457

~~461~~

平方和ノ自由度ニ就テ

昭和19年1月数物常会講演
兼任所員　増山元三郎

平方和ノ自由度ノ定義ノ仕方トシテハ従来, A.T. Craig: certain mean value problem in statistics, Bull. Amer. Math. Soc. XLII (1936) 670-674. (日本数物図書) ノモノガ一番一般的ナモノト思ハレルガ, 夫デモ普通ヨク使ウ場合デサヘコノ定義カラ直接ハ得ラレナイ。(1)

筆者ハ従来ノモノヲ含ミ, 而モ与ヘラレタ條件式カラ直ニ必要ナ平方和ノ陽ナ形ヲ与ヘル様ナ定理ヲ与ヘヨウト思フ.

K箇ノ独立ナ線型條件式ガN箇ノ変量 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ ニ与ヘラレタ場合, 何ンナ二次形式ヲ採ッテモソノ自由度ガ$(N-K)$ニ等シイ訳デハナイカラデアル.

今 $x_1, x_2, \cdots x_N$ ヲ母平均 0, 母分散 $\sigma^2 (<\infty)$ デアル様ナ仮設ノ母集団ノ無作為標本デアルト假定スル. 母平均ガmナラ眞差 $x_1-m, x_2-m, \cdots, x_N-m$ ヲ更メテ $x_1, x_2 \cdots, x_N$ ト考ヘルコトニスル。

(1) 後述ノ例1ニ相当スル場合ノヤリ方デハ條件ヲ $x_1+x_2+\cdots+x_N=0$ ト与ヘネバナラナイ。

$x_1, x_2, \cdots, x_N$ ニ対シ k 個ノ線型独立ナ線型條件式

(1) $\Sigma g_{\alpha i} x_i = a_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \cdots, k \ (<N)$

ガ与ヘラレテヰルトシヨウ。茲ニ云フ線型独立ハ行列 $(g_{\alpha i})$ ノ階数ガ k ニ等シイコトヲ意味スル。以下條件式番号 α ニ関スル 1 カラ k 迄ノ和ハ S、変量番号 i ニ関スル 1 カラ N 迄ノ和ハ Σ デ区別スルコトニ約束スル。

今 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ ヲ直交座標トスルユークリッド空間 R_N ヲ考ヘ、ソノ各ノ座標軸方向ヲ単位ベクトル $n_1, n_2, \cdots, n_N$ デ表サウ。$\{n_i\}$ ヲ基トシテ次ノ $N+1$ 個ノベクトルヲ定義スル。

(2) $g_\alpha = \Sigma g_{\alpha i} n_i \quad \alpha = 1, 2, \cdots k,$

(3) $p_\beta = \Sigma p_{\beta i} n_i \quad \beta = k+1, k+2, \cdots, N$

(4) $x = \Sigma x_i n_i$

茲ニ p_β ハ次ノ直交條件ヲ満足スルモノトスル。

(5) $g_\alpha p_\beta = 0, \quad p_\alpha p_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ [1]

即チ p_β ハ g_α ト直交シ而モ $p_{k+1}, p_{k+2}, \cdots, p_N$ ハ相互ニ直交スル様ナ単位ベクトルデアル。

---

1) Kronecker ノデルタ記号デ $\alpha = \beta$ ナラ 1、$\alpha \neq \beta$ ナラ 0 ヲ表ハス。

$\mathfrak{z}_A$ ハ之ダケノ條件デハ一意的ニハ定マラナイガ斯カルベクトル $\{\mathfrak{p}_\beta\}$ ガ少クモ一組存在スルコトハ R_N ノ定義カラ確カデアル。

ベクトル記号ヲ用ヰルト，(1) ハ

(6) $$\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e} = a_\alpha$$

茲ニ $\mathfrak{q}$ ハ一定トシ，a_α ハ必ズシモ常数デハナクテヨイ。尚ホ次ノ如ク v_β ヲ定義シヨウ

(7) $$\mathfrak{p}_\beta\cdot\mathfrak{e} = v_\beta$$

$(q_{\alpha i})$ ノ階数ガ n デアルカラ，之ト轉置行列トヲ掛ケタモノニ相当スル行列 $(\mathfrak{q}_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\beta)$ ノ階数ハ n デアル。従ッテ

(8) $$\Phi_{\alpha\beta} = \mathfrak{q}_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\beta$$

ト置クト $\Phi_{\alpha\beta}=\Phi_{\beta\alpha}$ デ，行列 $(\Phi_{\alpha\beta})$ ノ逆行列 $(\varphi_{\alpha\beta})$ ガ存在スル。今

(9) $$\mathfrak{q}^*_\alpha = S\,\varphi_{\alpha\beta}\,\mathfrak{q}_\beta$$ ト置クト

(10) $$\mathfrak{q}_\beta\cdot\mathfrak{q}^*_\alpha = \mathfrak{q}_\beta\cdot S\,\varphi_{\alpha\gamma}\,\mathfrak{q}_\gamma = S\,\varphi_{\alpha\gamma}\,\Phi_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

同様ニ(5)カラ

(11) $\mathfrak{p}^*_\alpha = S\, \delta_{\alpha\beta}\, \mathfrak{p}_\beta$ ト置クト

(12) $\mathfrak{p}^*_\alpha = \mathfrak{p}_\alpha$.

(13) $\mathfrak{q}^*_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\beta = 0,\quad \mathfrak{q}^*_\alpha \cdot \mathfrak{p}^*_\beta = 0,\quad \mathfrak{q}_\alpha \cdot \mathfrak{p}^*_\beta = 0$

ガ成立ツカラ、$\{\mathfrak{q}^*_\alpha, \mathfrak{p}^*_\beta\}$ ハ $\{\mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta\}$ ノ相逆系ニ外ナラナイ。

$\{\mathfrak{q}^*_\alpha, \mathfrak{p}^*_\beta\}$ 即チ $\{\mathfrak{q}^*_\alpha, \mathfrak{p}_\beta\}$ ノ Gram ノ行列式ヲ作ルト、

$$\mathfrak{q}^*_\alpha \cdot \mathfrak{q}^*_\beta = S\, \varphi_{\alpha\gamma}\, \mathfrak{q}_\gamma \cdot S\, \varphi_{\beta\varepsilon}\, \mathfrak{q}_\varepsilon = SS\, \varphi_{\alpha\gamma}\varphi_{\beta\varepsilon}\Phi_{\gamma\varepsilon}$$
$$= S\, \varphi_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\beta}$$ ダカラ

(14)

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{q}^*_\alpha \cdot \mathfrak{q}^*_\beta & \mathfrak{q}^*_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\gamma \\ \mathfrak{p}_\varepsilon \cdot \mathfrak{q}^*_\beta & \mathfrak{p}_\varepsilon \cdot \mathfrak{p}_\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \delta_{\varepsilon\gamma} \end{vmatrix} = |\varphi_{\alpha\beta}|.$$

従ッテ $\mathfrak{q}^*_\alpha, \mathfrak{p}_\beta$ ハ R_N ノ線型独立デアル。故ニ R_N 中ノ任意ノベクトル $\mathfrak{x}$ ハ次ノ形ニ一意的ニ書キ表セル。

(15) $\mathfrak{x} = S\, \xi_\alpha\, \mathfrak{q}^*_\alpha + S'\, \eta_\beta\, \mathfrak{p}_\beta$.

S' ハ添字ニツイテ $n+1$ カラ N ニノ和ヲ表スモノトスル。$\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{q}_\gamma$, $\mathfrak{p}_\varepsilon$ トノ内積(スカラー積)ヲ作レバ、(11)及ビ(13)ニ依リ

(16) $\xi_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{x} = a_\alpha,\ \eta_\beta = \mathfrak{p}_\beta \cdot \mathfrak{x} = v_\beta$

従ッテ

(17) $\mathfrak{x} = S\, a_\alpha \mathfrak{a}_\alpha^* + S'\, v_\beta \mathfrak{p}_\beta .$

今x_iニ関スル非負ニ次形式θガアリ，θノ母集團全体デノ平均$E(\theta)$ガ$f\sigma^2$ニ等シイ時θノ自由度ハfデアルト定義スレバ

補助定理 v_β^2ノ自由度ハ1デアル。

∵ $E(v_\beta^2) = E(\mathfrak{p}_\beta\, \mathfrak{x})^2 = E\{\Sigma p_{\beta i} x_i \Sigma p_{\beta j} x_j\}$

(18) $= \Sigma\Sigma\, p_{\beta i}\, p_{\beta j}\, E(x_i x_j)$

トコロガ，x_iノ母平均ハ0，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ハ相互ニ独立ダカラ1)

(19) $E(x_i x_j) = \sigma^2 \delta_{ij}$

(20) $E(v_\beta^2) = \Sigma\Sigma\, p_{\beta i}\, p_{\beta j}\, \sigma^2 \delta_{ij} = \Sigma p_{\beta i}^2 \sigma^2 = \sigma^2$

$= \sigma^2$

コノ補助定理ニ依レバ

定理 $S = (\mathfrak{x} - S\, a_\alpha \cdot \mathfrak{a}_\alpha^*)^2$ノ自由度ハ$(N-k)$デアル．

∵ $E(S) = E\{S' v_\beta \mathfrak{p}_\beta\}^2 = E\{S' v_\beta \mathfrak{p}_\beta\, S' v_\alpha \mathfrak{p}\}$

$= E\{S' S'\, v_\beta v_\alpha \delta_{\alpha\beta}\} = E(S' v_\beta^2)$

$= S' E(v_\beta^2) = (N-k)\sigma^2.$

例1．母集團m，母分散$\sigma^2 (<\infty)$ノ母集團ノ大キサNノ無作為標本ヲ$x_1, x_2, \cdots, x_N$トスレバ，偏差平方和

1) H. Cramer: Randomvariables etc., 1937, P. 22

(22) $S_x = \Sigma(x_i - \bar{x})^2$, $\bar{x} = \Sigma x_i/N$ ノ自由度ハ
$(N-1)$デアル。

何者

$$\mathfrak{a}_1 = \Sigma x_i / N, \quad a_1 = \bar{x}$$

デアルカラ $E_{11} = 1/N$, 従ッテ

$$\mathfrak{g}_{11} = N, \quad 故ニ$$

$$\mathfrak{a}_1^* = \Sigma x_i.$$

従ッテ

$S = (\mathfrak{y} - \Sigma \bar{x} x_i)^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2$ ノ自由度ハ
$(N-1)$デアル。

例2, 変数 X_α ガ x_α ニ等シイ時, 変量 Y ノ母平均ガ, β_α ヲ或ル常数トシテ

(23) $E(Y) = S\beta_\alpha x_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \cdots, p\,(<N)$

デアリ母分散 $\sigma^2\,(<\infty)$ ハ x_α ニ依ラナイデ一定トスル。β_α ノ推定量 b_α ヲ大キサ N ノ無作為標本 $(x_{\alpha i}, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots, N)$ カラ次式ニ依ッテ定義スル。即チ

(24) $Q = \Sigma(y_i - S\beta_\alpha x_{\alpha i})^2$

ヲ最小ナラシメル如キ β_α ヲ b_α トシテ採ル[1]。

$\partial Q / \partial \beta_\alpha = 0$ カラ b_α ヲ定メル式ハ

1) 所謂最小自乗法デアルガ, Y ノ正規分布ヲ假定シ, 母数 β_α ヲ最尤法デ推定シテ得ラレル。

(25) $S b_\alpha \Psi_{\alpha\beta} = \sum y_i x_{\beta i}$

(26) 但シ $\Psi_{\alpha\beta} = \sum x_{\alpha i} x_{\beta i}$ トスル。

コノ式ガ唯一組ノ解ヲ有スル為ノ必要且充分條件ハ行列式 $|\Psi_{\alpha\beta}| \neq 0$ 即チ行列 $(\Psi_{\alpha\beta})$ ノ階數ガ p ニ等シイコトデアル。従ッテ $x_{\alpha i}$ 迄サカノボレバ行列 $(x_{\alpha i})$ ノ階數ガ p ニ等シイコトガ必要且充分デアル。コノ條件ハ成立ツモノトシヨウ。スルト行列 $(\Psi_{\alpha\beta})$ ノ逆行列 $(\psi_{\alpha\beta})$ ガ存在スル。之ヲ用ヒテ

(27) $b_\alpha = S \psi_{\alpha\beta} \sum y_i x_{\beta i}$

以上ノ諸式中デ変量ハ y デ x デハナイコトヲ特ニ注意シテ置キタイ。従ッテマタ $E(Y)$ ノ式デ x_i ハ恒等的 1 ニ等シクテヨイノデアル。

N 次元ユークリッド空間 R_N デ正ノ座標軸方向ノ単位ベクトル $\mathfrak{n}_i$ ヲ考ヘ $\{\mathfrak{n}_i\}$ ヲ底トシテ次ノ如キベクトルヲ定義シヨウ。

$$
(28)\quad \begin{cases}
\mathfrak{y} = \sum y_i \mathfrak{n}_i \\
\mathfrak{x}_\alpha = \sum x_{\alpha i} \mathfrak{n}_i \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, p \\
\mathfrak{z} = \sum \{y_i - E(y_i)\} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{y} - E(\mathfrak{y}) \\
\mathfrak{d} = \mathfrak{y} - S b_\alpha \mathfrak{x}_\alpha
\end{cases}
$$

トスルト (26) (27) ハ

(26') $\Psi_{\alpha\beta} = \mathfrak{e}_\alpha \cdot \mathfrak{e}_\beta$

(27') $b_\alpha = S\psi_{\alpha\beta}\,\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{e}_\beta$

従ツテ

(29) $\mathfrak{a}_\alpha = S\psi_{\alpha\beta}\,\mathfrak{e}_\beta$

ト定義スルト、$\mathfrak{a}_\alpha$ハ実ハ$\{\mathfrak{e}_\beta\}$ノ相逆系デ

(30) $\mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$

(27')ハ変形サレテ

(27'') $\mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{y} = b_\alpha$

故ニ

$$\mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{a}_\beta = S\psi_{\alpha\gamma}\,\mathfrak{e}_\gamma \cdot S\psi_{\beta\varepsilon}\,\mathfrak{e}_\varepsilon$$
$$= SS\,\psi_{\alpha\gamma}\,\psi_{\beta\varepsilon}\,\Psi_{\gamma\varepsilon}$$

(31) $= S\psi_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma}.$

従ツテ行列$(\mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{a}_\beta)$ノ階数ハ$p$デアル。
次ニ$\mathfrak{y}$ノ代リニ母平均零デアル$\mathfrak{z}$ニ関スル式ヲ導カウ。

(32) $b_\alpha - \beta_\alpha = c_\alpha$

トオク。

(33) $E(b_\alpha) = \mathfrak{a}_\alpha \cdot E(\mathfrak{y}) = \mathfrak{a}_\alpha \cdot S\beta_\gamma\,\mathfrak{e}_\gamma$
$= S\beta_\gamma\,\delta_{\alpha\gamma} = \beta_\alpha$

故ニ

$$c_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha\,\mathfrak{y} - \mathfrak{a}_\alpha \cdot E(\mathfrak{y}) = \mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{z}$$ [1]

従ッテ定理ニ依リ $\Delta=(\mathfrak{z}-S\, c_\alpha \mathfrak{e}_\alpha)^2$ ノ自由度ハ$(N-p)$デアル。Δヲ変形ショウ。

$$\Delta=\{\mathfrak{z}-E(\mathfrak{z})-S(b_\alpha-\beta_\alpha)\mathfrak{e}_\alpha\}^2$$
$$=\{\mathfrak{z}-S\, b_\alpha \mathfrak{e}_\alpha\}^2=\vartheta^2$$

即チΔハ残差平方和ニ外ナラナイノデアル。コノ証明カラ副産物トシテb_αトΔトガ独立ニ分布スルコトガ分ル。夫ハϑハR_Nノ部分空間R_{N-p}ニ属シ，R_{N-p}ハ$\mathfrak{a}_\alpha$ノ張ル部分空間R_pニ直交シテ井ルシ，c_α従ッテ又b_αハ$\mathfrak{a}_\alpha$ノ張ル空間ノ座標ダケノ函数ダカラデアル。

---

1) コノ記法ニヨレバb_αノ母分散行列ハ

$E(c_\alpha c_\gamma)=\mathfrak{a}_\alpha \quad E(\mathfrak{z}\mathfrak{z})=\mathfrak{a}_\gamma$

単位行列ヲIデ表ハストE$(c_\alpha c_\gamma)=\mathfrak{a}_\alpha\cdot\sigma^2 I\cdot\mathfrak{a}$

$=\sigma^2\mathfrak{a}_\alpha\cdot\mathfrak{a}_\gamma=\sigma^2=\sigma^2\delta_{\alpha\gamma}$　茲ニ正規分布ハ仮定シテイナイ。