統計的領域假説檢定ノ理論（其ノ二）

4. $\omega_0(\theta)$ニ對スル合格圏

假説空間Ωガ一次元デアル場合，從ッテ檢定サルベキ假説ω_0ハ一ツノ母變數θダケニ關係スルコトハ勿論コレト對立スル假説ω'モ亦θダケニ關係スル場合ニω_0ニ對スル合格圏ヲ定メル問題ヲ考究シヨウ。

問題ハ二ツニ分カレル。ソノ一ツハ，θヲΩニ屬スル任意ノ値トスルトキ，$p\{E\in w\mid\theta\}$ガ

〔I〕 $p\{E\in w\mid\theta\}=\int\int\cdots\int_w p(E\mid\theta)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$

〔II〕 $p\{E\in w\mid\theta\}=\sum\sum\cdots_{(w)}\sum p(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid\theta)$

ノヤウニ和デ表サレル場合デアル。

便宜上，先ヅ〔I〕ノ場合ニツイテ述ベルコトトスル。コノ場合ノ問題ヲ解クニハ次ニ掲ゲルヤウナ諸定理ガ役立ツ。

$p\{E\in w\mid\theta\}$ガ積分

$$\int\int\cdots\int_w p(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid\theta)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

デ表サレルヤウナ負ナラザル函数$p(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid\theta)$（コレヲ便宜上$p(E\mid\theta)$ト略記スル）ガ存在シ，且$p(E\mid\theta)=$

$$\frac{\partial P\{E \in w \mid \theta\}}{\partial \theta} = \int\int\cdots\int_{w} \frac{\partial}{\partial \theta} P(E|\theta)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

ガ成立ツヤウナ性質ヲ備ヘテヰル（コノ仮定ノ許サレナイ場合ノアルトイフコトハ，附録ニ示シテアル），ト仮定スルト次ノ諸定理ガ成立ツ．定理ノ記述ヲ簡便ニスルタメニ $\left.\frac{\partial p(E|\theta)}{\partial \theta}\right| \theta = \theta_0$ ヲ $p'_\theta(E|\theta_0)$ デ表スコトトスル。

定理 1 積分

$$\int\int\cdots\int_{w} p(E|\theta_0)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \alpha \qquad (1)$$

ヲ満足サセル領域 w ノ中デ，一ツノ領域 w_0 シソノ内部デハ到ル処ニ於テ

$$p'_\theta(E|\theta_0) \geqq k\, p(E|\theta_0) \qquad (2)$$

ガ成立チ，外部デハ到ル処ニ於テ

$$p'_\theta(E|\theta_0) \leqq k\, p(E|\theta_0) \qquad (3)$$

ガ成立ツヤウニ定メルナラバ，(1) ヲ満足サセル任意ノ領域 w ニ対シテ

$$\int\int\cdots\int_{w_0} p'_\theta(E|\theta_0)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \geqq \int\int\cdots\int_{w} p'_\theta(E|\theta_0)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad (4)$$

ガ成立ツ。但シ(2),(3)ニ於ケル k ハ(1)ガ成立ツヤウニ定ムベキ定数デアル。

証明。w_0 ト w トニ共通ノ領域ヲ $w_0 w$ デ表シ，共通デナイ領域ヲ $w_0 - w_0 w$，$w - w_0 w$ デ表スコトニスルナラバ，

$$\iint\cdots\int_{w_0} p_\theta'(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n - \iint\cdots\int_{w} p_\theta'(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

$$= \iint\cdots\int_{w_0 - w_0 w} p_\theta'(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n - \iint\cdots\int_{w - w_0 w} p_\theta'(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n \qquad (4)$$

(2),(3)ニヨリ

$$\iint\cdots\int_{w_0 - w_0 w} p_\theta'(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n \geqq k\iint\cdots\int_{w_0 - w_0 w} p(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n \qquad (5)$$

$$\iint\cdots\int_{w - w_0 w} p_\theta'(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

$$\leqq k\int\int_{w-w_0 w}\cdots\cdots\int p(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

デアルカラ，（1），（4），（5）及（6）ニヨリ

$$\int\int_{w_0}\cdots\int p_\theta'(E|\theta)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n$$

$$-\int\int_{w}\cdots\int p_\theta'(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n$$

$$\geqq k\left\{\int\int_{w_0-w_0 w}\cdots\int p(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n\right.$$

$$\left.-\int\int_{w-w_0 w}\cdots\int p(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n\right\}$$

$$\geqq k\left\{\int\int_{w_0}\cdots\int p(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n\right.$$

$$\left.-\int\int_{w}\cdots\int p(E|\theta_0)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n\right\}$$

$$\geqq 0$$

依ツテ（4）ガ成立ツ．

上ノ定理ノ証明ニ於テ不等號ノ向キヲ変ヘルナラバ，直ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. 定理1ニ於テ(2),(3)ニ於ケル不等號ノ向キヲ変更スレバ,(4)ニ於テ不等號ヲ変更シタモノガ成立ツ

コレ等ノ定理ハ次ノヤウナ場合ニ利用出来ヨウ。即チ $p\{E \in w \mid \theta\} \equiv \beta(\theta \mid w)$ ヲ θ ノ函数ト考ヘタトキ,$\beta(\theta \mid w)$ ガ単調増大(減少)デアルコトガワカッテ場合ノ $\theta = \theta_0$ ノ近傍デ $\theta < \theta_0$ デアルヤウナ θ ニ対應スル母集團ヲ合格サセル確率ガ(1)ヲ満足サセル領域 w ノ中デハ最モ小サク(最モ大キク) $\theta > \theta_0$ デアルヤウナ θ ニ對應スル母集團ヲ合格サセル確率ハ,(1)ヲ満足サセル領域 w ノ中デハ最モ大キイ(最モ小サイ)ヤウナ合格圏 w_0 ヲ定メタイトキニハコレヲ利用シテヨイ。

尚ホ若シ w_0 ガ θ ノ任意ノ値ニ對シテ

$$\beta'(\theta \mid w_0) > \beta'(\theta \mid w)$$
$$\left[\beta'(\theta \mid w_0) < \beta'(\theta \mid w)\right] \tag{7}$$

ヲ満足サセテヰルナラバ,コノヤウナ w_0 ハ§3ニ於ケル(1),(2),(3)ヲ満足サセル合格圏デアル。

何トナレバ,$\beta'(\theta \mid w_0) > \beta'(\theta \mid w)$ ナル場合ニツイテイフト,

$$\beta(\theta_0 | W_0) = \beta(\theta_0 | W) = \alpha$$

$$\beta'(\theta_0 | W_0) > \beta'(\theta_0 | W)$$

デアルトキニハ，$\theta = \theta_0$ ノ近傍デハ

$$\beta(\theta | W_0) < \beta(\theta | W) \qquad (\theta < \theta_0 \text{ ニ對シ})$$

$$\beta(\theta | W_0) > \beta(\theta | W) \qquad (\theta > \theta_0 \text{ ニ對シ})$$

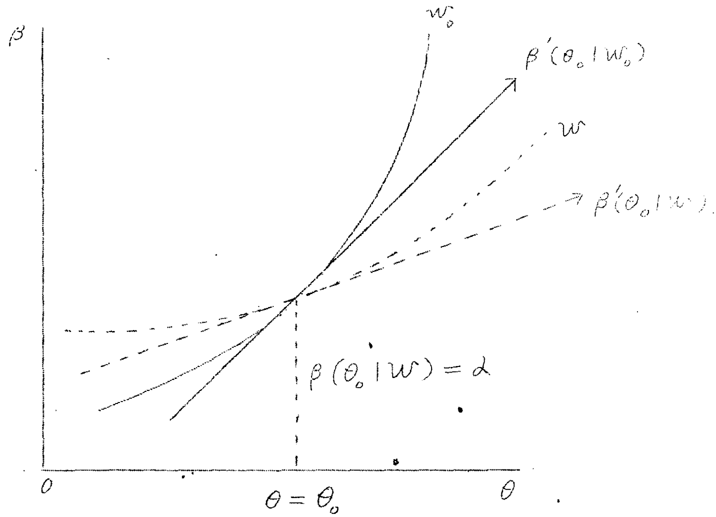
デアルカラ $\theta < \theta_0$ ナル如キ θ ノ任意ノ値ニ對シテハ

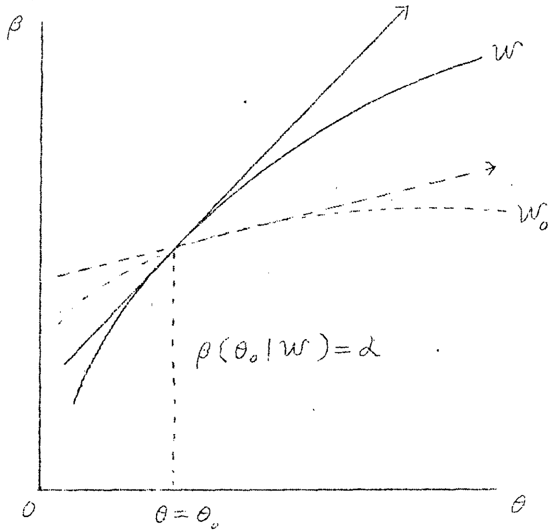
$$\beta(\theta | W_0) < \beta(\theta | W)$$

$\theta > \theta_0$ ナル如キ θ ノ任意ノ値ニ對シテハ

$$\beta(\theta | W_0) > \beta(\theta | W)$$

が成立ツカラデアル。





$\beta'(\theta_0|W_0) < \beta'(\theta_0|W)$ ノ場合ニハ

$\beta(\theta|W_0) > \beta(\theta|W)$　　($\theta < \theta_0$ ニ對シ)

$\beta(\theta|W_0) < \beta(\theta|W)$　　($\theta > \theta_0$ ニ對シ)

ガ成立ツトイフコトハ，前ノ場合ト同樣ニシテ証明サレル。

例一　見本 $E(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ガ母集團

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$ (σ ハ未知トスル)

カラ射倖的ニ取ラレタモノデアルト信ゼラレル場合，σ ガ或特定ノ値 σ_0 ヲ取ルトキニコノ母集團ヲ合格サセル確率即チ

$P\{E \in w \mid \sigma_0\}$ ガ一定ノ値 α（1ト0トノ間ニアル）ニ等シイヤウナ w ノ中カラ

$$\left.\frac{\partial P\{E \in w \mid \sigma\}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0}$$

ヲ最小ナラシメルヤウナ領域 w_0 ヲ求メルコト．

定理2ニ依ルト求メルトコロノ領域 w_0 ハソノ内部ニ於テハ到ル處デ

$$p'_\sigma(E \mid w_0) \leqq k\, p(E \mid \sigma_0) \qquad (1)$$

外部ニ於テハ到ル処デ

$$p'_\sigma(E \mid \sigma_0) \geqq k\, p(E \mid \sigma_0) \qquad (2)$$

トナルヤウニ定メレバヨイ．ココニ

$$p(E \mid \sigma_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$p'_\sigma(E \mid \sigma_0) = \left.\frac{\partial}{\partial \sigma} p(E \mid \sigma)\right|_{\sigma=\sigma_0}$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}\right\}\right|_{\sigma=\sigma_0}$$

デアルノデ，k ハ

$$p\{E\in w\mid\sigma\}=\iint\cdots\int_{w} p(E\mid\sigma)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint\cdots\int_{w}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{n} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

$$=\alpha \qquad (3)$$

ガ成立ツヤウニ定ムベキ一定数デアル。

既ニ証明サレテヰルヤウニ ※

$$\frac{\partial p\{E\in w\mid\sigma\}}{\partial\sigma}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\iint\cdots\int_{w}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{n} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint\cdots\int_{w}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{n} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}\right\}dx_1\,dx_2\cdots dx_n \qquad (4)$$

ガ成立ツカラ不等式(1),(2),デ w_0 ヲ定義スルコトハ不當デナイ。

※ コノ証明ハ既ニ他ノトコロデシテアル

トコロデ容易ニ知ラレルヤウニ

$$p'_{\sigma}(E\mid\sigma)=p(E\mid\sigma)\left\{-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum x_i^2}{\sigma^3}\right\}$$

デアルカラ，不等式(1)ハ次ノヤウニ書ケル、

$$-\frac{n}{\sigma_0}+\frac{\sum x_i^2}{\sigma_0^3} \leqq k$$

即チ

$$\sum\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2 \leqq n+k\sigma_0 \qquad (5)$$

ソコデ

$$\underset{\sum\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2 \leqq n+k\sigma_0}{\iint\cdots\int}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma_0^2}}dx_1dx_2\cdots dx_n=\alpha$$

即チ $\chi^2=\sum\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2$ トオイテ

$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ノ代リニ $\chi^2, y_2, \cdots y_n$ ナル新変数ヲ導入シ、$y_2, \cdots\cdots, y_n$ ニツイテソノ全変域ニ亘リ積分スルナラバ

$$\int_0^{k'}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d(\chi^2)=\alpha \qquad (6)$$

但シ $k'=n+k\sigma_0$

デアルヤウニ k' ヲ定メレバヨイトイフコトガワカル。

与ヘラレタ α ノ値ニ對シテ (6) ヲ満足セシメル k' ノ値ハ χ^2 ノ表ヲ用ヒレバ決定出来ル；ソコデコノ値ヲ k' トスルナラバ所要ノ領域 w_0 ハ

$$\chi^2=\sum\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2 \leqq k'$$

デ定メラレル、

上ニ定メタ領域 w_0 ハ次ノ性質ヲ有スル、

i) $p\{E\in w_0 \mid \theta\}=\beta(\theta \mid w_0)$ ヲ σ ノ函数ト考ヘルト、

コレハ σ ノ単調減少函数デアル、

ii) $\sigma=\sigma_0$ ノ近傍ニ於ケル σ ノ値ヲ標準偏差トスル母集團中、$\sigma<\sigma_0$ デアルヤウナモノヲ合格サセル確率ハ條件 (3) ヲ満足サセル領域 w 中デハ最モ大キク、$\sigma>\sigma_0$ デアルヤウナモノヲ合格サセル確率ハ上ト同様ノ w 中デハ最モ小サイ.

コノコトハ次ノヤウニスレバスグニ知ラレル。

$$\chi_1^2=\sum\left(\frac{x_i}{\sigma_1}\right)^2$$

トオケバ, χ_1^2 ハ矢張リ自由度ガ n ナル χ^2 ―分布ヲナスカラ確率 $p\{E\in w_0 \mid \sigma_1\}$ ハ次ノヤウニ表セル。

$$p\{E\in w_0 \mid \sigma_1\}=\int_{\chi^2\leqq k'}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\chi_1^2\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\chi_1^2}{2}}d\left(\chi_1^2\right)$$

シカシ, $\chi_1^2=\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\sum\left(\dfrac{x_i}{\sigma_0}\right)^2=\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2$ デアルカラ, $\chi^2\leqq k'$ ハ $\chi_1^2\leqq\left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2k'$ ト同値デアル. 故ニ

$$P\{E\in w_0 \mid \sigma_1\}=\int_0^{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 k'} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(\chi_1^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi_1^2}{2}} d(\chi_1^2)$$

$$=\int_0^{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 k'} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d(\chi^2)$$

コノ積分ヲ σ_1 ノ函数トシテ考ヘルト，σ_1 ガ小サクナルニ伴ツテ $\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 k'$ ガ大キクナリ，σ_1 ガ大キクナルニ伴ツテ $\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 k'$ ガ小サクナルコトカラ，σ_1 ノ単調減少函数デアルコトガワカル。即チ〔i〕ノ性質ガ明ニサレタ。

〔ii〕ノ性質ノアルベキコトハ，(3) ヲ満足サセル領域 w ノ中デ w_0 ハ

$$\left.\frac{\partial P\{E\in w_0 \mid \sigma\}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} \leqq \left.\frac{\partial P\{E\in w \mid \sigma\}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0}$$

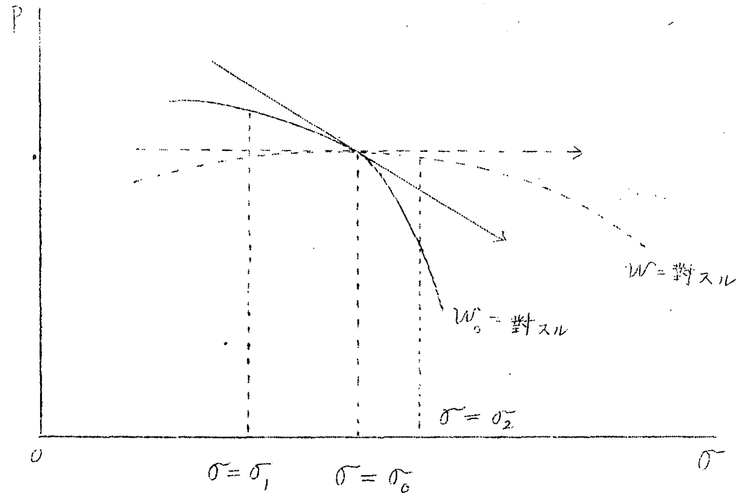
ヲ満足サセルヤウニ定メタコトカラ来ル。即チ $P\{E\in w_0 \mid \sigma\}$ ヲ σ ノ函数ト考ヘルト，コレハ σ ノ単調減少函数デアルカラ $\sigma=\sigma_0$ ニ於ケルコノ函数ノ微分係数ハ負デアル。ソシテ (3) ヲ満足サセル領域 w ノ中デハ，$\sigma=\sigma_0$ ニ於ケル微分係数ガ最モ小サイ、故ニ $\sigma=\sigma_0$ ノ近傍ニツイテイヘバ，$\sigma_1<\sigma_0$ ナル

σ_1 ニ對シテハ

$$P\{E \in W_0 \mid \sigma_1\} \geqq P\{E \in W \mid \sigma_1\}$$

$\sigma_1 > \sigma_0$ ナル σ_1 ニ對シテハ

$$P\{E \in W_0 \mid \sigma_2\} \leqq P\{E \in W \mid \sigma_2\}$$



例一ノ應用トシテハ次ノヤウナモノヲ擧ゲルコトガ出來ヤウ。

(a) 距離測量ノ精度ニ關スル檢定——同一ノ距離ヲ多數ノ人ニ各n回ヅツ測量サセタト想像スル。ソノトキ各人ノ精度即チソノ人ニ無限回同一ノ測定ヲ行ハシメタトキニ得ラレルト考ヘラレルトコロノ測定値ノ標準偏差（或ハソノ逆數）ガ或値σ_0

以下（或ハ $\frac{1}{\sigma_0}$ 以上）デアルカドウカヲ検定スルトイフニハ，上例デ定メタ合格圏ヲ用ヒテヨイデアラウ

(b)　射撃ノ確実度ニ関スル検定 ――― 同一ノ標的ヲ多数ノ人ニ各 n 回ヅツ射撃サセタト想像スル。ソノトキ，各人ノ射撃ノ確実度即チソノ人ニ無限回射撃サセタトキニ得ラレルト考ヘラレルトコロノ標的カラフレノ標準偏差（或ハソノ逆数）ガ或値 σ_0 以下（或ハ $\frac{1}{\sigma_0}$ 以上）デアルカドウカヲ検定スルトイフ問題ニモ上例ノ合格圏ハ用ヒラレヨウ。

(a)，(b) 何レノ場合ニ於テモ，n 回ノ試行デ得ラレル値ヲ

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$$

トスルナラバ，

$$\chi^2 = \sum_{i=1}\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2 \leqq k'$$

但シ k' ハ (6) デ定メラレル定数デアルカドウカヲ検ベルコトニ依ッテ目的ガ達セラレルノデアル。

例二　見本 $E(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ガ母集團

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2}}$$

カラ射影的ニ取ツタモノデアルト信ゼラレル場合，ξ ガ或特定ノ値 ξ_0 ヲ取ルトキニ，コノ母集團ヲ合格サセル確率 $P\{E\in w_0 \mid \xi_0\}$ ガ一定ノ値 α （1ト0トノ間ニアル）ニ等シクナルヤウナ領域 w ノ中カラ

$$\left.\frac{\partial P\{E\in w \mid \xi\}}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0}$$

ヲ最大ナラシメルヤウナ領域 w_0 ヲ求メルコト．

定理1ニ依ルト，求メルトコロノ領域 w_0 ハソノ内部ニ於テハ到ル処デ

$$p'_{\xi}(E \mid \xi_0) \geqq k\, p(E \mid \xi_0) \qquad (1)$$

外部ニ於テハ到ル処デ

$$p'_{\xi}(E \mid \xi_0) \leqq k\, p(E \mid \xi_0) \qquad (2)$$

トナルヤウニ定メレバヨイ、ココニ

$$p'_{\xi}(E \mid \xi_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi_0)^2}{2}}$$

$$p'_{\xi}(E \mid \xi_0) = \left.\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m e^{\Sigma(x_i-\xi)^2}\right\}\right|_{\xi=\xi_0}$$

デアツテ，k ハ、

$$P\{E\in w \mid \xi_0\} = \iint\cdots\int_w p(E \mid \xi_0)\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

$$= \iint\cdots\int_{w} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\frac{\sum(x_i-\xi_0)^2}{2}} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \alpha \qquad (3)$$

が成立ツヤウニ定ムベキ一定数デアル。

既ニ他ノトコロデ証明サレテヰルヤウニ

$$\frac{\partial P\{E \in w \mid \xi\}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \iint\cdots\int_{w} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\sum(x_i-\xi)^2} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \iint\cdots\int_{w} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\sum(x_i-\xi)^2} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n\right.$$

が成立ツカラ，不等式(1), (2)ハソレゾレ次ノヤウニ書ケル

$$\sum(x_i - \xi_0) \geqq k \qquad (4)$$

$$\sum(x_i - \xi_0) \leqq k \qquad (5)$$

故ニ k ハ

$$\iint\cdots\int_{\sum(x_i-\xi_0) \geqq k} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\frac{\sum(x_i-\xi_0)^2}{2}} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \alpha \qquad (6)$$

が成立ツヤウニ定ムベキデアル

トコロデ，(4)ハ

$$\bar{x} - \xi_0 \geqq \frac{k}{n} \qquad (7)$$

ト書カレ，(6) ハ結局

$$\int_{\bar{x}-\xi_0 \geqq \frac{k}{n}}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(\bar{x}-\xi_0)^2}{2}} d\bar{x} = \alpha \tag{8}$$

ト書ケルトイフコト＝注意スルト，k ハ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t \geqq \frac{k}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k/\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha \tag{9}$$

ヲ満足サセルヤウ＝定メレバヨイトイフコトガワカル。

(9) ヲ満足サセル k ノ値ハ正常確率積分表＝依ツテ容易＝求メラレルカラ，ソノ値ヲ矢張リ k デ表スコト＝スレバ，

$$\bar{x} - \xi_0 \geqq \frac{k}{n} \quad \text{或ハ} \quad \bar{x} \geqq \xi_0 + \frac{k}{n} \tag{10}$$

ガ所要ノ領域 W_0 ヲ定義スル。

上ノヤウ＝定メタ領域 W_0 ハ次ノヤウナ性質ヲ備ヘテヰル。

i) $P\{E \in W_0 | \xi\} \equiv \beta(\xi | W_0)$ ヲ ξ ノ函数ト考ヘルト，コレハ ξ ノ単調増大函数デアル。

ii) $\xi = \xi_0$ ノ近傍＝於ケル ξ ヲ平均トスル母集団ノ中デ，$\xi < \xi_0$ デアルヤウナモノヲ合格サセル確率ハ條件 (3) ヲ満足サセル領域 W 中デハ最モ小サク，$\xi > \xi_0$ デアルヤウナモ

ノヲ合格サセル確率ハ上ト同様ノw中デハ最モ大キイ。

コノコトハ次ノヤウニシテ知ラレル。ξノ任意ノ値ξニ對シテハ

$$P\{E\in w_0\mid\xi_2\}=\underset{\Sigma(x_i-\xi_0)\geqq k}{\int\int\cdots\int}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi_2)^2}{2}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\underset{\Sigma(x_i-\xi_2)\geqq k+n(\xi_0-\xi_2)}{\int\int\cdots\int}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi_2)^2}{2}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

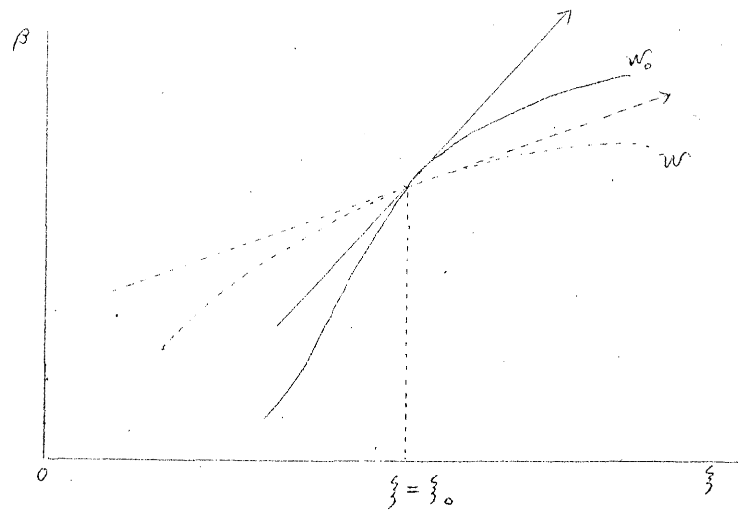
$$=\int_{\bar{x}-\xi_1\geqq\frac{k}{n}+(\xi_0-\xi_2)}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n(\bar{x}-\xi)^2}{2}}d\bar{x}=\int_{t\geqq\frac{k}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}(\xi_0-\xi_2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\int_{\frac{k}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}(\xi_0-\xi_1)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\qquad\left[t=\sqrt{n}(\bar{x}-\xi_0)\right]$$

デアルカラ，ξ_2ガ増大スルト積分限界 $\frac{k}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}(\xi_0-\xi_2)$ ハ減少スルカラ $P\{E\in w_0\mid\xi_2\}$ ハ増大スルトイフコトガ知ラレ，又ξ_2 ガ減少スルト $P\{E\in w_0\mid\xi_2\}$ ハ減少スルトイフコトガ知ラレル。即チ $P\{E\in w_0\mid\xi_2\}$ ハξノ單調増大函數デア

ル。ソレ故 $\xi > \xi_0$ デアルヤウナ母集団ヲ合格サセル確率ハ α ヨリモ大デアルノミナラズ, ξ ト共ニ増大シ, $\xi < \xi_0$ デアルヤウナ母集団ヲ合格サセル確率ハ α ヨリ小デアルノミナラズ ξ ト共ニ減少スル。

$\xi = \xi_0$ ニ於ケル $\beta(\xi \mid w_0)$ ノ微分係数ハ $\beta(\xi_0 \mid w) = \alpha$ ナラシメルヤウナ領域 w ノ中デハ最大デアルノデ, 而カモ $\beta(\xi \mid w_0)$ ハ ξ ノ單調増大函数デアルカラ, $\xi = \xi_0$ ノ近傍ニツイテイヘバ w_0 ガ $\xi > \xi_0$ デアルヤウ母集團ヲ合格サセル確率ハ $\beta(\xi_0 \mid w) = \alpha$ ヲ満足サセル領域 w ノ中デハ最モ大キク, $\xi < \xi_0$ デアルヤウナ母集團ヲ合格サセル確率ハ上ト同様ノ領域 w ノ中デハ最モ小サイトイヘル。



附　録

注意

$$P\{E\in w\,|\,\theta_0\}=\iint\cdots\int_w p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta_0)\,dx_1dx_2\cdots dx_n \quad (1)$$

デアルトキ、

$$\left.\frac{\partial P\{E\in w\,|\,\theta\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} \quad (2)$$

ト

$$\iint\cdots\int_w \frac{\partial}{\partial\theta}p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\,dx_1dx_2\cdots d_n\Big|_{\theta=\theta_0} \quad (3)$$

ガ必ズシモ一致シナイコトハ，次ノ例デ知ラレル。

簡単ノタメニ $n=2$ トシ

$p(x_1,x_2|\theta)$ トシテ

$\theta_1,\ \theta_2\geqq 0$ ニ對シテハ

$$p(x_1,x_2|\theta)=e^{-(x_1-\theta)-(x_2-\theta)} \quad (4)$$

ソノ他ノトコロデハ

$$p(x_1,x_2|\theta)=0 \quad (5)$$

デアルトコロノ一ツノ確率法則ヲトラウ、ソシテ領域 w ハ

~~(179ゲ)~~

$$x_1 + x_2 \leqq a \qquad (a\text{ハ定数デ } 2\theta < a) \qquad (6)$$

デアルトスル，サウスルト

$$P\{E\in w|\theta\} = \int_\theta^{a-\theta}\left\{e^{-(x_1-\theta)}\int_\theta^{a-x_1} e^{-(x_2-\theta)}dx_2\right\}dx_1$$

$$= 1 - e^{-(a-2\theta)}(1+a-2\theta) \qquad (7)$$

故ニ

$$\frac{d}{d\theta}P\{E\in w|\theta\} = -2(a-2\theta)e^{-(a-2\theta)} \qquad (8)$$

トコロデ

$$\iint\cdots\int_w p'_\theta(x_1, x_2|\theta)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$= 2\iint\cdots\int_w p(x_1, x_2|\theta)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$= 2\left\{1 - e^{-(a-2\theta)}(1+a-2\theta)\right\} \qquad (9)$$

デアルカラ，(8)ト(9)トハ一致シナイ．

コノヤウナ訳デアルカラ，本文ニ述ベタ方法ハ実用的ナ確率法

則ノ場合ニ於テモ適用ノ出来ナイ場合ガアルノデアル。

上掲ノ例ハ Neyman－Pearson ニ負フトコロノモノデアル。