30. Brown運動に就いて I

兼所員（阪大理学部数学教室）角谷靜夫

（昭和20年1月30日受付）

§1. 先づ一次元のBrown運動について述べる。一次元のBrown運動 $\{x(t,\omega) \mid -\infty < t < \infty,\ \omega \in \Omega\}$ は temporary homogeneous な実数値の differential process にて次のGauss分布に従ふものとして定義される。

$$(1)\qquad Pr\{\omega \mid x(t,\omega) - x(s,\omega) < \alpha\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du$$

但シ $-\infty < s < t < \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$.

$x(t,\omega)$ の意味は次の様に解釈するものとする。先づ $T = \{t \mid -\infty < t < \infty\}$ にて定義され、$X = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ の値を取る函数 $x(t)$ 全体の集合を X^T とし X^T に於て $x(t) - y(t) = \text{constant}$ となる如き二つの函数 $x(t)$, $y(t)$ は同じものと考へる。此の如く identification を行って得られる空間を $\Omega = \{\omega\}$ にて表はす。$x(t) \in X^T$ が（$\omega \in \Omega$ に対応することを表はすためこれを $x(t,\omega)$）と書く。然るときは、逆に任意の $\omega \in \Omega$ に対して $x(t,\omega)$ は aditive constant を除いて定まり，随って $-\infty < s < t < \infty$ なる s, t に対して $x(t,\omega) - x(s,\omega)$ は一意的に定まる。

$x(t,\omega)$ が殆どすべての ω に対して t の連続函数となること，即ち Ω の部分集合 N にて $Pr\{N\} = 0$ なるものが存在して任意の $\omega \in \Omega - N$ に対して $x(t,\omega)$ が $-\infty < t < \infty$ に於けるもの連続函数になること．は良く知られてゐる。

一次元の Brown 運動に関する一つの重要な結果は次の定理である。

$\boxed{\text{定理 1.}}$ $-\infty < a < b < \infty$ なる任意の a, b 及び任意の $\alpha > 0$ に対して

$$(2) \qquad Pr\{\omega \mid \max_{a \leqq t \leqq b}(x(t,\omega) - x(a,\omega)) > \alpha\}$$

$$= 2Pr\{\omega \mid x(b,\omega) - x(a,\omega) > \alpha\}$$

但し $\max_{a \leqq t \leqq b}$ は $a \leqq t \leqq b$ なるすべての実数 t に関する最大値を表はす。

定理の証明を述べる前に二三の注意を与へる。先づ左辺の $Pr.\{----\}$ が定義され得ることを示さねばならないが，これは $\omega \in \Omega - N$ なるとき $x(t,\omega) - x(a,\omega)$ が $a \leqq t \leqq b$ に於けるもの

連続函数となり、随って $\max_{a \leqq t \leqq b}(x(t,\omega)-x(a,\omega))=\operatorname{Sup}_{a \leqq r \leqq b}(x(r,\omega)-x(a,\omega))$ となることより明かである。但し $\operatorname{Sup}_{a \leqq r \leqq b}$ は $a \leqq r \leqq b$ なるすべての有理数 r に関する上限を表はす。

勿論こゝで r は必ずしも有理数と限る必要はない。區间 $I_{ab}=\{t \mid a \leqq t \leqq b\}$ に於て稠密な任意の可附番集合を動けばよいのである。

・定理 1 は P. Lévy によって述べられてゐる。しかし彼の証明は直觀的で嚴密とは云へない。彼の議論は次の如くである。先づ

$$(3) \qquad A=\left\{\omega \mid \max_{a \leqq t \leqq b}(x(t,\omega)-x(a,\omega)) > \alpha\right\} \frown (\Omega - N).$$

と置く。任意の $\omega \in A$ に対して $\varphi(t)=x(t,\omega)-x(a,\omega)$ は $a \leqq t \leqq b$ に於て t の連続函数であり，且つ $\varphi(a)=0$，$\varphi(b)>\alpha$ であるから $\varphi(s)=\alpha$ となる最小の $s=s(\omega)$ が存在する。

即ち $a<s<b$ にて $\varphi(s)=\alpha$，且つ $a \leqq t<s$ に於て $\varphi(t)<\alpha$。次に $\varphi(t)$ に対して $\varphi'(t)$ を

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \varphi(t), & a \leqq t \leqq s, \\ \varphi'(t) = 2\alpha - \varphi(t), & s \leqq t \leqq b. \end{cases}$$

によって定義する。$\varphi'(t)$ はやはり $a \leqq t \leqq b$ に於けるもの連続函数であるから $\omega' \in \Omega - N$ が定まって $\varphi'(t) = x(t, \omega') - x(a, \omega')$ となる。勿論こゝで ω' は ω に対して一意的には決らないが，もともと異る ω に対して同じ $\varphi'(t)$ が対應することもあるから，結局 $\omega \to \omega'$ なる many-to-many correspondence が得られる。しかし，特に $a \leqq t \leqq b$ なる t の區間 I_{ab} に注目し，$x(t, \omega) - x(a, \omega) \equiv x(t, \omega') - x(a, \omega')$ が $a \leqq t \leqq b$ にて恒等的に成立する様な ω, ω' は同じものと考へるならば (identification!) $\omega \to \omega' = \Phi(\omega)$ なる對應は A を A 全体にうつす one-to-one correspondence となる。しかもこの correspondence は involution である．(即ち $\Phi^2(\omega) = \omega$).

次に

$$(4) \quad B = \{\omega \mid \max_{a \leqq t \leqq b} (x(t, \omega) - x(a, \omega)) > \alpha;\ x(b, \omega) - x(a, \omega) < \alpha\} \frown (\Omega - N),$$

$$(5) \quad C = \{\omega \mid x(b, \omega) - x(a, \omega) > \alpha\} \frown (\Omega - N),$$

(6) $D = \{w \mid \max_{a \leqq t \leqq b} (x(t,w) - x(a,w))$

$> \alpha \,;\ x(b,w) - x(a,w) = \alpha\} \frown (\Omega - N)$

と置けば B, C, D は互にdisjointで

(7) $A = B \cup C \cup D.$

且つ明かに $pr\{D\} = 0$、しかも $w' = \Phi(w)$ なるAのmappingによってBとCとは互に対應する。

然るにBrown運動がdifferential processであるといふことより

$w' = \Phi(w)$ がAの上にてmeasurepreservingであることは明かであるから

(8) $pr\{A\} = pr\{B\} + pr\{C\} = 2\,pr\{C'\}$

$= 2\,pr\{w \mid x(b,w) - x(a,w) > \alpha\}$

となる。これによってP. Lévyの証明が出来たわけであるが Φ がmeasure preservingであるといふことは明かであるとは云へない。実際Brown運動がdifferential processであると云ふことより w に無関係な t の或る値 S に注目して $\varphi'(t)$ を

$\varphi'(t) = \varphi(t)$, $\quad a \leqq t \leqq S$

$\varphi'(t) = 2\varphi(S) - \varphi(t)$, $\quad S \leqq t \leqq b$,

によって定義するならば、これによって引き起される

ω の対應 $\omega \to \omega'$ は明かに measure preserving である。しかし上の議論では $s = s(\omega)$ が ω に depend するから、$\Phi(\omega)$ が measure preserving であることを直に結論するわけには行かない。

以上に於て先づ此の P. Lévy の結果に厳密な証明を与へよう

補助定理 1

$$(9) \qquad \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leqq \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

証明

$$(10) \qquad \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leqq \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

補助定理 2 $-\infty < a < b < \infty$ なる任意の a, b 及び任意の $\alpha > 0$ に対して

$$(11) \qquad Pr\{\omega \mid \max_{a \leqq t \leqq b} (x(t,\omega) - x(a,\omega)) > \alpha\}$$
$$\leqq 2\, Pr\{\omega \mid x(b,\omega) - x(a,\omega) > \alpha\}$$

証明 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ なる任意の分割に対して

$$(12) \qquad Pr\{\omega \mid \max_{1 \leqq k \leqq n} (x(t_k,\omega) - x(a,\omega)) > \alpha\}$$
$$- Pr\{\omega \mid x(b,\omega) - x(a,\omega) > \alpha\}$$

~~40~~

$$+ \Pr\{\omega \mid \max_{1 \leqq k \leqq n-1} (x(t_k, \omega) - x(a, \omega)) > \alpha \cdot x(b, \omega) - x(a, \omega) \leqq \alpha\}$$

$$= \Pr\{\omega \mid x(b, \omega) - x(a, \omega) > \alpha\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \Pr\{\omega \mid x(t_i, \omega) - x(a, \omega) \leqq \alpha, \quad i = 1, \cdots\cdots, k-1; \quad x(t_k, \omega) - x(a, \omega) > \alpha; \quad x(b, \omega) - x(a, \omega) \leqq \alpha\}$$

$$\leqq \Pr\{\omega \mid x(b, \omega) - x(a, \omega) > \alpha\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \Pr\{\omega \mid x(t_i, \omega) - x(a, \omega) \leqq \alpha, \quad i = 1 \cdots\cdots, k-1; \quad x(t_k, \omega) - x(a, \omega) > \alpha; \quad x(b, \omega) - x(t_k, \omega) < 0\}$$

$$= \Pr\{\omega \mid x(b, \omega) - x(a, \omega) > \alpha\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \Pr\{\omega \mid x(t_i, \omega) - x(a, \omega) \leqq \alpha, \quad i = 1, \cdots\cdots, k-1; \quad x(t_k \omega) - x(a, \omega) > \alpha; \quad x(b, \omega) - x(t_k, \omega) > 0\}$$

$$\leqq \Pr\{\omega \mid x(b, \omega) - x(a, \omega) > \alpha\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \Pr\{\omega \mid x(t_i, \omega) - x(a, \omega) \leqq \alpha, \quad i = 1, \cdots\cdots, k-1; \quad x(t_k, \omega) - x(a, \omega) > \alpha; \quad x(b, \omega) - x(a, \omega) > \alpha\}$$

$$= \Pr\{\mid x(b, \omega) - x(a, \omega) > \alpha\}$$

$$+ \Pr\{\omega \mid \max_{1 \leqq k \leqq n-1} (x(t_k, \omega) -$$

~~41~~

$$x(a,w)) > \alpha\,;\ x(b,w)-x(a,w) > \alpha\}$$

$$\leqq 2\,Pr\{w \mid x(b,w)-x(a,w) > \alpha\}$$

分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ を細かくして行けば極限として求むる不等式を得る。

$\boxed{\text{系 1}}$ 同じ條件の下に

(13) $$Pr\{w \mid \max_{a\leqq t\leqq b}|x(t,w)-x(b,w)|>\alpha\}$$

$$\leqq 4\,Pr\{w \mid x(b,w)-x(a,w)>\alpha\}$$

(14) $$Pr\{w \mid \max_{a\leqq s<t\leqq b}|x(t,w)-x(s,w)|>\alpha\}$$

$$\leqq Pr\{w \mid \max_{a\leqq t\leqq b}|x(t,w)-x(a,w)|>\tfrac{\alpha}{2}\}$$

$$\leqq 4\,Pr\{w \mid x(b,w)-x(a,w)>\tfrac{\alpha}{2}\}.$$

$\boxed{\text{補助定理 3.}}$ $-\infty<a<b<\infty$ なる任意の実数 a, b 及び任意の $\varepsilon>0$ に對して正数 $\delta=\delta(b-a,\varepsilon)>0$ が定まり

(15) $$Pr\{w \mid \max_{a\leqq s<t\leqq b,\ t-s\leqq\delta}|x(t,w)-x(s,w)|>\varepsilon\}<\varepsilon.$$

となる。

$\boxed{\text{証　明}}$ p を正整数とし區間 $I_{a,b}$ を p 個に等分する分点を $a=t_0^{(p)}<t_1^{(p)}<\cdots<t_p^{(p)}=b$, $t_k^{(p)}=a+\frac{k}{p}(b-a)$, $k=0,1,\cdots,p$, とする。

然るときは $a \leqq s < t \leqq b$, $t - s \leqq \frac{1}{p}(b-a)$ なる s, t に對して $t^{(p)}_{k-1} \leqq s < t \leqq t^{(p)}_{k+1}$ なる k ($1 \leqq k \leqq p-1$) が存在するから

(16) $$Pr\{\omega \mid \max_{a \leqq s < t \leqq b,\ t-s \leqq \frac{1}{p}(b-a)} |x(t,\omega) - x(s,\omega)| > \varepsilon\}$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{p-1} Pr\{\omega \mid \max_{t^{(p)}_{k-1} \leqq s < t \leqq t^{(p)}_{k+1}} |x(t,\omega) - x(s,\omega)| > \varepsilon\}$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{p-1} 4\, Pr\{\omega \mid x(t^{(p)}_{k+1}, \omega) - x(t^{(p)}_{k-1}, \omega) > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$= \frac{(p-1)\cdot 4}{\sqrt{2\pi\left(\frac{b-a}{p}\right)}} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\left(\frac{b-a}{p}\right)}}\, du$$

$$= \frac{4\cdot(p-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{p}{b-a}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \leqq \frac{4\cdot(p-1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{b-a}{p}}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{8(b}}$$

右辺は $p \to \infty$ なるとき $\longrightarrow 0$ となるから $p = p(b-a, \varepsilon)$ を十分大きくとれば $< \varepsilon$ となる $\delta = \frac{1}{p}(b-a)$ と置けば求むる $\delta = \delta(b-a, \varepsilon)$ が得られる

補助定理 4 $-\infty < a < b < \infty$ なる任意の實數 a, b 及び任意の $\alpha > 0$ に對して

(17) $$Pr\{\omega \mid \max_{a \leqq t \leqq b} (x(t,\omega) - x(s,\omega)) > \alpha\}$$

$\geqq 2\,Pr\{w \mid x(b,w)-x(a,w)>\alpha\}$。

$\boxed{\text{証　明}}$ 任意の $\varepsilon>0$ に對して $\delta=\delta(b-a,\varepsilon)>0$ を補助定理２の條件を満足する様に定める。

簡単のため

(18) $$A=\{w \mid \max_{a\leqq s<t\leqq b,\ t-s\leqq\delta} |x(t,w)-x(s,w)|>\varepsilon\}$$

と置く。然るときは $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, $t_k-t_{k-1}\leqq\delta$, $k=1,2,\cdots,n$ なる區間 I_{ab} の任意の分割に対して

(19) $$\begin{aligned}
&Pr\{w \mid x(b,w)-x(a,w)>\alpha\}\\
&\leqq Pr\{A\}+Pr\{w \mid x(b,w)-x(a,w)>\alpha,\\
&\quad w\in\Omega-A\}\\
&<\varepsilon+\sum_{k=1}^{n-1} Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w)\leqq\alpha,\\
&\quad i=1,\cdots,k-1;\ x(t_k,w)-x(a,w)>\alpha;\\
&\quad x(b,w)-x(a,w)>\alpha;\ w\in\Omega-A\}\\
&\quad +Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w)\leqq\alpha,\ i=1,\cdots\\
&\quad ,n-1;\ x(b,w)-x(a,w)>\alpha,\ w\in\Omega-A\}\\
&\leqq\varepsilon+\sum_{k=1}^{n-1} Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w)\leqq\alpha,\\
&\quad i=1,\cdots,k-1;\ \alpha+\varepsilon\geqq x(t_k,w)-x(a,w)\\
&\quad >\alpha;\ x(b,w)-x(a,w)>\alpha\}\\
&\quad +Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w)\leqq\alpha,
\end{aligned}$$

$i=1,\cdots,n-1;\ \alpha+\varepsilon \geqq x(b,w)-x(a,w) > \alpha \}$

$\leqq \varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w) \leqq \alpha,\ i=1,\cdots,k-1;\ \alpha+\varepsilon \geqq x(t_k,w) - x(a,w) > \alpha;\ x(b,w)-x(t_k,w) > -\varepsilon\}$

$+ Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w) \leqq \alpha,\ i=1,\cdots,n-1;\ \alpha+\varepsilon \geqq x(b,w)-x(a,w) > \alpha\}$

$\leqq \varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w) \leqq \alpha,\ i=1,\cdots,k-1;\ \alpha+\varepsilon \geqq x(t_k,w)-x(a,w) > \alpha;\ x(b,w)-x(t_k,w) < \varepsilon\}$

$+ Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w) \leqq \alpha,\ i=1,\cdots,n-1;\ \alpha+\varepsilon \geqq x(b,w)-x(a,w) > \alpha\}$

$\leqq \varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w) \leqq \alpha,\ i=1,\cdots,k-1;\ \alpha+\varepsilon \geqq x(t_k,w)-x(a,w) > \alpha;\ x(b,w)-x(a,w) < \alpha+2\varepsilon\}$

$+ Pr\{w \mid x(t_i,w)-x(a,w) \leqq \alpha,\ i=1,\cdots,n-1;\ \alpha+\varepsilon \geqq x(b,w)-x(a,w) > \alpha\}$

$\leqq \varepsilon + Pr\{w \mid \max_{1\leqq k \leqq n}(x(t_k,w) - x(a,w)) > \alpha;\ x(b,w)-x(a,w) < \alpha + 2\varepsilon\}$

隨って

(20) $$Pr\{\omega \mid \max_{1\leqq k\leqq n}(x(t_k,\omega)-x(a,\omega))>\alpha\}$$

$$= Pr\{\omega \mid \max_{1\leqq k\leqq n}(x(t_k,\omega)-x(a,\omega))>\alpha;\ x(b,\omega)-x(a,\omega)<\alpha+2\varepsilon\}$$

$$+Pr\{|x(b,\omega)-x(a,\omega)\geqq\alpha+2\varepsilon\}$$

$$\geqq Pr\{\omega \mid x(b,\omega)-x(a,\omega)>\alpha\}-\varepsilon$$

$$+Pr\{\omega \mid x(b,\omega)-x(a,\omega)>\alpha\}-Pr\{\omega \mid \alpha<x(b,\omega)-x(a,\omega)<\alpha+2\varepsilon\}$$

$$=2Pr\{\omega \mid x(b,\omega)-x(a,\omega)>\alpha\}-\varepsilon-\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\int_{\alpha}^{\alpha+2\varepsilon}e^{-\frac{u^2}{2(b-a)}}du$$

$$\geqq 2Pr\{\omega \mid x(b,\omega)-x(a,\omega)>\alpha\}-\varepsilon-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi(b-a)}}$$

(20)に於て分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=a$ を細かくすることによって

(21) $$Pr\{\omega \mid \max_{a\leqq t\leqq b}(x(t,\omega)-x(a,\omega))>\alpha\}$$

$$\geqq 2Pr\{\omega \mid x(b,\omega)-x(a,\omega)>\alpha\}-\varepsilon-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi(b-a)}}$$

$\varepsilon>0$ は任意であるから $\varepsilon\to 0$ ならしむれば求むる不等式(17)を得る。

補助定理2と4によって定理1の証明が得られた。

(續く)