113

(711)

半平面ニ於ケル解析函数

―記号解析ニ関聯シテ―，(I)

河 田 龍 夫

1. 函数族 $H_2(0)$ ニ就イテ

$f(z)$ ヲ $R(z)>0$ デ正則トシ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+it)|^2dt<c$，

$R(z)=s>0$ トシ C ハ s ニ独立トスル、コノトキ

$f(z)$ ハ $H_2(0)$ ニ属スルトイフ．

是ニ對シテハ次ノ定理ガ知ラレテヰル．

定理 1.1. (i) ······ $f(z)\in H_2(0)$ トスルト

non-tangential ニ $z\to it$ ノトキ $f(it)$ ガ

殆ド何処デモ存在シテ $f(it)\in L_2(-\infty,\infty)$

(ii) $f(z)$ ハ Cauchy 積分又ハ poisson 積分デ表

サレル、即チ

$$(1.1)\quad f(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(it)}{it-z}dt\qquad Rz>0$$

又ハ (1.2)

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tf(it)}{(t-s)^2+t^2}dt.$$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+it)-f(it)|^2dt\to 0\qquad s\to 0$

(7.3) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+it)|^2 dt \uparrow \int_{-\infty}^{\infty}|f(it)|^2 dt \qquad s \downarrow 0$

定理 7.2　$f(it)$ ガ $H_2(0)$ ノ函数ノ境界函数ナルタメノ

必要且充分條件ハ

$$f(it) = l.i.m.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} h(x) e^{-itx} dx$$

トスルトキ

$h(x) = 0 \qquad (x < 0)$ ナル事デアル　コヽニ

$h(x) \in L_2(0, \infty)$

定理 7.3.　積分 $\int_0^{\infty} h(x) e^{-zx} dx$ ハ　$Rz > 0$ デ

普通ノ意味デ存在シ $f(z) = \int_0^{\infty} h(x) e^{-zx} dx$ トナル

定理 7.4.　$\int_0^{\infty} h(x) e^{-px} dx$ ガ　実数 $p > 0$ デ通常ノ

意味デ收斂スレバ $\int_0^{x} h(x) dx = o(e^{px}) \qquad (x \to \infty)$

デアル

定理 7.5.　$f(z) \in H_1(0)$ トスル　$\int_{-\infty}^{\infty}|f(it)| dx < \infty$

ソウスルト

$\int_0^{\infty} \frac{h(x)}{x} dx$　ハ絶対收斂デ

$$\int_0^{\infty} \frac{|h(x)|}{x} dx \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(it)| dt$$

但シ $f(it)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty h(x)e^{-itx}dx$ トスル

2. 函数族 $G_2(0)$ ニ就イテ

定義 $f(z)$ ガ $Rz>0$ デ正則 $z=s+it$,

$s \geqq \sigma > 0$ ニ對シテ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+it)|^2 dt \leqq C_\sigma$$

$(C_\sigma \to \infty$ デモヨイ. $(\sigma \to 0))$

ガ成立スルトキ $f(z)\in G_2(0)$ トイフ。

定理 2.1.

(i) $h(x)$ ガ $e^{-\varepsilon x}h(x)\in L_2(0,\infty)$ $(\varepsilon>0)$

トスルト

$$f(z)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-sx}h(x)e^{-itx}dx$$

$z=s+it$ ハ $G_2(0)$ ニ屬スル

(ii) $f(z)\in G_2(0)$ ナラバ $x<0$ デ $h(x)=0$

ナル如キ $h(x)$ ガ存在シテ

任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ $e^{-\varepsilon x}h(x)\in L_2(0,\infty)$

但シ $f(z)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-sx}h(x)e^{-itx}dx$.

又之ハ通常ノ意味デ收斂スル

証　明

(i) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-sx-itx}h(x)\,dx$ ガ一般ニ收斂シテ解析的ナルコトハ明ラカデアル.

$s \geqq \sigma > 0$ ナル σ ヲトルト

$$f(s+it) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-((s-\sigma)+it)x}\,,$$

$e^{-\sigma x}h(x)\,dx$ トナリ.

$$= \varphi_\sigma(\alpha+it)\,, \qquad \alpha = s-\sigma$$

トナリ明カニ $\alpha+it$ ノ解析函数デ $H_2(0)$ ニ属スル（定理12）故ニ証明サレタ.

(ii) $z = s+it$ $\quad f(s+\varepsilon+it) = \varphi(s+it)$

$= \varphi(z)$ トオク、$\varepsilon > 0$

$f(z) \in G_2(0)$ デアルカラ $\varphi(z) \in H_2(0)$

故ニ

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\,g_\varepsilon(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+it)x}\,g_\varepsilon(x)\,dx$$

故ニ $\varphi(z)$ ハ $e^{-sx}g_\varepsilon(x)$ ノふーりえ変換デ

$$e^{-sx}g_\varepsilon(x)=e^{-(\xi-\varepsilon)x}g_\varepsilon(x)=e^{-\xi x}\cdot e^{\epsilon x}g_\varepsilon(x)$$

コヽニ $s+\varepsilon=\xi$, $\varphi(z)=f(\xi+it)$

同様ニ $s'+\varepsilon'=\xi$ $s\neq s'$, $\varepsilon'>0$ ナル

s'ヲトル

$$\psi(z)=\psi(s+it)=f(\xi+it) \text{ハ}$$

$z'=s'+it$ ノ解析函数デ 上ト同様ニ

$\psi(z)$ ハ $e^{-s'x}g_{\varepsilon'}(x)$ ノ Fourier 変換デ

$$e^{-s'x}g_{\varepsilon'}(x)=e^{-\xi x}e^{\varepsilon' x}g_{\varepsilon'}(x)$$

$\varphi(z)=\psi(z')=f(\xi+it)$ デアルカラ

$$e^{\varepsilon x}g_\varepsilon(x)=e^{\varepsilon' x}g_{\varepsilon'}(x)$$

故ニ $e^{\varepsilon x}g_\varepsilon(x)$ ハ ε ニ無関係デ是ヲ $h(x)$ トオク

定理 1.2 ヨリ $g_\varepsilon(x)\in L_2(0,\infty)$,

$$g_\varepsilon(x)=0 \quad (x<0 \text{ ニ対シテ})$$

故ニ 負ナル x ニ対シテ $h(x)=0$

正ナル ε ニ対シテ $e^{-\varepsilon x}h(x)\in L_2$ (證終)

3. $h(x)$ ノ Laplace 変換ト $\int_0^x h(x)\,dx$ ノ Laplace 変換トノ関係。

定理 3.1 任意ノ正ナル ε ニ対シテ

$h(x)e^{-\varepsilon x} \in L_2(0,\infty)$ ソノ Laplace 変換ヲ

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx} h(x)\,dx \qquad Rz > 0$$ トスルト

任意ノ正ナル ε ニ対シテ $\int_0^x h(u)\,du = o(e^{\varepsilon x})$ トナリ

$\int_0^x h(u)\,du = g(x)$ ニ対シテハ $g(x)e^{-\varepsilon x} \in L_2(0,\infty)$ ヲ

$g(x)$ ノ Laplace 変換ハ

$$\mathcal{G}(z) = \frac{f(z)}{z}, \qquad Rz > 0$$

証明 定理 1.4 ヨリ 最初ノ部分ハ明カデアル。

$g(x)e^{-\varepsilon x} \in L_2(0,\infty)$ モ明カデ

$g(x)$ ノ Laplace 変換ハ

$$\mathcal{G}(z) = \int_0^\infty g(x)e^{-zx}\,dx \qquad Rz > 0$$

$$= \left[\frac{e^{-zx}}{-z} g(x)\right]_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zx} h(x)\,dx$$

$Rz > \varepsilon$ ナル ε ヲ選ベバ $g(x) = o(e^{\varepsilon x})$

~~(ナイ-ケ)~~

故ニ $x \to \infty$ ノトキ $e^{-R(z)x} \cdot g(x) \longrightarrow 0$

故ニ吾々ノ結果ハ明カデアル.

定義　今 $f(z) \in G_2(0)$ ナルトキ 定理2.1ニ於ケルh(x)ヲ $f(z) \doteqdot h(x)$ トカク

定理 3.2　$f(z) \in G_2(0)$, $f(z) \doteqdot h(x)$ トスル

更ニ $zf(z) \in G_2(0)$ ナラバ $h(0) = 0$ デ

$h(x)$ ハ絶対連続函数ニ同等デアル.」

且ツ $h(x) = o(e^{\varepsilon x})$ スベテノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ

$$h(x) = \int_0^x g(u)\,du \quad \text{トスレバ}$$

$$zf(z) \doteqdot g(x)$$

証明　$h(x) \in L_2(0, \infty)$ $zf(z) \in H_2(0)$ トシテヨイ 何トナレバモシ然ラザレバ

$\varepsilon > 0$ ヲ充分小サク選ビ

$e^{-\varepsilon x} h(x) \doteqdot \varphi(z)$ ヲ考ヘル.

$\varphi(z) = f(z+\varepsilon)$,　$zf(z) \in G_2(0)$

デアルカラ

$$z\varphi(z) = zf(z+\varepsilon) = (z+\varepsilon)f(z+\varepsilon) - \varepsilon f(z+\varepsilon)$$

$\in H_2(0)$ トナリ モシ $h(x) \in L_2(0,\infty)$

ノトキ定理ガ証明サレヽバ

$$e^{-\varepsilon x} h(x) \equiv \int_0^x g_\varepsilon(u)\, dx \qquad \text{(同筆)}$$

トナリ是ヨリ

$$h(x) \equiv e^{\varepsilon x} \int_0^x g_\varepsilon(u)\, du \quad \text{トナリ}$$

是ハ明カニ

$\int_0^x h(u)\, du$ ノ形ヲトル従ツテ $h(0) = 0$

故ニ $e^{-\varepsilon x} h(x) = o(e^{\varepsilon' x})$

サテ $h(x) = o(e^{(\varepsilon' + \varepsilon)x})$, $\varepsilon\, \varepsilon'$ ハ任意デアルカラ我々ノ結果ヲ得ル, 定理ノ最初ノ部分ハ明カデアラウ

$h(x) \in L_2(0,\infty)$ 従ツテ $f(z) \in H_2(0)$ トスル 又 $zf(z) \in H_2(0)$ トスル

定理 ノ,ノカラ $S > \sigma > 0$ ナル σ ヲトルト

$z = S + it$ トシテ

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma + i\tau)}{\sigma + i\tau - z}\, d\tau$$

故 $= \int_{-A}^{A} f(s+it)\,dt = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma+i\tau)\,d\tau \int_{-A}^{A} \frac{dt}{\sigma+it-z}$

$A\to\infty$ ノ時 lim ハ中ヘ入レラレマイ 何トナレバ

$$f(\sigma+i\tau) = \frac{(\sigma+it)f(\sigma+i\tau)}{\sigma+i\tau}$$

$\therefore\ f(\sigma+i\tau) \in L_1(-\infty,\infty)$ デ

$$\left|\int_{-A}^{A}\frac{dt}{\sigma+it-p}\right| = \left|\int_{-A}^{A}\frac{dt}{(-s+\sigma)+i(\tau-t)}\right| \leqq M$$

デアルカラ

且 $\int_{-A}^{A}\frac{dt}{\sigma+i\tau-z} \longrightarrow 0$ デアルカラ $(A\to\infty)$

$$(3.1)\qquad \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(s+it)\,dt = 0$$

サテ　$zf(z) \in H_2(0)$ デアルガ

定理 1.1 ニヨリ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |zf(z) - f(it)|^2\,dt \to 0$$

ナル $\varphi(it) \in L_2(-\infty,\infty)$ ガ存在シテ

$$g(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(it)\,e^{ixt}\,dt$$

トスルト $g(x)=0 \quad (x<0)$ デ unicity

ニヨリ

$$(s+it)f(s+it) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-(s+it)x}dx$$

トカケル即チ

$$e^{-sx}g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(s+it)f(s+it)e^{itx}dt$$

$$g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(s-it)f(s+it)e^{(s+it)x}dt$$

$$\int_0^x g(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty du \ \mathrm{l.i.m}\int_{-A}^{A}(s+it)f(s+it)e^{(s+it)u}dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}(s+it)f(s+it)dt\int_0^x e^{(s+it)u}du$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\left[f(s+it)e^{(s+it)x}-f(s+it)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s+it)e^{(s+it)x}dx \qquad (3.1)\text{ニヨリ}$$

$$\equiv h(x)$$

他ノモノハ明カ。

以　上