2. 正規分布函数ノ一特性ニ就テ

河田龍夫，坂元平八

（昭和十九年七月十五日受付）

1. $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ （$n \geqq 2$）ヲアル母集団ヨリノ標本変量デアルト仮定スル，即チ X_i（$i=1,2,\cdots n$）ヲ同ジ分布函数 $F(x)$ ヲ持ツ独立ナ確率変数デアルト仮定スル。数理統計学ニ於テ以下述ベヨウトスルコトハヨク知ラレテヰル事実デ然モ精密標本論ノ研究上重要ナ性質デアル。

若シ $F(x)$ ガ正規分布函数デアレバ，二ツノ統計量

$$(1.1) \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

及ビ

$$(1.2) \qquad S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

ハ独立デアル。

R.C. Geary[1] ガ此ノ定理ノ逆ヲ証明シ正規母集団ノ特性ヲ明ラカニシタ。証明法ハ R.A. Fisher[2] ニ依テ与ヘラレタ、種々ノ統計量ノ semi-invariants ノ間ノ関係式ヲ利用セルモノデアル。

玆デハ R.C. Geary ガ証明ニ X_i ノアラユル次数ノ積率ノ存在ヲ仮定セルニ対シ積率ニ就キ全然仮定ヲ置カズモット一般的ナ條件ノ下デ別証ヲ試ミタ（特性函数ニヨッテ）

2. 定理ヲ述べレバ次ノ如クデアル。

定理 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n \geqq 2)$ ヲ同じ分布函数ヲ持ツ独立ナ確率変数デアルト仮定スル，若シ二ツノ確率変数

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2, \ (\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i)$$

ガ独立デアレバ，$F(x)$ ハ正規分布函数カ或ハ単位分布函数デナケレバナラナイ。

今同時分布 (X_i, X_i^2) ノ特性函数[3]

---

(1) R.C. Geary, The distribution of "students" ratio for non-normal samples, Journ. Royal Statistical Soc. Supplement. 3(1936).

(2) R.A. Fisher. Moments and product moments of sampling distribution, Proc. Lond. Math. Soc. 30 (1929)

(3) 特性函数ノ普通ノ意味デハ t, s ハ実数デアルガ，玆デハ s ガ複素数ナル場合モ同じ言葉ヲ用ヒル。

$$(2.1)\qquad f(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx+isx^2}\,dF(x),$$

ヲ考ヘル、但シ t ハ実数デアルガ, S ハ $S=\sigma+i\tau$, $\tau>0$ ナル如キ複素数デアルト考ヘル, $f(t,S)$ ハ明カニ上半平面 $\tau>0$ ニ於テ正則ナ解析函数デアル。

X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ ハ独立確率変数デアルカラ, 確率変数 (Y,Σ) ノ特性函数ハ $\{f(t,s)\}^n$ デアル, 但シ $\Sigma=\Sigma X_i^2$ 然ルトキ $\Sigma\geqq 0$ ナルコトニ注目スレバ $\{f(t,S)\}^n$ ハ亦次ノ如ク書ケル,

$$(2.2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{it\eta+is\theta}\,dF(\eta,\theta),$$

但シ $F(\eta,\theta)$ ハ (Y,Σ) ノ分布函数デアル。

$Z+\frac{1}{n}Y^2=\Sigma$ ダカラ (Y,Z) ノ分布函数ヲ $G(\eta,\varphi)$ デアラハシテ

$$(2.3)\qquad \{f(t,s)\}^n=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{it\eta+is\left(\frac{\eta^2}{n}+\varphi\right)}\,dG(\eta,\varphi)$$

ナル関係ヲ知ル。

Y, Z ハ独立デアルカラ,

$$(2.4)\qquad dG(\eta,\varphi)=dG_1(\eta)\,dG_2(\varphi),$$

デアル，但シ $G_2(\eta)$，及ビ $G_2(\varphi)$ ハ夫々 Y 及 Z ノ分布函数デアル。従ッテ (2.2) ハ次ノ如ク書クコトガ出来ル。

$$(2.5)\quad \{f(t,s)\}^n=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\eta+i\frac{s}{n}\eta^2}dG_1(\eta)\cdot\int_0^{\infty}e^{is\varphi}dG_2(\varphi)$$

仮ニコヽデ

$$\psi\left(t,\frac{s}{n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\eta+i\frac{s}{n}\eta^2}dG_1(\eta),$$

$$\alpha(s)=\alpha_n(s)=\int_0^{\infty}e^{is\varphi}dG_2(\varphi)$$

トオケバ $\tau>0$ デ以下ノ如キ関係ガ成立ツコトヲ知ル。

$$(2.6)\qquad -i\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}f(t,s),$$

$$(2.7)\qquad -\frac{i}{n}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi\left(t,\frac{s}{n}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\psi\left(t,\frac{s}{n}\right)$$

及ビ

$$(2.8)\qquad -i\,\alpha'(s)\geqq 0^{(1)}\quad(\sigma=0,\ \tau>0)$$

(2.5) ノ両辺ヲ S ニ就テ微分シテ，

$$n\{f(t,s)\}^{n-1}\frac{\partial}{\partial s}f(t,s)=\alpha(s)\frac{\partial}{\partial s}\psi(t,\frac{s}{n})$$

$$+\psi(t,\frac{s}{n})\alpha'(s).^{(1)}$$

ヲ得、之ハ（2.6）ト（2.7）ニ依リ，

$$(2.9)\quad n\{f(t,s)\}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,s)=\frac{1}{n}\alpha(s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,\frac{s}{n})+i\,\psi(t,\frac{s}{n})\alpha'(s)$$

トナル。

亦（2.5）ヲ t ニ関シテ二回微分スレバ

$$(2.10)\quad n\{f(t,s)\}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,s)+n(n-1)\{f(t,s)\}^{n-2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)\right\}^2=\alpha(s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,\frac{s}{n})$$

ガ成立ツ，

（2.9）ト（2.10）ヨリ $\alpha(s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,\frac{s}{n})$ ヲ消去スレバ

---

(1) $\alpha'(s)$ ノダッシユハ S ニ関スル微分ヲ意味スル。

$$\{f(t,s)\}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,s)-\{f(t,s)\}^{n-2}$$
$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)\right\}^2=i\,\frac{\alpha'(s)}{n-1}\cdot\psi(t,\frac{s}{n})$$

(2.5)ニ依テ、之ハ

$$(2.11)\quad \{f(t,s)\}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,s)-\{f(t,s)\}^{n-2}$$
$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)\right\}^2=i\,\{f(t,s)\}^{n}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\alpha'(s)}{\alpha(s)}$$

トナル。

此ノ方程式カラ或ル一定ノ s ニ対シテ $f(t,s)\neq 0$ ナル如キ t ノ区間ニ於テ（s ヲ固定スレバ，$f(t,s)$ ハ連続デアルカラ $f(t,s)\neq 0$ ナル t ノ集合ハ区間ノ和デアル）

$$(2.12)\quad f(t,s)=\exp\left[\frac{i}{n-1}\cdot\frac{\alpha'(s)}{\alpha(s)}\left\{\frac{t^2}{2}+C(s)t+D(s)\right\}\right]$$

ナルコトガ得ラレル。

然ルニ $f(t,s)$ ハ t ノ連続函数デ(2.12)ノ右辺ハ t ノ函数トシテ零点ヲ持タヌカラ(2.12)ハ t ノスベテノ値ニ対シテ成立ツ(1)

---

(1) $C(s)$, $D(s)$ ハ実ハ t ノ区間ニ無関係ナ s ノ函数デアル。

仍 $\sigma=0$ トスレバ $S=i\tau$ デアル。然ルトキスベテノ t ニ対シテ次ノ関係式ガ成立ツ

$$(2.13)\quad \lim_{\tau\to+0} f(t,i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)^{(2)}$$

仍若シ (2.12) ニ於テ $t=0$ トトリ τ ヲ 0 ニ tend セシメレバ (2.13) ニ依テ $f(0,i\tau)\to 1$。

従ツテ

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\alpha'(i\tau)}{\alpha(i\tau)}D(i\tau)=0$$

次ニ $\lim_{\tau\to 0} f(t,i\tau)f(-t,i\tau)\ (t\neq 0)$ ノ存在ニ注目スレバ,

---

(2) $\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\tau x^2}\,dF(x)\right|$

$$\leqq\left|\int_{-A}^{A} e^{itx}(1-e^{-\tau x^2})\,dF(x)\right|+\left|\int_{|x|>A} e^{itx}\,dF(x)\right|$$

$$+\left|\int_{|x|>A} e^{itx-\tau x^2}\,dF(x)\right|$$

$\leqq \tau A^2\int_{-A}^{A} dF(x)+2\int_{|x|>A} dF(x)$ コレハ A ヲ

$2\int_{|x|>A} dF(x)<\frac{\varepsilon}{2}$ ナル如クトリ次ニ τ ヲ

$\tau A^2\int_{-A}^{A} dF(x)<\frac{\varepsilon}{2}$ ナル如クトレバ, 之 ε トナル。

$\lim_{\tau\to 0}\alpha'(i\tau)$ ガ存在スルコトヲ知リ得.

従ッテ又 $\lim_{\tau\to 0} c(i\tau)$ ノ存在スルコトガ分ル。

今コヽデ
$$\lim_{\tau\to 0}\frac{i}{n-1}\frac{\alpha'(i\tau)}{\alpha(i\tau)} = -\alpha_n,$$
$$\lim_{\tau\to 0}\frac{i}{n-1}\frac{\alpha'(i\tau)}{\alpha(i\tau)}\,c(i\tau)=\beta_n$$
トスル。

若シ $\alpha_n \neq 0$ デアレバ然ルトキ (2.12) ニ於テ $S=i\tau\to 0$ ナラシメレバ

(2.14) $$f(t)=f(t,0)=e^{-\frac{\alpha_n}{2}t^2+\beta_n t}$$

ヲ得ル。

然シナガラコノ左辺ハ n ニ無関係デアルカラ α_n ト β_n ハ n ニ無関係ナ常数[1]デ斯クシテ $\alpha_n=\alpha$, $\beta_n=i\beta$ トオクコトガ出来ル。コヽデ $f(t)=\overline{f(-t)}$ デアルカラ, β ハ実数デアル。

若シ $\alpha\neq 0$ デアレバ (2.8) ニ依テ $\alpha>0$ デ (2.14) ハ
$$f(t)=e^{-\frac{\alpha}{2}t^2+i\beta t}$$

---

(1) コレハ又直接ニモ証明スル事ガ出来ル, $\lim\alpha_n$ ノ存在カラ Z ノ Variance ノ有限デアル事ヲ知ル、ソシテ $\frac{1}{i}\lim_{\tau\to 0}\alpha'(i\tau)=E(Z)$ デ Z ノ平均値デアルカラ之ハ $(n-1)\sigma^2$ デアル. 但シ σ^2 ハ X_i ノ Variance デアル, コノ事ハ標本論デ良ク知ラレテヰル事実デアル, 従ッテ α_n ハ n ニ無関係デアル β_n モ亦 n ニ無関係デアルコトヲ直接ニ証明シ得ル。

ナルゴトク書ケル。之ハ $F(x)$ ガ正規分布函数ナルコトヲ示ス、

若シ $\alpha=0$ デアレバ、此ノ時 $f(t)=e^{i\beta t}$ デアル，之ハ $F(x)$ ガ $x=\beta$ ニ於テ唯一ツノ Point spectrum ヲ有スル単位函数デアル事ヲ示ス。