(2)

121

正規確率過程に就て.

河田敬義（東京文理大）

近時確率過程の理論が益々発展しつゝある。然し乍ら実際に具体的な性質を挙げ得るものはまだ余り沢山は知られてゐないので、其の中で正規確率過程（normale stochastische prozesse）は屡々引合ひに出される例である。（Khintine〔1〕,〔2〕, Lévy〔1〕, Wold〔1〕, Cramér〔1〕,〔2〕等々）. 宇野博士は又之の例から出発していろくの彷徨函数の諸性質を研究されてゐる（宇野〔1〕）. 此処では正規確率過程の可測性, 連續性, 積分と微分, Markoff 過程との関係等に就いて上に挙げた諸理論の一部を紹介旁々若干の考察を加へて見ようと思ふ。

文献

S. Bochner〔1〕, Vorlesungen über Fouriersche Integrale（1934）.

H. Cramer〔1〕 Random variables and probability distributions,（1937）.

[2] On the theory of stationary random processes, Ann. of Math., 41 (1940) 215 — 230.

J. L. Doob, [1] Stochastic processes with an integral-valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 87 — 150

[2] Stochastic processes depending on a continuous parameter, ibid., 42 (1937), 107 — 140

J. L. Doob and W. Ambrose, [3] On two formulations of the theory of stochastic processes depending on a continuous parameter, Ann. of Math., 4 (1940), 737 — 745

伏見康治 [1] 確率論と統計論 (1942)

A. Khintchine [1] Asymptotioche Gesetze der Wahrocheinlichkeits rechonung, (1933)

[2] Korrelationstheorie der stationären Stochastischen prozesse, Math.

Ann., 109 (1934), 604–615.

A. Kolmogoroff [1] Über die analytische Metho-den in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104 (1931), 415–458.

[2] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, (1933)

(河田敬義 [1] On the measurable stochastic process, 数物記事, 23 (1941), 512–527.

北川敏男, [1] The Weakly Contagious stochastic process which depends upon the gaussian distribution, 九大紀要 2 (1941), 27–36.

P. Lévy [1] Théorie de l'addition des variables aléatoires, (1937)

末綱恕一, 確率論 (1941)

宇野利雄, [1] 族復函数 (1)–(4) 函数方程式及應用解析 18号, 1–11; 19号, 1–9; 20号, 1–6; 21号, 1–5.

Wold, A study in the analysis of stationary time series, (1938)

§1. 確率過程の一般論から

先づ Kolmogoroff の流儀で、確率過程に就いての若干の定義や定理を述べよう。

Ω を根源事象(elementare Ereignisse) ω の全体, Ω の部分集合の作る或る Borel 集合族を F, F の上で定義された完全加法的確率を p として, F に p を合せ考へたものを確率の場(wahrscheinlichkeitsfeld)と呼んで (Ω, F, p) で表はす。更に F ∋ E, p(E) = 0 なる E の部分集合は又すべて F に属するものと假定しておく。

F に関して可測な Ω の上で定義された実函数 X(ω) を確率変数(stchastische Variable)と呼び, X(ω) が p-可積分なる時に $E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, p(d\omega)$ ヲ X の平均値又は期望値(Erwartang)と言ふ。二つの確率変数 X(ω), Y(ω) が同値(äquivalent)とは $p_\omega(X(\omega) \neq Y(\omega)) = 0$ なる事とする。但し $p_\omega(\cdot)$ は・なる確率事象の起る確率を表

はすものとする。

$-\infty < t < \infty$ なる t をパラメーターとする確率変数 $X_t(\omega)$ の集りを確率過程（Stochastische Prozesse）と言ひ，二つの確率過程 $\{X_t(\omega)\}$ と $\{Y_t(\omega)\}$ とが同値であるとば，すべての t に対して $X_t(\omega)$ と $Y_t(\omega)$ とが確率変数として同値である事とする。

$\Omega \ni \omega$ に対して，$X_t(\omega)$ を t の函数と見る時，之れを確率過程 $\{X_t\}$ に属する根源過程（elementare Prozesse）と呼ぶ。$p(E) = 0$ なる $E \ni \omega$ の場合を除いて，各 ω に対して根源過程が t の可測（又は連續又は絶対連續）である時に，$\{X_t\}$ を個々に可測（又は連続又は絶対連続）な確率過程といふ。

一つの確率の場（Ω, F, p）の上で定義された確率変数の全体を R とする時，$R \ni X, Y$ に対して

$$\rho(X, Y) = \inf_{\varepsilon > 0} \{ p_\omega(|X-Y| > \varepsilon) + \varepsilon \}$$

と置けば，R は距離空間となる。但し同値な確率変数は R に於ける同一の点を表はすものとする。

確率過程とは（同値なものをまとめて考へれば）R に於ける

tをパラメーターとする曲線に他ならない。互に共通点を持たない可測集合 $I_1, \cdots, I_n$, で $(-\infty; \infty) = I_1 + \cdots + I_n$ となる場合に，$t \in I_i$ ならば $X_t = X_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ となる時に $\{X_t\}$ を有限値函数（endlich wertig）と呼ぶ。$\{X_t\}$ に対して有限値函数 $\{X_t^{(n)}\}$ を取つて $\lim_{n\to\infty} \rho(X_t^{(n)}, X_t) = 0$, $t \notin E$, $m(E) = 0$ ならしめる事が出来る時に $\{X_t\}$ を可測確率過程と呼ぶ。（此処に m はルベック測度を示す）。例へば連続確率過程，即ち $\lim_{s\to t} \rho(X_s, X_t) = 0$ であれば $\{X_t\}$ は可測確率過程である。

（I） $\{X_t\}$ が可測確率過程であれば，其れと同値な個々に可測な確率過程が存在する。

（II） $\{X_t\}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と同値な個々に連続な確率過程の存在する為に必要十分な條件は，與へられた $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に對して δ を十分小に取れば，任意の分割 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ に對して

$$P_\omega\left\{\left(\max_{|t_i - t_j| < \delta} |X_{t_i} - X_{t_j}|\right) > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2$$

ならしめ得る事である。

可測確率過程 $\{X_t\}$ が可積分確率過程であるといふ事の直接の定義は一言で言ひ難いが，結局は $\{X_t\}$ と同値な個々に可測な確率過程 $\{Y_t\}$ を作る時 $\omega \notin E$，$P(E)=0$ なる ω に対して $Y_t(\omega)$ が t に関して可積分となる事を示す。此の時 $\int_0^t Y_s(\omega)\,ds$ は又一つの確率変数となる。之れを $\int_0^t Y_s\,ds$ で表はす。

（Ⅲ）各 t に対して $E(|X_t|)$ が存在して $\int_0^t E(|X_s|)\,ds<\infty$ となる時は $\{X_t\}$ は可積分となり，且つ

$E(\int_0^t X_s\,ds)=\int_0^t E(X_s)\,ds$ となる。(以上河田[1]参照)

一般に確率過程 $\{X_t\}$ に対して

(1) $F(t_1,\cdots,t_m;\,a_1,\cdots,a_n)=P_\omega\{X_{t_i}(\omega)<a_i,\ i=1,\cdots,n\}$.

と置けば，之れは $t_1,\cdots,t_n$ をパラメーターとして n 次元の分布函数となり

(2) $F(t_1,\cdots,t_n;\,a_1,\cdots,a_n=F(t_{i_1},\cdots,t_{i_n};\,a_{i_1},\cdots,a_{i_n})$

(3) $F(t_1,\cdots,t_n;\,a_1,\cdots,a_{n-1},\infty)=F(t_1,\cdots,t_{n-1};\cdots,a_{n-1})$

を満足する。

$\{X_t\}$ が定常（stationär）とは

(4) $F(t_1,\cdots,t_n;\,a_1,\cdots,a_n)=F(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;\,a_1,\cdots,a_n)$

$(-\infty < \tau < \infty)$

を満足する事を言ふ

(IV) 定常な可測確率過程は連続となる。

さて逆に $t_1, \cdots, t_n$, n をパラメーターとする n 次元分布函数の集り $\{F(t_1, \cdots, t_n; a_1, \cdots, a_n)\}$ が, (2), (3) を満足するならば, Ω を $(-\infty, \infty)$ で定義されたすべての実函数 $f(t) = \omega$ の集り, F を $(f(t); f(t_1) < a_1, \cdots, f(t_n) < a_n)$ なる部分集合から得られる Borel 集合族とし, $P_\omega(\omega = f(t); f(t_i) < a_i, i = 1, \cdots, n)$

$= F(t_1, \cdots, t_n; a_1, \cdots, a_n)$ とすれば, この (Ω, F, p) なる確率の場で $\omega = f(t)$ に対して

$X_t(\omega) = f(t)$ は確率過程となって, 丁度 (1) を満足する。

此の意味で, (2), (3) を満足する $\{F(t_1, \cdots t_n; a_1 \cdots a_n)\}$ は一つの確率過程を定めると考へてよい。

(§1 を通じて Doob [1], [2] Doob, Ambrose [1] を参照)

§2 正規確率過程

或る確率過程 $\{X_t\}$ が正常な正規確率過程であるとは

(5) $P_\omega(X_{t_i}(\omega) < a_i,\ i = 1, \cdots, n) = F(t_1 \cdots t_n; a_1, \cdots, a_n)$

$$= \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{b_n} \sqrt{\frac{\Delta_n}{(2\pi)^n}}\ \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^{(t_1 \cdots t_n)} x_i x_k\right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$\Delta_n = \Delta(t_1 \cdots t_n) = \left| a_{ik}^{(t_1 \cdots t_n)} \right| > 0,$$

$$a_{ik}^{(t_1 \cdots t_n)} = a_{ki}^{(t_1 \cdots t_n)}$$

と表はされる事を言ふ。 但し

(6) $\sum_{i,k} a_{ik}^{(t_1 \cdots t_n)} x_i x_n$ は正値二次形式とす。(>0)

末綱〔1〕, 170頁と同様に（§2 を通じて宇野〔1〕Cramér〔1〕, 伏見〔1〕143頁 wold, 61頁参照）

(7) $E(X(t_i)X(t_k))$

$$= \sqrt{\frac{\Delta(t_i, t_k)}{(2\pi)^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_k \exp\left(-\frac{1}{2}\sum a_{je}^{(t_i t_k)} x_j x_e\right) dx_i dx_k$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta(t_1 \cdots t_n)}{(2\pi)^n}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_k \exp\left(-\frac{1}{2}\sum a_{je}^{(t_1 \cdots t_n)} x_j x_e\right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \frac{\Delta_{ik}(t_1 \cdots t_n)}{\Delta(t_1 \cdots t_n)}$$

となる。此処に $\Delta_{ik}(t_1 \cdots\cdots t_n)$ は $\Delta(t_1 \cdots\cdots t_n)$ の (i,k) 元の余因子とする。 故に

(8) $$f(t_i, t_k) = E(X(t_i) \cdot X(t_k))$$

とすれば

(9) $$\left(a_{ik}^{(t_1 \cdots\cdots t_n)} \right) = \left(f(t_i, t_k) \right)^{-1}$$

となり，(5) の分布式は $f(t_i\, t_k)$ の値によって決定される。(6) の假定より

(10) $$f(t_i, t_k) = f(t_k, t_i),$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} f(t_i\, t_k)\, x_i\, x_k > 0 \quad (x_1 \cdots\cdots x_n \text{は悉}$$

くは 0 ならずとす。)

逆に (10) を満足する $f(s, t)$ を与へられるならば，(9) により $a_{ik}^{(t_1 \cdots\cdots t_k)}$ を定め，(5) によって $F(t_1 \cdots\cdots t_n;$ $a_1, \cdots\cdots, a_n)$ を与へれば，(2), (3) を満足する。即ち (5) ならしめる $\{X_t\}$ が存在する。

（証） $F(t_1 \cdots\cdots t_n ; a_1 \cdots\cdots a_n)$ は $a_1, \cdots\cdots, a_n$ について単調増大なる故，それが n 次元分布函数である事，及 (3) は

次の（11）式を験証すればよい。

$$(11)\ \sqrt{\frac{\Delta(t_1\cdots t_n)}{(2\pi)^n}}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(t_1\cdots t_n)} x_i x_j\ dx_n$$

$$=\sqrt{\frac{\Delta(t_1\cdots t_{n-1})}{(2\pi)^{n-1}}}\ exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(t_1\cdots t_{n-1})})$$

$\sum a_{ij}^{(t_1\cdots t_n)} x_i x_j$ が正値となるから $a_{nn}^{(t_1\cdots t_n)} > 0$ である。

故＝

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{nn}(x_n + \sum_{1}^{n-1}\frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i)^2 \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij} - \frac{a_{ij}a_{jn}}{a_{nn}}) x_i x_j$$

従ツテ

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j)\, dx_n$$

$$= exp\left\{-\frac{1}{2a_{nn}}\sum_{i,j=1}^{n-1}(a_{ij}a_{nn} - a_{in}a_{jn}) x_i x_j\right\}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{a_{nn}}{2}(\sum_{1}^{n-1}\frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i + x_n)^2\right\} dx_n$$

$\Delta = |f(t_i t_j)| = \Delta^{-1}(t_i\cdots t_n)$，$\Delta_{ij}$ を Δ の $(i\,j)$ 次

分の余因子とすれば，右辺の積分の項の値は

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{a_{nn}}{2}x^2\right\}dx=\sqrt{\frac{2\pi}{a_{nn}}}=\sqrt{\frac{2\pi\Delta_{nn}}{\Delta}}$$

$=\sqrt{\dfrac{2\pi\Delta(t_1\cdots t_{n-1})}{\Delta(t_1\cdots t_n)}}$ に等しく第一項では Sylvester の公式より

$$\frac{a_{ij}a_{nn}-a_{in}a_{jn}}{a_{nn}}=\frac{\Delta_{ij}\Delta_{nn}-\Delta_{in}\Delta_{jn}}{\Delta_{nn}\Delta}=\frac{\Delta_{nn}(ij)}{\Delta_{nn}}$$

となり，(11) 式が成立する。

此処に $\Delta_{nn}=\Delta(t_1\cdots t_{n-1})=(f(t_i t_j))_{ij=1,\cdots,n-1}$ で，$\Delta_{nn}(ij)$ は Δ_{nn} 中 (ij) 成分の余因子を示す。一

(5) 式の $F(t_1\cdots t_n;\ a_1\cdots a_n)$ の特性函数を計算すれば，Cramer [1] 108 頁より

$$(12)\qquad \varphi(u_1\cdots u_n)=exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{ij}f(t_i t_j)u_i u_j\right\}$$

となる。

一般に確率過程 $\{X_t\}$ に於て $(X(t_1),\cdots,X(t_n))$ の定めるn次元分布の特性函数が (12) 式で表はされ

$$(13)\qquad f(t_i t_j)=f(t_j t_i),\quad \sum_{ij}f(t_i t_j)u_i u_j\geqq 0$$

なる時に $\{X_t\}$ を 正規確率過程と言ふ。$u_1\cdots u_n$ が悉

くは0でなくても $\sum f(t_i t_j) u_i u_j = 0$ となる事があれば，

$\{X_t\}$ を特異正規確率過程といふ。

又正規確率過程が正常なる為の必要十分條件は

$$(14) \qquad f(s,t) = g(s-t)$$

なる g の存在する事で，其の時は

$$(15) \qquad g(s) = g(-s), \quad \sum g(t_i - t_j) u_i u_j \geqq 0$$

となる。故に Bochner の定理により（Bochner[1]）

$$(16) \qquad g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} dF(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ts \, dF(t),$$

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} F(t) = g(0) = E(X_0(\omega)^2)$$

を満足する單調函数 $F(t)$ が存在する。逆も亦真。此の場合正常である為の十分條件は，或る t の区間内で $F(t)$ が嚴密な意味で單調増加となる事である。（即 $t > s$ なら $F(t) > F(s)$）

例．1　Brown 運動の場合に表はれるもの。

$\{X_t\}$，$t \geqq 0$ で，$X(0) = 0$，$t_1 > s_1 > t_2 > s_2 > \cdots > t_n > s_n$ ならば $X(t_i) - X(s_i)$，$i = 1 \cdots, n$

は互ひに独立で，$t>S$ の時 $E((X(t)-X(S))^2)=\frac{t-s}{h}$（$h>0$）となる場合である。此の時 $\{X_t\}$ は正規確率過程となる事が証明され，（Lévy〔1〕参照）

従って $t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n$ に対して

$$(17)\quad F(t_1\cdots\cdots t_n;\, a_1\cdots\cdots a_n)$$
$$=\sqrt{\frac{\Delta(t_1\cdots t_n)}{(2\pi)^n}}\int_{-\infty}^{a_1}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{a_n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(a_1x_1^2+a_2(x_2-x_1)^2+\cdots\cdots+a_n(x_n-x_{n-1})^2\right)\right\}dx_1\cdots dx_n,$$

$$(18)\quad a_i=\frac{h}{t_i-t_{i-1}}\qquad i=1,\cdots\cdots,n.$$

$$f(s,t)=E(X(s)X(t))$$
$$=E\{X_{(s)}(X(S)+X(t)-X(S))\}$$
$$=E(X(S)^2)=\frac{s}{h}\ (s\leqq t)$$ となる

（9）式は

$$\left(a_{ij}^{(t_1\cdots t_n)}\right)\left(f(t_it_j)\right)=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ -a_2 & a_2+a_3 & & \\ 0 & & a_{n-1}+a_n & -a_n \\ \vdots & & & \\ 0 & & -a_n & a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{t_1}{t_n} & \cdots\cdots & \frac{t_1}{t_n} \\ \vdots & \frac{t_2}{t_n} \cdots\cdots & \frac{t_2}{t_n} \\ \vdots & \vdots & \\ \frac{t_1}{t_n} & \frac{t_2}{t_n} \cdots\cdots & \frac{t_n}{t_n} \end{pmatrix} = E$$

によって験証される。

例2　定常な場合の例として（16）式で

$$(19) \qquad dF(t) = \frac{2\lambda}{\lambda^2+t^2}\,dt \ (\lambda > 0)$$

とすれば

$$f(s,t) = g(s-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(s-t)} \frac{2\lambda}{\lambda^2+u^2}\,du$$

$$= e^{-\lambda|s-t|}$$

となる。之れは §4 で見る Markoff 過程となる場合であつて、その分布函数は其処で一緒に求める事にする。

例3　定常で且つ特異なものの例として、$-\infty < t < -1$ で $F(t) = 0$，$-1 \leqq t < 1$ で $F(t) = \frac{1}{2}$，$1 \leqq t < \infty$ で $F(t) = 1$ とすれば、

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,dF(x) = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu}) = \cos u.$$

$f(s,t)=\cos(s-t)$ となる。

$E(X(0))=0$, $E(X^2(0))=1$ で, $t-s\neq 0(\pi)$

ならば

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(s-t) \\ \cos(t-s) & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sin^2(s-t)}\begin{vmatrix} 1 & -\cos(s-t) \\ -\cos(t-s) & 1 \end{vmatrix},$$

$F(s,t;a_1,a_2)=$

$$\frac{\sin(t-s)}{2\pi}\int_{-\infty}^{a_1}\int_{-\infty}^{a_2} e^{-\frac{1}{2\sin^2(s-t)}(x^2-2\cos(s-t)xy+y^2)}dxdy$$

となる。s, t, u の三つの値に対しては三次元の分布を与へない。事実 $s-t\neq 0(\pi)$ ならば

$$(20)\qquad X(u)=\frac{\sin(u-t)}{\sin(s-t)}X(s)+\frac{\sin(u-s)}{\sin(s-t)}X(t)$$

なる関係がある。

§3 可測性と連續性，微分と積分

次の補題は有用である。

(I) $\{X(t)\}$ が正規確率過程なる時

(i) $\rho(X(t),X(s_n))\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$

(ii) $E((X(t)-X(s_n))^2)\to 0\quad(n\to\infty)$

(iii) $\qquad \lim f(s_n, t) = \lim f(s_n, s_n) = f(t, t)$

は互ひに同値である。

（証）(i) の條件は任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$\lim p_w(|X(t) - X(s_n)| > \varepsilon) = 0$ と同じである。

然るに標準偏差が σ なる gauss 分布に於ては

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{-\varepsilon}{\sigma}} + \int_{\frac{\varepsilon}{\sigma}}^{\infty}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \to 0$$

は $\sigma \to 0$ と同一であるから，(i) と (ii) とは同値である

又 $E((X(t) - X(s))^2) = f(t,t) - 2f(t,s) + f(s,s)$ と

$(\sigma(X(t)) - \sigma(X(s)))^2 \leqq E((X(t) - X(s))^2)$ より

(ii) と (iii) とが同値となる。此処に $\sigma(X(t)) = (E(X(t)^2)^{\frac{1}{2}})$

は標準偏差を表はす。——

(II) 正規確率過程 $\{X(t)\}$ が可測なる為めの必要十分條件

は次の性質を満足する様な $[0, 1]$ の分割 Δ_n の存在する事で

ある，$\Delta_n = E_0 + E_1^{(n)} + \cdots\cdots + E_{r(n)}^{(n)}$，$m(E_0) = 0$，

$E_i^{(n)} \cdot E_j^{(n)} = 0 \quad (i \neq j)$，で，適當な $S_i^n \in E_i^{(n)}$ を取って，

$u \in E_i^{(n)}$, $v \in E_j^{(n)}$ に対して $f^{(n)}(u, v) = f(s_i^{(n)}, s_j^{(n)})$.

によって $f^{(n)}$ を定義すれば，$S, t \notin E$ に対して，

$\lim f^{(n)}(S, t) = f(s, t)$ となる．特に $f(s, t)$ が s と t に関して連續ならば可測である。

若しも定常であれば，可測なる為めの必要十分條件は（14）に於ける $g(S)$ の連続なる事である。

（証）（河田［1］５１５頁）によれば，§1 の可測確率過程の定義に於ける $X_t^{(n)}$ を或る $t_i \in I_i$ に対する X_{t_i} と選ぶ事が出来る。

故に $f^{(n)}(s, t)$ はその有限値正規確率過程に対するものである。故に補題（I）を適用すれば証明は了る。———

(III) $f(s, t)$ が連続ならば $\{X(t)\}$ は可積分確率過程となる。且つ $\int_0^t X(t)\,dt$ は又正規過程で，それに対する $f_0(s, t)$ は

$$f_0(s, t) = \int_0^s \int_0^t f(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau$$

によつて与へられる．（宇野［1］，伏見［1］，２４４頁参照）

（証）$E(|X(t)|)$ は又 t の連続函数で，$E(|X(t)|) \leqq \sigma(X(t))$

$=f(t_0,t)^{\frac{1}{2}}$，且つ $\int_0^t f(\tau,\tau)^{\frac{1}{2}}d\tau<\infty$ から，§1(III)により $\{X(t)\}$ は可積分となる。

$X_n(t)=X(\frac{k}{2^n})$，$\frac{k-1}{2^n}<t\leqq\frac{k}{2^n}$ に対しては

$$Y_n(t)=\int_0^t X_n(\tau)d\tau=\sum_{k=1}^{r}X(\frac{k}{2^n})\frac{1}{2^n}+(t-\frac{r}{2^n})X(\frac{k+1}{2^n}),$$

$$\frac{k}{2^n}\leqq t<\frac{k+1}{2^n}.$$

一方 $E((Y_m(1)-Y_n(1))^2)=E(Y_m^2)+E(Y_n^2)-2E(Y_mY_n)$

$$=\sum_i\sum_j f(\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n})+\sum_i\sum_j f(\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n})$$

$$-2\sum_i\sum_j f(\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n})\longrightarrow 0\quad(m,n\to\infty)$$

であるから $\rho(X_n(t),X(t))\to 0$ から

$\rho(\int X(t)dt,\ Y_n(t))\to 0$ となる。即ち

$\int X(t)dt$ も正規確率過程で，$f_0(s,t)=\int_0^s\int_0^t f(\sigma,\tau)d\sigma d\tau$ を得る ————

注意　$f(s,t)$ が連続である時，$H(t)$ が有界変動な函数であれば，$\int_0^t X(\tau)\,dH(\tau)$ も同様に定義される。従って

$$\int_0^t H(\tau)\,dX(\tau)=X(t)H(t)-\int_0^t X(\tau)\,dH(\tau)$$

$(X(0)=0$ とす$)$ によって $\int H(\tau)\,dX(\tau)$ の形にして考へる方

が考へ易い時もある。（伏見〔1〕§41 参照）

例1では $t \geqq s$ で $f_0(s,t)=\frac{1}{h}\int_0^s\int_0^t \mathrm{Min}(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$

$$=\frac{2}{h}\int_0^s\left(\int_0^\sigma \tau\,d\tau\right)d\sigma+\int_s^t\left(\int_0^s \sigma\,d\sigma\right)d\tau=\frac{1}{6h}(3ts^2-s^3),$$

例2等では一般に

$$f_0(s,t)=\int_0^s\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\sigma-\tau)x}\,dF(x)\,d\sigma\,d\tau$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(e^{isx}-1\right)\left(e^{-itx}-1\right)dF(x)$$ となる。

（IV） $f(s,t)$ が二度連続的に偏微分可能ならば，$\{X(t)\}$ は絶対連続な確率過程である。特に定常な場合，即ち

$$f(s,t)=g(t-s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)x}\,dF(x),$$ となる時は

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF(x)<\infty$ 　が必要十分条件である。

（証） $f_1(s,t)=\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\,\partial t}$ と置けば $f_1(s,t)=f_1(t,s)$ で且つ $v(0)=v(1)=0$ なる連続的微分可能な $v(t)$ に對して，部分微分法にて $\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\,\partial t}v(s)v(t)\,ds\,dt$

$$=\int_0^1\int_0^1 f(s,t)\,v'(s)\,v'(t)\,ds\,dt \geqq 0$$ となるから

$f_1(s,t)=E(Y(s)Y(t))$ なる正規確率過程 $\{Y(t)\}$ が存在する。$f_1(s,t)$ は連続なる故 (III) から可積分，従って $Z(t)=\int_0^t Y(\tau)d\tau + X(0)$ を作れば，

$f_0(s,t)=E(Z(s)Z(t))=f(s,t)$ となる事が

$$E\Big\{(Z(s)-X(0))(Z(t)-X(0))\Big\}=\int_0^s\int_0^t \frac{\partial f(s,t)}{\partial s\partial t}\,ds\,dt$$

$$=f(s,t)+f(0,0)-f(0,t)-f(0,s)$$

より分る。故に $X(t)=Z(t)=\int_0^t Y(\tau)d\tau$ より $X(t)$ は個々に絶対連続となる。特に定常であれば $\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)<\infty$ ならば $\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}f(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s-t)x}x^2dF(x)$ は連続である。必要なる事は次による。――――

(V)　$\{X_t\}$ が個々に絶對連續となる爲めの必要條件は

$$(21)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} E\left\{\left(\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\right)^2\right\}$$

が存在して $\neq\infty$ なる事である。若しも $\{X(t)\}$ が定常であるならば，之れば又十分條件である。（宇野 [1] 参照）

（証）　$\{X_t\}$ が個々に絶対連続であるとすれば，$Y_t(\omega)=\frac{dX_t(\omega)}{dt}$ も亦正規確率過程で，$\frac{1}{\varepsilon}\{X(t+\varepsilon)X(t)\}$ は $Y(t)$ に概收斂

し、従って確率収斂する。一方 $Z(t) = \frac{1}{\varepsilon}\{X(t+\varepsilon)-X(t)\}$ $-Y(t)$ も亦 gauss 分布となる事を容易に知る事が出来るから(7)の論法により $\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\{X(t+\varepsilon)-X(t)\}, Y(t)\right) \to 0$.

即 $\lim_{\varepsilon\to 0} E\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\{X(t+\varepsilon)-X(t)\}^2\right) = E(Y(t)^2) \neq \pm\infty$

を得る。特に定常であれば

$$E\left(\left\{\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\right\}^2\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\{f(t+\varepsilon,t+\varepsilon)+f(t,t)-2f(t,t+\varepsilon)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} 2\,\frac{1-e^{i\varepsilon x}}{\varepsilon^2}\,dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\varepsilon x}{2}}{\frac{\varepsilon^2 x^2}{4}}\,x^2\,dF(x)$$

となるから(21)の極限が存在してそれは $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$ となる。故に $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} E\left(\left\{\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\right\}^2\right) < \infty$ が必要十分條件となる。———

例1では $\frac{1}{\varepsilon^2}\{f(t+\varepsilon,t+\varepsilon)+f(t,t)-2f(t+\varepsilon,t)\}$ $=\frac{1}{k\varepsilon} \to \infty$,

例2では $\frac{1}{\varepsilon^2}\{f(t+\varepsilon,t+\varepsilon)+f(t,t)-2f(t+\varepsilon,t)\}$ $=\frac{2}{\varepsilon^2}(1-e^{-\lambda\varepsilon}) \to \infty$ となって共に個々に絶対連続ではない。

例3では $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} dF(x) = 1$ で何度でも $\frac{d^n X(t)}{dt^n}$ が考へ

られる。事実(20)式より，之れは個々に解析的な場合である，

例1のBrown運動の場合には詳しい結果が得られてゐるのであつて，之れは個々に連続な過程であつて，然もその連続の度合が詳しく分つてゐる。即 $\{X_t(\omega)\}$ $0 \leqq t \leqq 1$ で或る確率変数 $\varepsilon(\omega)$ が存在して

(21) $$p_\omega\left(\underset{|t-s|<h}{Max}|X_t(\omega)-X_s(\omega)|<C\sqrt{2h\log\frac{1}{h}},\ \overset{all}{h}<\varepsilon(\omega)\right)=1 \qquad (C>1)$$

ではあるが，如何なる $\varepsilon(\omega)$ に対しても

(22) $$p_\omega\left(\underset{|t-s|<h}{Max}|X_t(\omega)-X_s(\omega)|<C\sqrt{2h\log\frac{1}{h}},\ \overset{all}{h}<\varepsilon(\omega)\right)=0 \qquad (C<1)$$

となる。

t, s を $[0,1]$ 中を動かさず一点 t_0（例へば0）の近傍丈で考へるならば $\sqrt{2h\log\frac{1}{h}}$ を $\sqrt{2h\log\log\frac{1}{h}}$ で置換へられる。若しも個々に連続ならば，之の場合（22）に相当して或る $C>0$ での Ch に対する確率は正となるべきであるから，随分と詳しい結果である事になる。（Lévy [1] Khintchine [1] 参照）

此処では例1の Brown 運動の場合に個々に連続な過程となる事の伊藤清氏の証明を紹介しよう（又 Doob [2] 参照）.

(VI) 例1の Brown 運動の場合は個々に連続な確率過程となる。

（証）§1, (II) の條件をためせばよい。$E\{(X(t)-X(s))^2\}$ が t, s の連続函数なる故. 任意の正数 a, b に対して $\delta=\delta(a, b)$ を十分小さく取れば, $|t-s|\leqq\delta$ ならば

$$(23)\qquad p_\omega(|X_t(\omega)-X_0(\omega)|\geqq a)\leqq b$$

ならしめる事が出来る。

之の δ に対して $2^{-m}<\delta$ に m を取り, $[0,1]$ を 2^{-m} の間隔で分ける。今任意の或分割 $0=t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n=1$ に対して

$$t_{r-1}\leqq\frac{k}{2^m}=\tau<t_r<\cdots\cdots<t_s\leqq\tau'=\frac{k+1}{2^m}<t_{s+1}$$

なりとすれば（以下便宜上 $\tau=t_{r-1}$ と書く. 又 $X_\tau=X(\tau)$ 等々）

$$b\geqq p_\omega(|X(\tau)-X(\tau')|\geqq a)$$

$$\geqq\sum_{k=r}^{s}p_\omega\big(|X(\tau)-X(t_i)|<2a,\ i=1,\cdots\cdots,k-1;$$

$$|X(\tau)-X(t_k)|\geqq 2a,\ |X(t_k)-X(\tau')|<a\big)$$

$$= \sum_{k=r}^{s} p_w \Big(|x(\tau) - x(t_i)| < 2a,\ i = 1, \cdots, k-1;$$

$$|x(\tau) - x(t_k)| \geqq 2a \Big) p_w \big(|x(t_k) - x(\tau')| < a \big)$$

$$\geqq (1-\delta) \sum_{k=r}^{s} p_w \big(|x(\tau) - x(t_i)| < 2a,\ i = 1, \cdots, k-1;$$

$$|x(\tau) - x(t_k)| \geqq 2a \big)$$

$$= (1-\delta)\, p_w \Big\{ \Big(\underset{i=r,\cdots,s}{\mathrm{Max}} |x(\tau) - x(t_i)| \Big) \geqq 2a \Big\}.$$

即ち $\delta < \frac{1}{2}$ とすれば

$$p_w \Big\{ \Big(\underset{i=r,\cdots,s}{\mathrm{Max}} |x(\tau) - x(t_i)| \Big) \geqq 2a \Big\} \leqq \frac{\delta}{1-\delta} < 2\delta,$$

故に又

$$p_w \Big\{ \Big(\underset{i=r,\cdots,s}{\mathrm{Max}} |x(\tau') - x(t_i)| \Big) \geqq 3a \Big\}$$

$$\leqq p_w \big\{ (\mathrm{Max}\, |x(\tau) - x(t_i)|) \geqq 2a \big\} + p_w \big(|x(\tau) - x(\tau')| \geqq a \big)$$

$$\leqq 3\delta$$

となる。故に

$$E_w \Big\{ \Big(\underset{|t_i - t_j| < \delta}{\mathrm{Max}} |x(t_i) - x(t_j)| \Big) > \varepsilon_1 \Big\}$$

$$\subset E_w\left\{\left(\max_{\substack{|t_i-\frac{k}{2^m}|<\delta \\ i=1,\cdots,n,\ k=0,\cdots,2^m}} \left|X(t_i)-X\left(\frac{k}{2^m}\right)\right| > \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right.$$

より，$a \leqq \frac{\varepsilon_1}{6}$ とすれば

$$p_w\left\{\left(\max_{|t_i-t_j|<\delta} |X(t_i)-X(t_j)|\right) > \varepsilon_1\right\}$$

$$< p\left\{\left(\max_{|t_i-\frac{k}{2^m}|<\delta} \left|X(t_i)-X\left(\frac{k}{2^m}\right)\right|\right) > \frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{2^m} p_w\left\{\left(\max_{\substack{|t_i-\frac{k}{2^m}|<\delta \\ t_i \geqq \frac{k}{2^m}}} \left|X(t_i)-X\left(\frac{k}{2^m}\right)\right|\right) > \frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$$

$$+ \sum_{k=0}^{2^m} p_w\left\{\left(\max_{\substack{|t_i-\frac{k}{2^m}|<\delta \\ t_i \leqq \frac{k}{2^m}}} \left|X(t_i)-X\left(\frac{k}{2^m}\right)\right|\right)\right.$$

$$\left. > \frac{\varepsilon_1}{2}\right\} \leqq 6.2^m \cdot b \leqq \frac{6b}{\delta}$$

となる。

一方　$\delta = t-s$ に対して，$X(t)-X(s)$ の標準偏差は

$\sqrt{t-s} = \sqrt{\delta}$　なる故　$b = p_w(|X(t)-X(s)| \geqq a)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{\infty} \right) e^{-\frac{x^2}{2\delta}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-\frac{a}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{a}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \sqrt{\frac{2\delta}{\pi}} \cdot \frac{1}{a} \int_{\frac{a}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2\delta}{\pi}} \cdot \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2\delta}}$$

であるから，§1の（II）の條件

$$P_\omega \left\{ \left(\max_{|t_i - t_j| < \delta} |x(t_i) - x(t_j)| \right) > \varepsilon_1 \right\} < \varepsilon_2$$

を成立せしめる為めには，$a = \frac{\varepsilon_1}{6}$ に對して

$$\frac{6}{\delta} \cdot \sqrt{\frac{2\delta}{\pi}} \cdot \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2\delta}} < \varepsilon_2$$

なる如く δ を撰べばよい。之れは可能である。——

§4 Markoff 過程

一般に $X_{t_i}(\omega) = x_i \quad (i = 1, \cdots\cdots, n)$ なる條件附確率密度

と

$$p(x(t_1) = x_1, \cdots\cdots x(t_n) = x_n ;\quad x(t_{n+1}) = x_{n+1})$$

で表はすと，確率過程が r重 Markoff 過程であるとは

$t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n < t_{n+1}$ に対して

$$(24)\quad p(x(t_1)=x_1;\cdots,x(t_n)=x_n;\ x(t_{n+1})=x_{n+1})$$
$$= p(x(t_{n-r+1})=x_{n-r+1};\cdots,x(t_n)=x_n;\ x(t_{n+1})$$
$$=x_{n+1})$$

となる事を言ふ。特に $r=1$ の時に単一 Markoff 過程と言ふ。

例1 は単一 Markoff 過程で，例3は(20)より見られる様に二重 Markoff 過程である。例3に倣って r 重Markoff 過程の例を作る事が出来る。然し之等は余り面白くない例であり，正常過程の場合が大切であらう。以下は単一 Markoff 過程のみ考察する。

本§では $[a,b]$ に於て $f(s,t)$ が連續である様な正常な正規過程 $\{x(t)\}$ のみ考へる事にする。從って(24)は

$$(25)\quad \frac{\sqrt{\dfrac{\Delta(t_1\cdots t_{n+1})}{(2\pi)^{n+1}}}\,exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^{n+1}a_{ik}^{(t_1\cdots\cdots t_{n+1})}x_i x_k\right)}{\sqrt{\dfrac{\Delta(t_1\cdots\cdots t_n)}{(2\pi)^n}}\,exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^{n}a_{ik}^{(t_1\cdots\cdots t_n)}x_i x_k\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{\dfrac{\Delta(t_n t_{n+1})}{(2\pi)^2}}\,exp\left(-\frac{1}{2}\sum_n^{n+1}a_{ik}^{(t_n t_{n+1})}x_i x_k\right)}{\sqrt{\dfrac{\Delta(t_n)}{2\pi}}\,exp\left(-\frac{1}{2}a_{nn}^{(t_n)}x_n^2\right)}$$

と同値である。

$x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}$ は右辺には含まれない。故に両辺の $\log$ を取って比べれば，$a_{i,n+1}^{(t_1 \cdots t_{n+1})} = a_{n+1,i}^{(t_1 \cdots t_{n+1})} = 0$

$(i = 1, \cdots\cdots, n-1)$ が必要となる。

故に，特に $0 \leqq s < t < u$ で考へれば (9)により

$$\begin{vmatrix} f(s,t) & f(t,t) \\ f(s,u) & f(t,u) \end{vmatrix} = 0$$

即ち $f(s,t)f(t,u) = f(t,t)f(s,u)$ を得る。

$\{X(t)\}$ が正常なりといふ假定から $f(t,t) > 0$ である。

從って

(26) $$g(s,t) = \frac{f(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \qquad (\sigma^2(t) = f(t,t))$$

と置けば，$g(s,t)g(t,u) = g(s,u)$ を得る。此処で

$g(a,s) \neq 0$ となる。何故ならば，$g(a,s) = 0$ ならば

g の連続性から，かゝる S の最小なものがある。それを $S_0 \geqq a$

とすれば，$g(a,v) \cdot g(v,S_0) = 0$，$a \leqq v \leqq S_0$ より

$g(v,S_0) = 0$ となる。故に $v \to S_0$ と近ずければ

$g(S_0,S_0) = \dfrac{f(s_0,s_0)}{\sigma(s_0)^2} = 1 = 0$ といふ結果に陥る。

よって

(27) $\ell(s)^{-1} \doteqdot g(a,s) \qquad a \leqq s \leqq b$

と置けば、$g(t,u) = \ell(t)\cdot\ell(u)^{-1}$ であるから

(28) $f(t,u) = \dfrac{\ell(t)}{\ell(u)}\sigma(t)\sigma(u), \quad (t \leqq u)$

を得る。此処で $\sigma(t) > 0$ であり、又 $f(s,s)f(t,t) - f(s,t)^2 \geqq 0$ から $\ell(t)^2 > \ell^2(s) \quad (t > s)$、即 $|\ell(t)|$ は単調に増加する。然るに上で $\ell(t) \neq 0$ で且つ連續、$\ell(a) = 1$ であるから

(29) $1 \leqq \ell(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$ は単調増加連続函数となる。

以上は必要條件であったが、(28) となる場合には

(30) $$\Delta(t_1 \cdots t_n) = |f(t_i,t_j)| = \left|\frac{\ell(t_i)}{\ell(t_j)}\sigma(t_i)\sigma(t_j)\right|$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\sigma(t_k)^2 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\ell(t_k)^2}{\ell(t_{k+1})^2}\right), \quad (t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$$

となり、$A = (f(t_i,t_j))^{-1} = (a_{ij})$ を実際に作れば、

(31) $$a_{ij} = 0, \quad (|i-j| \geqq 2), \quad a_{kk} = \frac{1}{\sigma(t_k)^2\left(1 - \dfrac{\ell(t_k)^2}{\ell(t_{k+1})^2}\right)},$$

$$a_{k,k-1} = a_{k-1,k} = \frac{1}{\sigma(t_k)\sigma(t_{k-1})} \times \frac{\ell(t_{k-1})}{\ell(t_k)} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\ell(t_{k-1})^2}{\ell(t_k)^2}\right)},$$

即ち

$$(32)\quad \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^{(t_1,\cdots\cdots t_n)}\, x_i\, x_k$$

$$= \frac{x_1^2}{\sigma(t_1)^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(\ell(t_i)^2-\ell(t_{i-1})^2)} \left\{ \frac{\ell(t_{i-1})}{\sigma(t_{i-1})} x_{i-1} - \frac{\ell(t_i)}{\sigma(t_i)} x_i \right\}^2$$

となり，之れは確かに(25)式を満足する。実際に書けば

$$(33)\quad p\,(X(t)=x\,;\ X(\tau)=\xi\,)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\{\ell(t)^2-\ell(t)^2\}}} \cdot \frac{\ell(\tau)}{\sigma(\tau)}\, exp\left\{-\frac{1}{2\{\ell(\tau)^2-\ell(t)^2\}}\right.$$

$$\left. \left(\frac{\ell(\tau)}{\sigma(\tau)}\,\xi - \frac{\ell(t)}{\sigma(t)}\,x \right)^2 \right\}, \quad (t<\tau)$$

となる。以上により

<u>(VII)</u>　$f(s,t)$ が連續である様な正常な正規確率過程 $\{X_t\}$ $(a \leqq t \leqq b)$ が單一Markoff過程となる爲めの必要十分條件は，單調増加連續函数 $\ell(t)$により(28.)式なる關係の成立する事である。

例1は　$\ell(t)=\sqrt{t}$, $\sigma(t)=\sqrt{t}$　となる場合であり，

例2は　$\sigma(t)=1$, $\ell(t)=e^{\lambda t}$ $(\lambda>0)$ となる場合である。

今

(34) $m(t) = \dfrac{\sigma(t)}{\ell(t)}$, $Y(t) = \dfrac{X(t)}{m(t)}$

と置けば Yに対する $f_Y(s,t)$ は $(s \leqq t)$

$$f_Y(s,t) = f(s,t)\frac{1}{m(s)m(t)} = \ell(s)^2$$

$$= Min(\ell(s)^2, \ell(t)^2)$$

を満足する。即ち時刻のパラメーターを t から $\ell(t)^2$ に変へて $u = u(t)$ を $\ell(t)^2$ の逆函数，即 $\ell(u)^2 = t$ とすれば

(35) $Z(u) = Y(t)$

は $f_Z(s,t) = Min(s,t)$ を満足する。

即ち 逆に解いて

(36) $X(t) = m(t)\ Y(t) = m(t)\ Z(u)$,

$(\ell(u)^2 = t)$

と，例 1 の Brown 運動の場合で，パラメーター t を入れかへ，更に $m(t)$ なる定まった函数と掛けて目盛りを加減したものとなる。故に

(VIII) 正常正規確率過程 $\{X(t)\}$ で $f(s,t)$ が連続

である様な単一 Markoff 過程は(36)により例1の場合の変形に他ならない。従つてすべて個々に連続な過程である。特に定常なものは例2に挙げたもの丈である。

(証) 最後の部分丈証明すればよい。$\{X(t)\}$ が定常であれば $\sigma(t)=$ 一定 $=1$ とすれば, $u(s)=\log l(s)\geqq 0$ は連続且つ単調増大で $f(s,t)=g(s-t)=\dfrac{l(s)}{l(t)}$ $=e^{u(s)-u(t)}$ となる。故に $u(s)-u(t)$ は $s-t$ のみの函数であるから $u(s)-u(t)=v(s-t)$ と置けば良く知られてゐる様に $v(s-t)=-\lambda(s-t)$, $\lambda=0$ となる。即

$$f(s,t)=e^{-\lambda(t-s)},\qquad (t>s)$$

となる。——————

例1. 2以外に良く知られてゐる例として,北川氏の考察した傳播事象の例がある。(北川 [1] 参照) それは

$0\leqq s_1<t_1\leqq s_2<t_2<\cdots\cdots<t_n$ に対して

$$P_w\{a_i<X(t_i)-X(s_i)<b_i,\quad i=1,\cdots\cdots,k\}$$

$$=C\int_{\frac{a}{\sqrt{t_1-s_1}}}^{\frac{b_1}{\sqrt{t_1-s_1}}}\cdots\int_{\frac{a_k}{\sqrt{t_k-s_k}}}^{\frac{b_k}{\sqrt{t_k-s_k}}}\exp\left\{-\frac{v_1^2}{2(1+(t_1-s_1)d)}-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}\right.$$

$$\frac{1+\sum_{V=1}^{i-1}(t_V-s_V)d}{1+\sum_{V=1}^{i}(t_V-s_V)d}\left(v_i-\frac{\sqrt{t_i-s_i}\cdot d\sum_{V=1}^{i-1}\sqrt{t_V-s_V}\cdot v_V}{1+\sum_{V=1}^{i-1}(t_V-s_V)d}\right)^2\Bigg\}$$

$$dv_1\cdots\cdots dv_k\ ,\ d>0\ ,\ C=(2\pi)^{-k}\left\{1+\sum_{i=1}^{k}(t_i-s_i)d\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

で与へられるものである。此処で $w_i=\sqrt{t_i-s_i}$, $C'=$ $C\dfrac{1}{\Pi_1^k\sqrt{t_i-s_i}}$ と置いて変形すれば

$$=C'\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_k}^{b_k}exp\left\{-\frac{\left(\dfrac{w_1}{1+(t_1-s_1)d}\right)^2}{2\,\dfrac{t_1-s_1}{1+(t_1-s_1)d}}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}\left(\frac{\sum_{V=1}^{i}(t_V-s_V)}{1+\sum_{V+1}^{i}(t_V-s_V)d}-\frac{\sum_{V=1}^{i-1}(t_V-s_V)}{1+\sum_{V=1}^{i-1}(t_V-s_V)d}\right)^{-1}\times$$

$$\left.\left(\frac{w_i}{1+\sum_{V=1}^{i}(t_V-s_V)d}-\frac{(t_V-s_V)d\sum_{V=1}^{i-1}w_V}{\left(1+\sum_{V=1}^{i}(t_V-s_V)d\right)\left(1+\sum_{V=1}^{i-1}(t_V-s_V)d\right)}\right)^2\right\}$$

$$dw_1\cdots\cdots dw_k$$

となる。故に $s_1=0$, $s_i=t_{i-1}$ ($i=2,\cdots,k$) とすれば

$0=t_0<t_1<\cdots<t_k$ で確率密度を求めれば

$$p\left(X(t_i)-X(t_{i-1})=a_i\ ,\ i=1,\cdots,k\right)$$

$$=p\left(X(t_i)=\sum_{\nu=1}^{i}a_\nu\ ,\ i=1,\cdots,k\right)$$

(此処で $x_i=\sum_{\nu=1}^{i}a_\nu$ と置いて) $=p(X(t_i)=x_i\ ,\ i=1,\cdots,k)$

$$=c'\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x_1}{1+dt_1}\right)^2}{\frac{t_1}{1+dt_1}}-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{\frac{t_i}{1+dt_i}-\frac{t_{i-1}}{1+dt_{i-1}}}\right.$$

$$\left.\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{1+t_id}-\frac{(t_i-t_{i-1})\,d\,x_{i-1}}{(1+dt_i)(1+dt_{i-1})}\right)^2\right\}$$

$$=c'\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x_1}{1+dt_1}\right)^2}{\frac{t_1}{1+dt_1}}-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{\frac{t_i}{1+dt_1}-\frac{t_{i-1}}{1+dt_{i-1}}}\right.$$

$$\left.\left(\frac{x_i}{1+t_id}-\frac{x_{i-1}}{1+t_{i-1}d}\right)^2\right\}$$

となる。之れを(32)と比べて

$$\sigma(t)=\sqrt{t(1+td)}\ ,\quad \ell(t)=\sqrt{\frac{t}{1+td}}$$

とすれば完全に一致する。即ち $Y(t)=\dfrac{X(t)}{1+dt}$ は

$\sigma(Y_t)=\sqrt{\dfrac{t}{1+dt}}$ である例1の型となる。

最後に Kolmogoroff の微分方程式にあてはめて見よう。

（Kolmogoroff [1], 参照）

(33) 式の $p\,(X(t)=x;\ X(\tau)=\xi) = f\,(t, x;\ \tau, \xi)$

と置けば、$l(t)$, $\sigma(t)$ 共に連続的微分可能とすれば

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|>\delta} (y-x)^2 f(t-\Delta t, x;\ t, y)\, dy = 0$$

と容易に験証出来るから

$$(37) \quad \frac{\partial f(t, x;\ \tau, \xi)}{\partial t} + A(t, x) \frac{\partial f(t, x;\ \tau, \xi)}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial^2 f(t, x;\ \tau, \xi)}{\partial^2 x^2} = 0$$

を満足する。此処に

$$(38) \begin{cases} A(t, x) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1}{\Delta t} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (y-x) f(t, x;\ t+\Delta t, y)\, dy \\ \qquad = \left(\dfrac{l'(t)}{l(t)} - \dfrac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) x \\ B(t, x) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1}{2\Delta t} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2 f(t, x;\ t+\Delta, y)\, dy \\ \qquad = \dfrac{l'(t)}{l(t)} \sigma^2(t) \end{cases}$$

となる。逆に

(39) $A(t, x) = a_0(t)x, \quad B(t, x) = b_0(t),$

$b_0(t) > 0$

に対して $l(t)$, $\sigma(t)$ を解いて見れば, $\sigma(t) > 0$, $l(t)$, $l'(t) > 0$ を容易に見る事が出来るから, (39)が(37)の微分方程式と相待つて定常正規單一 Markoff 過程を特長付けることになる。