \left\{-\frac{n}{\sigma_0}+n\,\frac{(\bar{x}-a)^2+s^2}{\sigma_0{}^3}\right\} p_0$$

~~347~~

ナル故條件 (11) ハ

$$-\frac{n}{\sigma_0}+n\frac{(\bar{x}-a)^2+s^2}{\sigma_0{}^3} \geqq k(p)\text{, 即チ } \frac{ns^2}{\sigma_0{}^3} \geqq k(p)$$

$$+\frac{n}{\sigma_0}-\frac{n}{\sigma_0{}^3}(\bar{x}-a)^2$$

或ハ $$\frac{ns^2}{\sigma_0{}^2} \geqq k'(p)$$

ナル條件トナル而シテ、$\bar{x}$ ト s^2 トハ互ニ独立ニシテ。

$$\psi=\frac{ns^2}{\sigma_0{}^2}$$ トオケバ

$$p(\psi)=c\,\psi^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{\psi}{2}}$$

ナル故結局 $$\int_0^{\psi_0} c\,\psi^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{\psi}{2}}d\psi=\alpha \quad (12)$$

ヲ満ス ψ_0 ヲ χ^2ー分布表カラ求メテ

$$s^2 \geqq \frac{\sigma_0{}^2}{n}\psi_0$$

ガ求メル合格圏 w_0 トナル。

コノ合格圏 w_0 ハ次ノ性質ヲモツ.

i) $P\{E\in w_0 \mid \sigma(a)\}$ ヲ σ ノ函数ト考ヘタトキ, σ ノ単調減少函数ナリ.

ii) σ_0 ノ近傍ノ値 σ ニ對シテ (9) ヲ満足サセル領域 w ノ中 w_0 ハ $\sigma<\sigma_0$ ナモノヲ合格サセル確率, 即チ $P\{E\in w_0 \mid \sigma_1(a)\}$ ヲ最大ニシ

$\sigma>\sigma_0$ ナモノヲ合格サセル確率即チ $P\{E\in w \mid \sigma_1(a)\}$ ヲ最小ニス

先ヅ i) ヲ証セン.

σ ノ任意ノ値 σ ニ對シ (9) (10) ヲ満ス領域 w ヲ求メヨウトスレバ, コレハ w_0 ヲ求メタト全ク同様ニシテ, (12)ノ ψ_0 ヲトリ. $\delta^2 \leqq \frac{\sigma^2}{n}\psi_0$ トシテ決定サレル, 然ルニ.

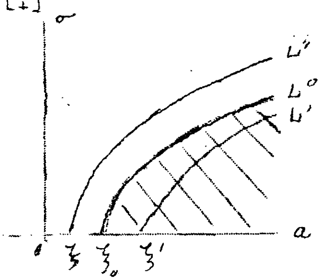
$\sigma>\sigma_0$ ナラ $\delta^2 \leqq \frac{\sigma_0^2}{n}\psi_0$ ナル限リ $\delta^2 \leqq \frac{\sigma^2}{n}\psi_0$ ナリ, 即チ. $\omega_0\subset\omega$ ヨッテ, $P\{E\in w_0 \mid \sigma(a)\} < P\{E\in w \mid a(\sigma)\}=\alpha$ ナルベシ.

而モコノ減少ノ仕方ハ, $\omega_0\subset\omega$ ノ関係カラ考ヘテ単調ナリ, ヨッテ i) ガ証サレタ, 従ッテ又 ii) ハ條件 (10) カラ成立ス

$\boxed{\text{例3}}$ 見本 $E(x_1,\cdots,x_n)$ ハヤハリ正常母集團 (N) カラトラレタモノトシ、

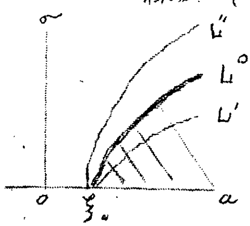
$a \geqq a_0$, 且 $\sigma \leqq \sigma_0$ ナル領域假説ニ對シテ合格圏ヲ定メタイノデアルガ、複合領域假説ノ問題トシテ次ノ二ツノ場合ヲ考察スル假説空間タル (a,σ)

[I]



平面上デ a 軸上ニ頂点ヲ有スル合同ナル抛物線ノ群 $\{L\}$, $a=\xi+\eta_0\sigma^2$ ヲ設ケ ξ ノ一ツノ値 ξ_0 ヲ指定シ。$\xi'\geqq\xi_0$ ナル点 ξ' ヲ通ル抛物線 L' 上ニ假説点ガアル限リ $P\{E\in w\}\geqq\alpha$ ナラシメ、$\xi''\leqq\xi_0$ ナル点 ξ'' ヲ通ル抛物線 L'' 上ニ假説点ガアル限リ $P\{E\in w\}\leqq\alpha$ ナラシメル如キ領域 w ノ中最モ有効ノモノヲトッテ、合格圏ニショウトスル場合。

[II] $a=\xi_0$ ナル一指定点ヲ頂点トスル抛物線群 $\{L\}$,



$a=\xi_0+\eta\sigma^2$ ヲ考ヘ η ノ一ツノ値 η_0 ヲ指定シ、$\eta'\geqq\eta_0$ ナル η' ニ對應スル抛物線 $L':a=\xi_0+\eta'\sigma^2$, ノ上ニ

假說点ガアル限リ、$P\{E\in\omega\}\geqq\alpha$ ナラシメ、$\eta'\leqq\eta_0$。ナル η' ニ対応スル抛物線 L' 上ニ假說点ガアル限リ、$P\{E\in\omega\}\leqq\alpha$ ナラシメル如キ領域 ω ノ中、最モ有効ナモノヲトッテ、合格圏ニシヨウト云フ場合、

[I] ノ場合ニツイテ：

コノトキ母集團確率法則 $p(x|a,\sigma)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

ニ於テ　$a=\xi+\eta_0\sigma^2$　（η_0 ハ固定）

ナル故、見本 $E(x_1\cdots x_n)$ ニ對スル確率法則ハ次式デ与ヘラレル、

$$p(E|\xi,\sigma)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi-\eta_0\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$$

コノトキ　$P\{E\in w\mid\xi_0,\sigma\}=\alpha$　(13)

ガ σ ノ値如何ニカヽハラズ成立スル如キ領域 w ノ中デ

$$\left.\frac{d\,P\{E\in w\mid\xi,(\sigma)\}}{d\,\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=max. \qquad (14)$$

ナラシナル領域 w_0 ヲトツテ合格圏トスル。

而シテ

$$p_0=p(E|\xi_0,\sigma)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-n\frac{(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2)^2+s^2}{2\sigma^2}}$$

$$\varphi = \frac{\partial \log p_0}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{n}{\sigma^3}\left\{2\eta_0\sigma^2(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2) + (\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2)^2 + s^2\right\}$$

$$\varphi' = \frac{n}{\sigma^2} - 4n\eta_0^2 - \frac{3n}{\sigma^4}\left\{2\eta_0\sigma^2(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2) + (\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2)^2 + s^2\right\}$$

$$= -\frac{2n}{\sigma^2} - 4n\eta_0^2 - \frac{3}{\sigma}\varphi$$

カクテ、コノ場合モ、Neyman ノ定理ノ條件ガ満サレル（実ハコレガ満サレルヤウニスルタメ曲線群 $\{L\}$ ヲ拋物線ニトツタノデアル。）
ヨツテ求ムル領域ハ $\varphi = \mathrm{const.}$ ナル部分空間ノ上デ

内部デハ $\left.\dfrac{\partial p(E|\xi,\sigma)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0} \geqq k(\varphi)\, p_0$

外部デハ $\left.\dfrac{\partial p(E|\xi,\sigma)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0} \leqq k(\varphi)\, p_0$

ナル如キ部分 $w(\varphi)$ カラ構成サレル。コヽニ $k(\varphi)$ ハ (2) ヲ満足スル如ク定メラレル常数ナリ。

而シテ

$$\left.\frac{\partial p(E|\xi,\sigma)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0} = \frac{n}{\sigma^2}\left(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2\right) p_0$$

ナル故 上ノ條件ハ結局 $\phi = const.$ ノ上デ内部デハ

$$\bar{x}-\xi_0 \geqq k'(\phi)$$

ナル如キ部分ヲ求メルコトニナル，然ルニ

$\phi = const.$ ハ

$$2\eta_0\sigma^2(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2)+(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2)^2+s^2 = const.$$

即チ $$(\bar{x}-\xi_0)^2+s^2 = const.$$

ト同様ナリ，而シテ

$$p(\bar{x},s^2) = C\sigma^{-n}(s^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-n\frac{(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2)^2+s^2}{2\sigma^2}}$$

ナコトカラ，　$\bar{x}-\xi_0 = u$，$(\bar{x}-\xi_0)^2+s^2 = v$

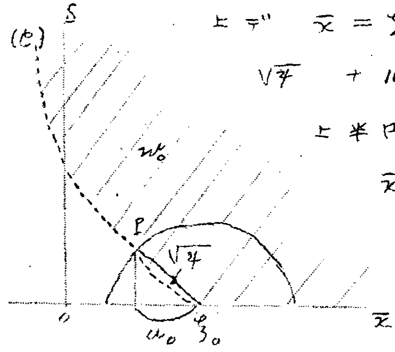
トオケバ $$p(u,v) = C\sigma^{-n}(v-u^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-n\frac{(u-\eta_0\sigma^2)^2+v-u^2}{2\sigma^2}}$$

ヨッテ求メル部分 $w(\psi)$ ハ次ノ条件カラ与ヘラレル

$$\int_{u_0}^{\sqrt{\psi}} p(u,v)\,du = \alpha\, p(\psi) = \alpha \int_{-\sqrt{\psi}}^{\sqrt{\psi}} p(u,v)\,du$$

$$\int_{u_0}^{\sqrt{\psi}} (\psi-u^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{n\eta_0 u}\,du = \alpha \int_{-\sqrt{\psi}}^{\sqrt{\psi}} (\psi-u^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{n\eta_0 u}\,du \qquad (15)$$

ヲ満足スル u_0 ヲ各 ψ ノ値ニ対シテ求メル



而シテ、$\psi = const.$ ハ $(\bar{x}, s)$ 平面上デ $\bar{x} = \xi_0$ ヲ中心トシ，半径 $\sqrt{\psi}$ ナル上半円ヲ表ス故，コノ上半円周上ニ ξ_0 カラ測ッタ $\bar{x}$ー座標ガ u_0 ナル点 P ヲ定メ，コレヲ連ネテ行ケバ一ツノ曲線 (C) ガ得ラレル，コノ曲線 (C) ト $\bar{x}$ 軸上デ $\bar{x} \geqq \xi_0$ ナル半直線トニ囲コレタ部分ガ求メル合格圏 w_0 ト云フコトニナル。

コノ合格圏 w_0 ハ次ノ性質ヲモツ。

i) $P\{E \in w_0 \mid \xi_1(\sigma)\}$ ヲ ξ ノ函數ト考ヘタトキ、ξ ノ單調増加函數ナリ。

ii) ξ_0 ノ近傍ノ値 ξ ニ対シ (13) ヲ滿足サセル領域ノ中デ w_0 ハ

$\xi > \xi_0$ ナモノヲ合格サセル確率，即チ $\xi(>\xi_0)$ ヲ頂点トスル拋物線 L 上ニ假説点ガアル限リ，コレヲ合格サセル確率 $P\{E \in w \mid \xi_1(\sigma)\}$ ヲ最大ニシ，$\xi < \xi_0$ ナモノヲ合格サセル確率ヲ最小ニス。

先ヅ i) ヲ証セン。

上ノ P 点ノ決定カラ明カナ如ク $(\bar{x}, S)$ 平面上デ，任意ノ点 $\bar{x} = \xi$ カラ出発シテ (C) ト合同ナ曲線ト，半直線 $\bar{x} \geqq \xi$ トニ囲スレル領域ヲ w トスレバ $P\{E \in w \mid \xi_1(\sigma)\} = \alpha$ ナリ

而シテ

$\xi > \xi_0$ ナラ $w_0 \supset w$，$\therefore P\{E \in w_0 \mid \xi_1(\sigma)\} > P\{E \in w \mid \xi_1(\sigma)\} = \alpha$

$\xi < \xi_0$ ナラ $w_0 \subset w$，$\therefore P\{E \in w_0 \mid \xi_1(\sigma)\} < P\{E \in w \mid \xi_1(\sigma)\} = \alpha$

而モコノ増加ハ ξ ト共ニタエズ増加スルコト $w_0 \supset w$ ノ関係カラ明カナリ。カクテ i) ガ証サレ，從ッテ ii) ハ (14) ノ條件カラ成立ス。

[II] ノ場合ニツイテ,

コノトキ見本 $E(x_1, \cdots, x_n)$ ニ対スル確率法則

ハ次ノ式デ与ヘラレル。 O.

$$p(E|\eta,\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi_0-\eta\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p_0 = p(E|\eta_0,\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi_0-\eta_0\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P\{E\in w|\eta_0,\sigma\} = \int\cdots\int_w p_0\, dx_1\cdots dx_n = \alpha \tag{16}$$

ガ σ ノ値如何ニカヽハラズ成立スル如キ領域 w ノ中

$$\left.\frac{d P\{E\in w|\eta,(\sigma)\}}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = max. \tag{17}$$

ナラシメルモノヲ求メテ合格圏トスル,

然ルニ、コノトキ、$p(E|\eta_0,\sigma)$ ハ[I]ノ場合ノ

$p(E|\xi_0,\sigma)$ ト全ク同一ナリ。ヨッテ,(16) ヲ満

ス領域ハ[I]ノ場合ト全ク同様ニシテ

$$\psi = (\bar{x}-\xi_0)^2 + S^2 = const,$$

ノ上デ (3) ヲ満ス部分カラ構成サレル, コレガ

(17) ヲ満スタメニハ

内部デ
$$\left.\frac{\partial p(E\,|\,\eta,\sigma)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_0}\geqq k(\varphi)\,p_0$$

外部デ
$$\left.\frac{\partial p(E\,|\,\eta,\sigma)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_0}\leqq k(\varphi)\,p_0$$

ナモノニ求メレバヨイ。 然ルニ。

$$\left.\frac{\partial p(E\,|\,\eta,\sigma)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_0}=n(\bar{x}-\xi_0-\eta_0\sigma^2)\,p_0$$

ナル故，結局内部デハ

$$\bar{x}-\xi_0\geqq k'(\varphi)$$

ナルモノヲ求ヌルコトトナリ，従ッテ [I] ノ場合ノ條件トスベテガ一致スル故、[I] デ求メタ合格圏ガ同時ニ又 [II] ノ場合ノ合格圏 w_0 ナリト云フコトニナル。コレハ次ノ性質ヲモツ。

i) $P\{E\in w_0\,|\,\eta,(\sigma)\}$ ヲ η ノ函数ト考ヘタキ、η ノ單調増加函数ナリ。

ii) η_0 ノ近傍ノ値 η ニ対シ(16) ヲ満ス領域 w ノ中デ w_0 ハ $\eta>\eta_0$ ナモノヲ合格サセル確率，即チ コノ η ニ対應スル抛物線 L 上ニ假説点ガアル限リコレヲ合格サセル確率 $P\{E\in w\,|\,\eta,(\sigma)\}$ ヲ最大ニシ，$\eta<\eta_0$ ナルモ

ノヲ合格サセル確率ヲ最小ニス

先ヅ i) ヲ証セン。

積分 (15) デ $\omega/\sqrt{F} = v$ ト変換スレバ (17) ノ条件ハ下トナル。

$$\int_{\frac{\omega_0}{\sqrt{F}}=v_0}^{1}(1-v^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{n\eta_0\sqrt{F}v}\,dv = \alpha\int_{-1}^{1}(1-v^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{n\eta_0\sqrt{F}v}\,dv \qquad (18)$$

コノ積分ノ性質ニツイテ考ヘルタメ、次ノ函数

$$f_\beta(v)=(1-v^2)^{p}e^{\beta v}$$

但シ $p=\frac{n-3}{2}$ $(>2$トス$)$, $\beta=n\eta\sqrt{F}>0$

ヲ区間 $-1\leqq v\leqq 1$ デ調ベテミル。先ヅ

$$f'_\beta(v)=-(1-v^2)^{p-1}e^{pv}(\beta v^2+2pv-\beta)$$

ナル故 $(-1, 1)$ デ $f'_\beta(v)=0$ ノ根ハ

$$v=\pm 1,\ \frac{\sqrt{p^2+\beta^2}-p}{\beta}\ (>0)$$

ナリ。

ヨツテ、 $f_\beta(v)$ ハ $(-1, 1)$ デ唯一ツノ極値（極大ナスコト明カ）ヲモツ。

次ニ $\beta\,(= n\eta\sqrt{4\pi}) > \beta_0\,(= n\eta_0\sqrt{4\pi})$ 即チ $\eta > \eta_0$ ナルトキ

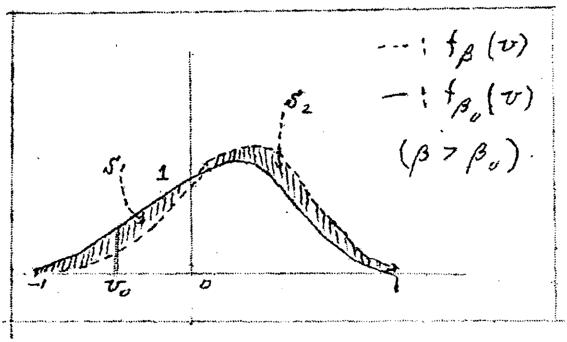
$$f_\beta(1) = f_{\beta_0}(1) = f_\beta(-1) = f_{\beta_0}(-1) = 0,$$

$$f_\beta(0) = f_{\beta_0}(0) = 1$$

$1 > v > 0$ ナルトキ $f_\beta(v) > f_{\beta_0}(v)$

$0 > v > 1$ ナルトキ $f_\beta(v) < f_{\beta_0}(v)$

ヨツテ、 $f_\beta(v)$ ト $f_{\beta_0}(v)$ トノグラフハ図ノ如クナル



更ニ $0 < v < 1$ ナルトキ

$$\left[f_{\beta}(v)-f_{\beta_0}(v)\right]-\left[f_{\beta_0}(-v)-f_{\beta}(-v)\right]$$

$$=(1-v^2)^k\left(e^{\beta v}-e^{\beta_0 v}\right)\left[1-\frac{1}{e^{(\beta+\beta_0)v}}\right]>0$$

即チ $\quad f_{\beta}(v)-f_{\beta_0}(v)>f_{\beta_0}(-v)-f_{\beta}(-v)$

ヨッテ次ヲ得

$$\beta>\beta_0 \text{ ナルトキ } \int_{-1}^{1}f_{\beta}(v)\,dv>\int_{-1}^{1}f_{\beta_0}(v)\,dv. \qquad (19)$$

而シテ、合格圏ノ性質カラ α ハ 1 ニ近イ値トシテ豫メ指定サレテヰルベキ故、(18) ヲ満ス v_0 ハ負ト考ヘテヨイ。

今 $\eta>\eta_0$ ナルトキ（即チ $\beta>\beta_0$ ナルトキ）、

$P\{E\in w_0 \mid \eta_1(\sigma)\}=\alpha'$ トスレバ

$$\int_{v_0}^{1}f_{\beta}(v)\,dv=\alpha'\int_{-1}^{1}f_{\beta}(v)\,dv$$

従ッテ

$$\int_{-1}^{v_0} f_\beta(v)\,dv = (1-\alpha')\int_{-1}^{1} f_\beta(v)\,dv \tag{20}$$

ナルベシ。然ルニ、上ト同様ニシテ

$$\int_{-1}^{v_0} f_{\beta_0}(v)\,dv = (1-\alpha)\int_{-1}^{1} f_{\beta_0}(v)\,dv \tag{21}$$

ナリ，而モ上述ノ如ク $v_0<0$ ト假定シテヨキ故，上圖カラシテ

$$\int_{-1}^{v_0} f_\beta(v)\,dv < \int_{-1}^{v_0} f_{\beta_0}(v)\,dv$$

更ニ (19) ガ成立シテヰル、ヨッテ (20),(21) カラ

$$1-\alpha' < 1-\alpha$$

即チ $\alpha' > \alpha$

得，コレ，$P\{E\in m_0 \mid \eta_1(\sigma)\}$ ヲ η ノ函数ト考ヘタトキ，η ノ増加函数ナコトヲ示ス。

ヨッテ i) ガ証サレタ。

従ッテ又 (17) ノ條件カラ ii) ガ成立ス

(19.12.31)